






MATHEMATISCHES
WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN

BAUMEISTER IN BERLIN.

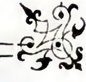


II. BAND

C—D.

BERLIN

VERLAG VON GUSTAV BOSSELMANN

MATHEMATISCHES

WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN

BAUMEISTER IN BERLIN

II. BAND

C—D.

BERLIN

VERLAG VON GUSTAV BOSSELMANN

C.

Caliber ist kreisrunder Querschnitt bei geraden Cylindern und Kugeln; bei ersteren ist es vornehmlich der innere Querschnitt einer Röhre, wie bei den Geschützen, den Thermometerröhren; Aräometerscalen bedürfen eines genauen äufseren C. Bei Kugeln versteht man unter C. deren gröfste Kreisebene. Die Gröfse des C. wird durch den Durchmesser gemessen und angegeben. Eine Röhre von durchweg einerlei C. heifst eine calibrirte Röhre. Bei Barometern ist die Calibrirung der Röhre nicht wesentlich, weil einerlei Luftdruck sich unabhängig von dem C. durch einerlei Höhe der barometrischen Flüssigkeit ausspricht; um so wichtiger ist sie beim Thermometer, das zu wissenschaftlichen Zwecken bestimmt ist, weil die thermometrische Flüssigkeit von der Wärme eine cubische Ausdehnung erfährt, so dafs einerlei Wärme-Abstände bei verschiedenem Röhrencaliber verschiedene Längen-Ausdehnungen, also die Grade unrichtig zeigen, wenn der Fundamentalabstand zwischen dem Gefrier- und dem Siedepunkt in lauter gleich lange Theile getheilt ist. Man prüft solche Röhre in Betreff ihres C., indem man eine kurze Länge Quecksilber in dieselbe bringt, diese vom Anfang bis zum Ende der Röhre nach und nach verschiebt, und mit Hülfe eines genauen Maafsstabes mikroskopisch untersucht, ob das Quecksilber überall einerlei Länge hat.

Liegt daran, die Weite einer Röhre, besonders eines Haarröhrchens, zu erfahren, so wägt man die Röhre, bringt darauf eine möglichst grofse Länge Quecksilber hinein, wägt wieder, erfährt aus der Differenz beider Gewichte das Gewicht des Quecksilbers q, mifst dessen Länge l, und wenn das bekannte spec. Gew. des Quecksilbers $= s$, γ das absolute Gew. der Kubik-Einheit destillirten Wassers ist, so hat man die Weite d der Röhre =

$$= 2\sqrt{\frac{q}{\pi \cdot l \cdot s \cdot \gamma}}$$

Calorimeter, ein von Lavoisier erfundener Apparat, um die specifische Wärme eines Stoffs dadurch, dafs man ihn Eis schmelzen läfst, zu ermitteln. Die Theorie des C. ist folgende: Für einerlei Wirkung durch die Wärme ist auch stets einerlei Wärmemenge erforderlich, z. B. um die Kubik-Einheit eines bestimmten Stoffs von 0° bis auf 100° Cels. zu erhöhen, oder um ihn von 100° auf 0° abzukühlen. Verschiedene Stoffe brauchen verschiedene Wärmemengen dazu, d. h. verschiedene Stoffe haben verschiedene Wärmecapacitäten, und die Wärmemenge, die einem Stoff zugeführt werden mufs, damit seine Temperatur von 0° auf 1° oder auf 100° Cels. steige, oder die er abgiebt, um von 1° oder von 100° Cels. auf 0° herabzukommen, ist seine specifische Wärme.

Da man Wärmemengen nicht absolut aufzufinden vermag, so sind alle Angaben von specifischer Wärme relativ, indem sie auf einen Normalstoff, dessen specifische Wärme als Einheit genommen wird, sich gründen. Dieser Stoff ist das destillirte Wasser, welches 79° Wärme abgiebt, um ein gleiches Gewicht Eis zu schmelzen, d. h. 1 Pfd. Wasser von 79° Temperatur schmelzt 1 Pfd. Eis von 0° zu Wasser von 0° Temp. und geht selbst zu 0° Temp. hinab, so dafs 2 Pfd. Wasser von 0° entstehen.

Wenn nun 1000 Cent Quecksilber von 100° Cels. 42 Cent. Eis von 0° zu Wasser von 0° schmelzen, bis sie selbst auf

die Temperatur 0° hinab gekommen sind, so hat man die specifische Wärme x des Quecksilbers zu der des Wassers = 1 aus der Proportion:

$$\left.\begin{array}{lll} 100^\circ & \text{Quecks.} : 79^\circ & \text{Wasser} \\ 1000^\circ \text{ Cent} & \quad " \quad : 42^\circ & \text{Cent Eis} \end{array}\right\} = 1 : x$$

woraus

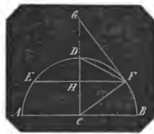
$$x = 0{,}03318$$

Der Apparat ist in allen physikalischen Lehrbüchern beschrieben und abgebildet: Er besteht aus drei blechenen Gefäfsen, die mit Spielraum in einander stehen. Das innerste empfängt den Körper, dessen specifische Wärme zu ermitteln ist; zwischen diesem Gefäfs und dem mittleren wird Eis von 0° eingelegt, welches durch die Wärme des eingelegten Körpers zum Theil zu Wasser schmilzt, das durch ein Rohr in ein besonderes Gefäfs fliefst und mit diesem abgewägt werden kann. Zwischen das mittlere und äufsere Gefäfs wird ebenfalls Eis gepackt, damit die Wärme der äufseren Luft auf den inneren Schmelzprocefs keinen Einflufs üben könne. Das Verfahren bei den Versuchen, und die nöthigen Vorsichtsmafsregeln zu Erlangung richtiger Resultate gehören in die Physik.

Calotte ist jeder der beiden Theile einer Kugeloberfläche, die von einer Ebene geschnitten wird. Denkt man sich den auf der Durchschnitts-Ebene normalen Durchmesser, so trifft dieser in jeder C. den Punkt, welcher von allen übrigen Calottenpunkten den gröfsten Abstand von der Ebene hat, und dieser Abstand heifst die Höhe der C., die Durchschnittsebene ist die Grundebene d. C.

Es sei ADB ein Halbkreis, EF eine mit dem Durchmesser AB parallele Sehne, DC der Halbmesser normal AB, so beschreibt bei der Umdrehung des Halbkreises um DC der Quadrant DFB eine Halbkugel-Oberfläche, und der Bogen DF eine C.

Fig. 267.



Um den Flächen-Inhalt der C. zu bestimmen, ziehe die Sehne DF und die Tangente GF an F bis in die Verlängerung von CD, so beschreiben beide geraden Linien DF und GF zwei Kegelmäntel, von welchen offenbar der erste kleiner, und der zweite gröfser als der Inhalt I der C. ist, die aber beide immer näher dem Inhalt I kommen, je näher EF an D gelegt wird.

Die Inhalte der Kegelmäntel sind gleich geradlinigen Dreiecken, deren Grundlinie der von dem Punkt F beschriebene Kreisumfang ist, und deren Höhen die Geraden DF und GF sind. Mithin ist der Kegelmantel, der entsteht durch DF

$$= \pi \cdot FH \cdot DF$$

durch GF

$$= \pi \cdot FH \cdot GF$$

Bezeichnet man den Halbmesser CF mit r, die Höhe DH der C. mit x, so hat man

$$FH = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{(2r-x)x}$$

$$DF = \sqrt{2rx}$$

und da

$$\triangle\, GFH \sim \triangle\, FCH$$

also

$$GF : FH = FC : CH$$

oder

$$GF : \sqrt{(2r-x)x} = r : r - x$$

$$GF = \frac{r}{r-x} \sqrt{(2r-x)x}$$

die Kegelfläche durch DF ist mithin

$$= \pi \sqrt{(2r-x)x} \cdot \sqrt{2rx} = \pi r x \sqrt{2 \cdot \frac{2r-x}{r}}$$

die Kegelfläche durch GF

$$= \pi \sqrt{(2r-x)x} \cdot \frac{r}{r-x} \sqrt{(2r-x)x}$$

$$= \pi r x \frac{2r-x}{r-x}$$

folglich

$$\pi r x \sqrt{2 \frac{2r-x}{r}} < I < \pi r x \frac{2r-x}{r-x}$$

Da mit beliebiger Abnahme von x die beiden einschliefsenden Gröfsen der mittleren I beliebig nahe gebracht werden können, so ist offenbar

$$I = \pi r x \cdot K$$

wo K eine Gröfse ist, die zwischen

$$\sqrt{2 \frac{2r-x}{r}} \text{ und } \frac{2r-x}{r-x} \text{ oder zwischen}$$

$$\sqrt{2\left(2 - \frac{x}{r}\right)} \text{ und } \left(2 + \frac{x}{r}\right) : \left(1 - \frac{x}{r}\right)$$

Mit beliebiger Abnahme von x verschwindet aber $\frac{x}{r}$ gegen 1 u. 2 immer mehr, und beide Gröfsen können dem Werth

$= 2$ beliebig nahe gebracht werden; demnach ist $K = 2$ und

$$I = 2\pi r x$$

für $x = r$ entsteht die Halbkugelfläche $= 2\pi r^2$, und die ganze Kugeloberfläche ist $= 4\pi r^2$ = dem Vierfachen der gröfsten Kreisfläche.

Camera clara. Hierunter versteht man 2 optische Apparate, nämlich 1) die im folgenden Art. abgehandelte Camera lucida, besonders bei den Franzosen, die diese chambre claire nennen, und 2) die in dem darauf folgenden Art. beschriebene Camera obscura in der unter No. 2 gedachten Abänderung, weil man hier das Bild nicht mehr in einer dunklen Kammer, sondern im Hellen auf einer mattgeschliffenen Glasplatte sieht.

Camera lucida od. clara ein von Wollaston erfundener optischer Apparat zum Nachzeichnen von Gegenständen. Er besteht aus einem prismatischen Glaskörper von der Form $ABDC$ im Querschnitt, in welchem $AB = BD$ einen rechten Winkel und $AC = DC$ einen Winkel von 135° bilden.

Die Construction dieses Profils ist sehr einfach; denn zieht man die Diagonale BC, so hat man

$$\angle ACB = \angle BCD = \frac{135^\circ}{2} = 67\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$\angle ABC = 45^\circ$$

folglich $$\angle BAC = 180^\circ - (67\tfrac{1}{2}^\circ + 45^\circ) = 67\tfrac{1}{2}^\circ$$

Hat man demnach $AB = BD$, $\angle ABD = 90°$ gezeichnet, so halbire $\angle ABD$ durch BC und nimm $BC = AB$, wonach der Punkt C und die Linien AC und DC sich ergeben.

Man stellt den Glaskörper auf ein Stativ mit der Grundkante BD senkrecht, mit der durch AB liegenden Seitenebene des Prisma waagerecht, belegt die Oberfläche mit einem Pigment, und läfst nur an der Kante A in der Mitte der Länge eine kleine runde Oeffnung für das durchsehende Auge; die Ebene BD wird dem

Fig. 268.

aufzunehmenden Gegenstande, einer Landschaft z. B., entgegenstellt. Mit diesem Apparat erreicht man, wie weiter nachgewiesen werden wird, dafs die von dem äufseren Gegenstande auf die Ebene CD fallenden Strahlen reflectirt unter demselben Reflectionswinkel auf die Ebene AC geworfen werden, und von dieser nach der Ebene AB wiederum unter demselben Winkel reflectiren, so dafs die reflectirten Strahlen unter denselben Winkeln in das bei A befindliche Auge fallen, unter welchen die ursprünglichen Strahlen in BD eintreten, und dort gesehen werden würden, dafs mithin der Gegenstand bei A in seiner natürlichen Gröfse erscheint, und zwar waagerecht ausgebreitet, weil das Auge das empfangene Bild des Gegenstandes senkrecht herabwirft. Legt man daher unter dem Glaskörper auf eine horizontale Ebene ein Stück weifses Papier, und richtet die Pupille des Auges zur Hälfte über die Oeffnung, zur Hälfte auf das Papier, so lassen sich die einzelnen Linien des Gegenstandes mit dem Bleistift überzeichnen, und man erhält das Bild in einem um so kleineren Maafsstabe, je näher das Papier der Oberfläche AB gelegt wird.

Die Länge $AC = DC$ hat man

$$2AB \sin \tfrac{1}{2}ABC = 2AB \sin \frac{45^\circ}{2}$$

$$= AB\sqrt{2(1 - \cos 45^\circ)} = AB\sqrt{2(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})}$$

$$= 0{,}765 \cdot AB$$

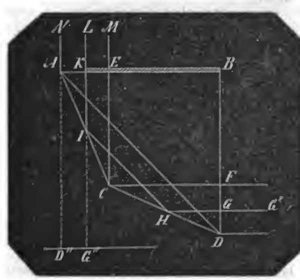
Fällt man von C die Lothe CE und CF auf AB und CD, so sind die Projectionen $AE = DF = AB(1 - \cos 45^\circ) = 0{,}293 \cdot AB$.

Behufs der Aufnahme eines entfernten Gegenstandes genügt es, wenn die Seiten AB, BD 3 bis 6 Linien breit, und das Prisma bis 1 Zoll lang ist.

2. Es sei Fig. 269 $G'G$ ein auf die Ebene BD fallender horizontaler Lichtstrahl, so geht derselbe geradlinig fort bis H. Da nun $\angle GHD = 22\tfrac{1}{2}^\circ$ also klei-

ner als $48\frac{1}{4}°$, so kann er (s. Ablenkung des Lichtstrahls, pag. 9) nicht austreten, sondern reflectirt, und zwar unter dem $\angle IHC = \angle GHD = 22\frac{1}{2}°$; da nun $\angle ICH = 135°$, so ist auch $\angle CIH = 22\frac{1}{2}°$, mithin reflectirt der Strahl HI nochmals unter dem $\angle AIK = 22\frac{1}{2}°$; es ist $\angle AKI = 90°$ und der Strahl IK geht geradlinig und

Fig. 269.



senkrecht nach IL in die Höhe. Dasselbe findet mit allen horizontal auf die Ebene CD fallenden Strahlen statt: der Strahl auf D reflectirt nach DA und erscheint in der senkrechten AN, der Strahl auf C reflectirt nach CE und erscheint in der senkrechten CM, und der vor DF befindliche senkrechte Gegenstand erscheint in dem gleichgrofsen waagerechten Bilde NM. Reicht die Oeffnung bei A nur bis K, so werden auch nur die Strahlen, die auf den Theil DH der Ebene CD fallen, zwischen N und L gesehen, und der vor DG senkrechte Gegenstand erscheint auf dem Papier in $D''G''$, wohin nämlich das Auge vor A die Strahlen wirft.

3. Es sei $G'G$ (Fig. 270) der Strahl von einem unter dem Horizont xy in der Verlängerung von GG' befindlichen fernen Punkt, $\angle yGG' = \alpha$, so bricht der Strahl nach GH, so dafs (s. Ablenkung u. s. w., pag. 9) $\frac{2}{3} \sin \alpha = \sin HGx = \sin \beta$.

Da nun

$$\angle GxD = 22\frac{1}{2}°$$

so ist

$$\angle GHD = 22\frac{1}{2}° - \beta$$

folglich $\angle IHC$ des reflectirten Strahls

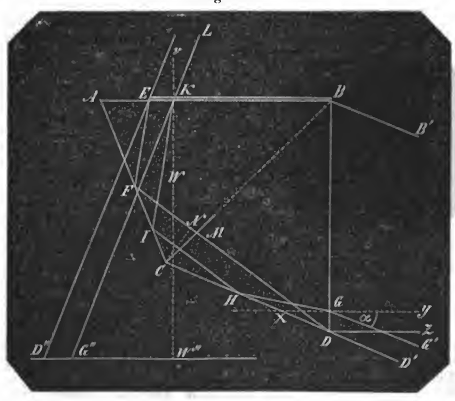
$$HI = 22\frac{1}{2}° - \beta$$

und folglich

$$\angle HIC = 22\frac{1}{2}° + \beta$$

Der Strahl HI reflectirt also nach IK, so dafs $\angle KIA = \angle HIC = 22\frac{1}{2}° + \beta$. Wenn daher vw das Einfallsloth in K ist, so ist $\angle wKI = \beta = \angle HGx$; der Strahl IK bricht also unter dem $\angle vKL = yGG' = \angle \alpha$, und das Auge in Lv sieht den Gegenstand G' unter demselben Winkel, unter welchem es den Gegenstand in G sehen würde. Ein horizontaler Strahl durch G' würde

Fig. 270.



in vw erscheinen, er würde von dem Auge auf die Papierebene nach w'' der Strahl LK nach G'' geworfen werden; man erhält also das Bild von G' in G'' unter dem richtigen Depressionswinkel $G''Kw'' = vKL = yGG'$.

Der Strahl $G'G$ ist unter solchem Depressionswinkel genommen, dafs er in K nicht mehr ins Auge trifft, weil K schon mit Pigment bedeckt ist, und zugleich so, dafs wenn von dem äufsersten Punkt E der Augenöffnung $EF \parallel KI$ gezogen wird, die Parallele aus F mit HI den äufsersten Punkt D der Ebene CD trifft. Zu diesem gebrochenen Strahl DF gehört nur der in $D \parallel$ mit GG' einfallende Strahl $D'D$. Die unter dem Depressionswinkel $\alpha = sDD'$ auf BD fallenden Strahlen sind also die äufsersten, die ins Auge treffen, und sie erscheinen als tiefste Linie des Bildes auf der Papierebene in D'', wenn $ED'' \parallel LG''$ gezogen wird. Höher liegende Punkte wie G' erscheinen dadurch, dafs von ihnen Strahlen unter kleineren Depressionswinkeln auf BD fallen, z. B. von G' auf Punkte zwischen D und G.

Wegen der kleinen Dimension von BD kommt es übrigens gar nicht darauf an, in welcher Höhe von BD ein Strahl einfällt, ob also der Strahl $D'D$ oder $G'G$ oder $B'B$ unter dem Depressionswinkel α der unterste des entfernten Gegenstandes ist, welcher noch auf der Papierebene als Bild erscheint.

Um den gröfstmöglichen Depressionswinkel $sDD' = yGG' = \alpha$ zu bestimmen, hat man den Brechungswinkel desselben $HGx = \beta$, der immer kleiner als $22\frac{1}{2}^\circ$ ist; ferner ist die Breite AE der Durchsehöffnung zu bestimmen, und es sei, wenn $AB = a$ ist, $AE = \frac{1}{n}\,a$.

Nun hat man in dem $\triangle CDF$:

$$CD : CF = \sin CFD : \sin CDF$$
$$= \sin(22\tfrac{1}{2}^\circ + \beta) : \sin(22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta)$$
$$= \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ \cos\beta + \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ \sin\beta : \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ \cos\beta - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ \sin\beta$$

also, da $CD = AC$ ist

$$CA : CF = 1 + \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta : 1 - \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ \cdot tg\,\beta \qquad (1)$$

Zieht man die Diagonale BC und schneidet diese DF in M, so hat man

$$\triangle FAE \sim \triangle FCM$$

daher

$$AF : AE = CF : CM$$

oder

$$AF + CF : CF = AE + CM : CM$$

oder

$$CA : CF = \frac{1}{n}\,a + CM : CM \qquad (2)$$

Fällt man das Loth CN auf DF so ist

$$\angle NDC = 22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta$$

daher

$$\angle NCD = 90^\circ - (22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta) = 67\tfrac{1}{2}^\circ + \beta$$

und da

$$\angle MCD = 67\tfrac{1}{2}^\circ$$

so ist

$$\angle NCM = \beta$$

und

$$CN = CM \cos\beta = CD \sin(22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta)$$

Den Werth von CM in Gl. 2 gesetzt, giebt

$$CA : CF = \frac{1}{n}\,a + CD \cdot \frac{\sin(22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta)}{\cos\beta} : CD \cdot \frac{\sin(22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta)}{\cos\beta}$$

oder

$$CA : CF = \frac{1}{n}\,a + CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta] : CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta]$$

Diese Gl. mit 1 verbunden giebt

$$1 + \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta : 1 - \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta = \frac{1}{n}\,a + CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta] : CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta]$$

woraus durch Addition und Subtraction der Glieder

$$2 : 2 \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta = \frac{1}{n}\,a + 2CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ\, tg\,\beta] : \frac{1}{n}\,a$$

Nach No. 1 ist $CD = 0{,}765 \cdot a$

$$\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = 0{,}3826834$$
$$\cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = 0{,}9238795$$
$$\cot 22\tfrac{1}{2}^\circ = 2{,}4142136$$

Diese Werthe eingesetzt, entsteht:

$$2 : 4{,}8284272 \cdot tg\,\beta = \frac{a}{n} + 0{,}5855056 \cdot a - 1{,}4135356 \cdot a\, tg\,\beta : \frac{1}{n}\,a$$

woraus reducirt und nach β geordnet:

$$tg^2\beta - \left[\frac{1}{1{,}4135356 \cdot n} + \frac{0{,}5855055}{1{,}4135356}\right] tg\,\beta + \frac{2}{6{,}8251537 \cdot n} = 0$$

oder

$$tg^2\beta - \left[\frac{0{,}70746}{n} + 0{,}4142135\right] tg\,\beta + \frac{0{,}293034}{n} = 0$$

hieraus

$$tg\,\beta = + \frac{0{,}35373}{n} + 0{,}2071067 \pm \sqrt{\left(0{,}0428932 - \frac{0{,}146514}{n} + \frac{0{,}125125}{n^2}\right)}$$

Ob das Vorzeichen der Wurzel + oder

$\frac{1}{\,}$ genommen werden mufs, prüft man, indem man für n den höchsten zulässigen Werth = 1 setzt, wobei dann die Durchsehöffnung von A bis B reicht und woraus dann nothwendig für β der Werth $22\frac{1}{2}°$ entstehen mufs.

Man findet für $n = 1$

$$tg\,\beta = 0{,}5608367 \pm 0{,}1466431$$

nun ist aber schon das erste Glied

$$0{,}5608367 = tg\ 29°\ 17'$$

also gröfser als $22\frac{1}{2}°$.

Nimmt man das negative Vorzeichen, so erhält man

$$tg\,\beta = 0{,}4141936$$

es ist aber

$$tg\ 22\tfrac{1}{2}° = 0{,}4142136 = tg\,\beta$$

indem der geringe Unterschied zwischen beiden in der Rechnung mit zu wenigen Decimalen liegt; folglich mufs das negative Vorzeichen genommen werden.

Für $n = 10$ hat man

$$tg\,\beta = 0{,}2424797 - 0{,}1717352 = 0{,}0707445$$

woraus

$$\beta = 4°\ 1\tfrac{1}{2}'$$

Für $n = 5$ erhält man

$$tg\,\beta = 0{,}2778527 - 0{,}1363649 = 0{,}1414878$$

woraus

$$\beta = 8°\ 3'$$

Nun ist

$$sin\ 4°\ 1\tfrac{1}{2}' = 0{,}070\ 1918$$

$$sin\ \alpha = \tfrac{3}{2}\ sin\ 4°\ 1\tfrac{1}{2}' = 0{,}105\ 2877$$

woraus

$$\alpha = 6°\ 2\tfrac{1}{2}'$$

Für $n = 10$, d. h. wenn die Durchsehöffnung $\frac{1}{10}AB$ ist, beträgt also der gröfste Winkel, unter welchem ein unterhalb des Horizonts befindlicher Gegenstand noch aufgenommen werden kann $6°\ 2\frac{1}{2}'$.

$$sin\ 8°\ 3'\ \text{ist} = 0{,}140\ 0372$$

$$sin\ \alpha = \tfrac{3}{2}\ sin\ 8°\ 3' = 0{,}210\ 0558$$

woraus

$$\alpha = 12°\ 7\tfrac{1}{2}'$$

Beträgt also die Durchsehöffnung $\frac{1}{5}AB$, so ist der gröfste Depressionswinkel für eine aufzunehmende Landschaft $12°\ 7\frac{1}{2}'$

5. Den gröfstmöglichen Elevationswinkel, unter welchem ein Gegenstand noch aufzunehmen ist, findet man durch folgende Betrachtung:

Sind LC, BH Einfallslothe auf CD, so ist

$$\angle LCA = 45°$$

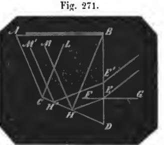
ein Strahl HM, der unter dem $\angle BHM = 45°$ reflectirt wird, läuft mit $AC \mp$, trifft also die Fläche AC nicht mehr, und giebt, wenn er so nahe an C fällt, dafs er bei A ins Auge trifft, ein verkehrtes Bild des Gegenstandes, von dem er ausgeht; ein Winkel $BHM = 45°$ ist also die Grenze des gröfsten Reflectionswinkels, und zu diesem gehört ein Einfallswinkel $EHB = 45°$. Hieraus hat man

$$\angle HED = 67\tfrac{1}{2}°$$

und wenn FG das Einfallsloth durch E auf BD ist,

$$\angle FEH = 22\tfrac{1}{2}°$$

Fig. 271.



zu dem Strahl EH als ein in BD gebrochener Strahl gehört aber ein einfallender Strahl IE in der Richtung, dafs

$$sin\ GEI = \tfrac{3}{2}\ sin\ FEH = \tfrac{3}{2}\ sin\ 22\tfrac{1}{2}° = 0{,}5740251$$

woraus

$$GEI = 35°\ 1\tfrac{1}{2}'$$

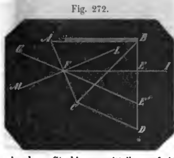
und dieser Winkel ist die Grenze des Elevationswinkels, unter welchem ein Gegenstand noch aufgenommen werden kann. Der Strahl selbst aber liefert dem Auge ein verkehrtes Bild, wie schon erwähnt; denn gesetzt, der reflectirte Strahl HM des gebrochenen Strahls EH träfe in's Auge, so wirft dies den Gegenstand in der Richtung MH auf's Papier; denkt man sich nun von einem über I liegenden Gegenstand I' den Strahl $I'E' \mp IE$, so bricht dieser nach $E'H' \mp EH$ und kommt in der Richtung $H'M'$ in's Auge, dieses wirft das Bild in der Richtung $M'H'$ auf's Papier, und I', ein höherer Gegenstand als I, erscheint auf dem Papier als niedriger gelegen. Daher geben die obersten Punkte des Gegenstandes ein undeutliches, verwischtes Bild.

6. Nun sind noch die Strahlen zu betrachten, die durch BD unmittelbar auf die Fläche AC fallen, die also entweder gebrochen durch AC hindurch gehen und keinen Einflufs auf das in A sichtbare Bild haben, oder einfach reflectirend gegen AB geworfen werden, und ein verkehrtes Bild geben.

Die horizontalen Strahlen wie IE treten ungebrochen in den Glaskörper und treffen die Fläche AC unter dem $\angle LFE = 22\frac{1}{2}°$ mit dem Einfallsloth LM. Der Strahl EF geht also durch den Glaskörper in einer Richtung FG weiter fort, ohne in's Auge zu kommen.

Der unter dem möglich gröfsten Elevationswinkel einfallende und nach *EH* Fig. 271 gebrochene Strahl würde, wenn er näher an *B* einfiele, die Fläche *AC* normal treffen, also wie *LM*, Fig. 272, ungebrochen hindurch gehen. Die von der Horizontale ab aufwärts befindlichen Punkte des Gegenstandes, deren in *BD*

Fig. 272.



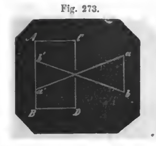
gebrochene Strahlen unmittelbar auf *AC* fallen, thun also dem Bilde keinen Schaden.

Unter den von einem unterhalb der Horizontale befindlichen Punkt herrührenden gebrochenen Strahlen gehen alle durch *AC* gebrochen hindurch, die mit dem Einfallsloth *LF* einen $\angle LFE'$ bilden, der kleiner als $41\frac{3}{4}°$ ist, also einen $\angle EFE' < (41\frac{3}{4}° - 22\frac{1}{2}° = 19\frac{1}{4}°)$.

In No. 4 ist aber gezeigt, dafs wenn die Durchsehöffnung bei $A = \frac{1}{16} AB$ genommen wird, der gröfstmögliche $\angle EFE' = 4° 1\frac{1}{2}'$ ist; bei der Oeffnung $= \frac{1}{8} AB$ kann $\angle EFE'$ höchstens 8° 3' sein, und wenn die Durchsehöffnung die ganze Breite *AB* einnimmt, ist ein $\angle EFE'$ von $22\frac{1}{2}°$ möglich. Demnach thun auch die Strahlen der unterhalb des Horizonts befindlichen Punkte des aufzunehmenden Gegenstandes, deren gebrochene Strahlen unmittelbar auf die Fläche *AC* fallen, dem Bilde bei *A* keinen Schaden.

Camera obscura. Ein von Porta um die Mitte des 16. Jahrhunderts erfundener optischer Apparat, mit welchem Bilder entfernter Gegenstände aufgefangen werden. Es sei *ABCD* ein dunkler Raum, in der Mitte der Wand *CD* befinde sich eine kleine Oeffnung, so werden von dem erleuchteten Gegenstande *ab* durch die Oeffnung auf die dunkle Wand *AB* Lichtstrahlen geworfen, und es entsteht von *ab* das verkehrte Bild *a'b'*. Der Erfindung dieser C. obsc. verdankt die spätere, die C. lucida ihren Namen, wenngleich dieselbe keine Camera ist.

Fig. 273.



Man hat verschiedene Abänderungen dieses einfachen Apparats, die sich darauf beziehen, das auf die dunkle Fläche geworfene Bild nachzuzeichnen; am vollkommensten ist sie für die Erzeugung der sogenannten Lichtbilder, indem das auf einer dunklen Metallfläche erzeugte Bild durch chemische Einwirkung des Lichts fixirt wird. Alle diese Einrichtungen gehören nicht hierher.

2. Dagegen ist folgende Abänderung näher zu betrachten, die man auch Camera clara (helle Kammer) nennt. Zu dieser C. clara wird nämlich der Apparat, wenn man statt der Oeffnung in *CD* eine verschiebbare Sammellinse *C'C"* einlegt, welche die Lichtstrahlen auf einen unter 45° geneigten Spiegel *AI* wirft, von dem sie gegen eine in der Decke befindliche mattgeschliffene Glasplatte *AK* reflectiren, und auf dieser ein richtiges mit Bleistift nachzuzeichnendes Bild hervorbringen. Hierbei mufs die Axe *FB* durch *C* der Linse *C'C"* auf der Hinterwand *AE* genau normal verbleiben, und das Rohr mufs so gestellt werden, dafs *CB* die Brennweite, also *B* der Brennpunkt ist.

In den Art. „Astronomisches Fernrohr" und „Brennglas" ist gezeigt, dafs dann (der Spiegel *AI* fortgedacht) von dem vor der Linse *C'C"* befindlichen Gegenstand auf der Ebene *AE* ein verkehrtes Bild entsteht, der Strahl *FC* auf die Mitte *C* der Linse und normal auf dieselbe treffend geht ungebrochen bis *B* und die von *F* auf andere Punkte der Linse fallenden Strahlen werden ebenfalls nach dem Punkt *B* gebrochen; so der Strahl *FC'* nach *C'B*, der Strahl *F"C"* nach *C"B*, und es entsteht in *B* ein aus sehr vielen Strahlen zusammengesetztes und scharfes Bild des Punktes *F*.

Wird nun der Spiegel eingelegt, so fängt dieser alle nach *B* gerichteten Strahlen auf; so den Strahl *CB* in *b*, den Strahl *C'B* in *b'* und den Strahl *C"B* in *b"*.

Es entsteht also auf dem Spiegel **kein**

Fig. 274.

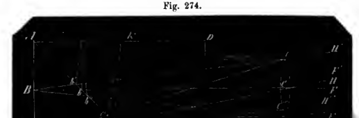


Bild des Punkts *F*, sondern eine aus den sehr vielen von *F* auf die Linse fallenden Strahlen gebildete kleine elliptische Lichtfläche, indem die vor der senkrecht durch das Linsenmittel *C* gerichteten Linie *C'C''* auf die Linse fallenden Strahlen hinter die Ellipsenaxe *b'b''* und die hinter *C'C''* fallenden Strahlen vor *b'b''* auf den Spiegel geworfen werden. Alle diese Strahlen werden aber gegen die Glasplatte *AK* geworfen, und zwar nach nur einem Punkt β, der $\perp AE$ über *b* liegt, so daſs mittelst des Spiegels der Punkt β zum Vertreter des Brennpunkts *B* eingesetzt ist.

Der Strahl *Cb* nämlich reflectirt unter dem $\angle \beta b A = \angle CbI = \angle BAb = \angle EAI = 45°$, folglich ist $\angle Bb\beta = 90°$ und $b\beta \perp AE$, $b\beta = bB$ und $A\beta = AB$.

Der Strahl *C'b'* reflectirt unter einem Winkel an *Ab'*, der = ist dem $\angle C'b'I = \angle Ab'B$; bezeichnet man den Punkt auf *AK*, in welchen der Strahl von *b'* aus die Fläche *AK* trifft anstatt mit β, vorläufig mit β', so ist, da

$$Ab' = Ab'$$
$$\angle BAb' = \angle \beta' Ab'$$
$$\angle Bb'A = \angle \beta' b' A$$
$$\triangle Ab'B \cong \triangle Ab'\beta'$$

folglich

$$A\beta' = AB$$

nun ist

$$A\beta = AB$$

folglich fällt β' mit β zusammen, und so läſst sich von allen übrigen von *C'C''* auf *AI* geworfenen Strahlen erweisen, daſs sie in β zusammentreffen.

Alle übrigen Strahlen von Punkten auſser denen von *F*, welche auf den Mittelpunkt *C* der Linse fallen, gehen ungebrochen fort, und treffen, wenn der Spiegel fortgenommen wird, die Fläche *AE*. So trifft der Strahl *HC* von einem höheren Punkt *H* des Gegenstandes geradlinig in *E*, und alle übrigen von demselben Punkt *H* auf andere Punkte der Linse fallenden Strahlen werden nach dem Punkt *E* als Vereinigungspunkt derselben gebrochen; so der Strahl *H'C'* nach *C'E* und der Strahl *H'''C''* nach *C'''E*. Bei eingelegtem Spiegel *AI* werden alle diese Strahlen wie in *e*, *e'*, *e'''* zu einer kleinen elliptischen Lichtfläche aufgefangen und nach einem einzigen Punkt η der Glasplatte *AK* geworfen, der gegen *AI* die gleiche Lage mit *E* hat, wie dies durch Congruenz der Dreiecke eben so leicht zu erweisen ist, wie oben von den Strahlen aus *b*, *b'*, *b''*.

Ein Gleiches gilt von allen übrigen Punkten des Gegenstandes; die oberen Punkte desselben werden von dem Spiegel unterhalb aufgefangen, und wenn der Zeichner vor *A* sich stellt, auf die Glasplatte wieder nach oben geworfen. Eben so fängt der Spiegel die unteren Punkte des Gegenstandes oberhalb, die rechts befindlichen links, die links befindlichen rechts auf, und wirft diese Punkte alle auf die Glasplatte in der umgekehrten, also in derselben Ordnung, wie sie an dem Gegenstande sich befinden.

Daſs an den Rändern, wie bei *I* und *A* nicht so viele Lichtstrahlen eines Punktes des Gegenstandes aufgefangen werden, als in der Mitte des Spiegels, nämlich in dem Umfange, dessen Gröſse die Linse *C'C''* zur Projection hat, macht jene auf *AK* nach dem Rande hin befindlichen Bilder nur allmählich dunkler aber nicht weniger correct. Das Dreieck *AEI* der Camera kann natürlich ganz fehlen, wenn nur der Spiegel *AI* und die Glasplatte *AK* die gezeichnete Lage zur Linse *C'C''* haben. Nimmt man die Glasplatte *AK* hinweg, sieht durch die Oeffnung *AK* auf den Spiegel, wobei man mit Tüchern um den Kopf das Eindringen von Licht durch *AK* verhindert, so bemerkt man, wie auch

aus dem obigen Vortrag hervorgeht, auf dem Spiegel kein Bild, sondern denselben als eine erleuchtete Fläche, deren Farben von dem Gegenstande abhangen, auf den die Linse gerichtet ist.

Canalwaage, Wasserwaage, ein Nivellir-Instrument, welches an sich unvollkommen ist, und nur da angewendet wird, wo es auf große Genauigkeit nicht ankommt, dann aber recht gute Dienste leistet, als für landwirthschaftliche Zwecke, z. B. behufs der Ebenung eines in den Profilen unregelmäßigen Platzes, zu Anlage von Abzugsgräben u. dgl.

Es besteht aus einem horizontalen Rohr *AB* von starkem Metallblech, mit aufrecht gebogenen Tüllen an beiden Enden, in welche von beiden Seiten offene Glasröhren wasserdicht und senkrecht eingesetzt werden. In den hohlen Raum wird durch

Fig. 275.



die obere Oeffnung eines der beiden Gläser Wasser eingegossen, bis es auf etwa ⅔ der Höhe in den Gläsern steht. Die beiden sichtbaren Wasserspiegel geben die Horizontale *DE* an, und ein Auge in *D* visirt längs *DE* nach einem entfernten Punkt, der uns als in einerlei Horizontalen mit *DE* liegend, markirt wird. Das Instrument hat in der Mitte einen Ansatz *F*, mit dem es während des Visirens auf ein Stativ gesetzt wird.

Die Horizontale *DE* wird um so genauer visirt, je länger *AB* ist, woher die Röhre *AB* unter 2 Fuſs lang nicht genommen werden darf. Wegen der Capillarität ist der Wasserspiegel in einem Glase concav, man visirt also *DE* nur in den Rändern des Spiegels; auch steht der Wasserspiegel in communicirenden ungleich weiten Röhren ungleich hoch, in der engeren Röhre höher, daher man beide Gläser gleich weit und überhaupt nicht zu eng, mindestens ½ Zoll weit nehmen muſs, und das Rohr *AB* ist vor dem Visiren möglichst horizontal, oder vielmehr, die Gläser sind möglichst vertical zu stellen, wobei man ein Bleiloth zu Hülfe nehmen kann. Beim Eingieſsen von Wasser und während des Transports dürfen in dem Rohr *AB* keine Luftblasen zum Verhalten kommen, weil diese eine ungleiche Spannung gegen die beiden Wassersäulen äuſsern und somit eine ungleiche Höhe, also eine unrichtige Horizontale veranlassen können.

Capillaranziehung, Capillarattraction ist die Erscheinung, daſs Flüssigkeiten in engen Röhren durch die Adhäsion deren Wandungen in die Höhe gezogen werden, so daſs sie den Flüssigkeitsspiegel eines damit communicirenden weiteren Gefäſses überragen.

Capillardepression, die Erscheinung, daſs Flüssigkeiten in engen Röhren, von deren Wandungen sie nicht angezogen werden, dieselben also auch nicht benetzen, vermöge der überwiegenden Cohäsion ihrer Massentheilchen unter den Flüssigkeitsspiegel eines mit der Röhre communicirenden weiteren Gefäſses sinken.

Capillarität (capillus, das Haar), Haarröhrchen-Anziehung ist die in den vorigen beiden Art. aufgeführte Erscheinung; die des zweiten Art. eigentlich eine Haarröhrchen-Abstoſsung, wie man sie aber nicht nennt. Die aufsteigende C. hat zum Grunde, daſs die Adhäsion der Röhrenwandungen gegen die denselben nahen Flüssigkeitstheilen gröſser ist als die auf dieselben wirkende Schwerkraft, und die absteigende C., daſs die Cohäsion der Massentheilchen, in Folge welcher diese den möglich kleinsten Raum als Kugel einnehmen wollen und hinabsinken um den darunter befindlichen Theilchen näher zu kommen, die auf die umliegende Flüssigkeit wirkende Schwerkraft überwindet.

Eine bekannte Erscheinung im Leben giebt Zeugniſs von der bedeutenden Wirkung der C.; nämlich daſs ein Waschschwamm, der nur mit der untersten Spitze in Wasser eingesenkt wird und bleibt, sehr bald bis auf die obersten Theilchen hinein das Wasser auffängt; eben so geschieht dies mit Holzkohlen und andern porösen Körpern, indem die Poren enge Röhrchen sind, deren Wandungen das Wasser adhäriren (vergl. Adhäsion am Schluſs).

2. In einer weiten Glasröhre ist der Flüssigkeits-Spiegel in der Mitte eine waagerechte Ebene, an dem Rande gekrümmt; ist die Flüssigkeit benetzend, wie Wasser, so ist die Krümmung hohl und an dem Rande aufsteigend, ist sie nicht benetzend, wie Quecksilber, so ist

die Krümmung erhaben, an dem Rande absteigend. So weit der Spiegel eben ist, so weit wirkt die Schwerkraft allein, und weder von Abhäsion noch von Cohäsion eingeschränkt. Wo aber die Krümmung beginnt, da beginnt auch der Einfluſs der Adhäsion oder der Cohäsion und er steigert sich bis an den Rand, wo er am gröſsten wird. Die Wassermenge, welche gegen den Rand über dem mittleren Wasserspiegel in die Höhe gezogen worden, drückt zugleich die Kraft aus, mit welcher die Adhäsion der Schwere das Gleichgewicht hält, denn um dieselbe Wassermenge ist der Wasserspiegel gesunken. Eben so drückt die Quecksilbermenge, welche längs dem Rande unterhalb des mittleren Spiegels fehlt, die Kraft der Cohäsion gegen die Schwere aus, denn um dieselbe ist der Quecksilberspiegel in der Mitte gestiegen.

Je weiter die Röhre ist, auf desto mehr Flüssigkeitstheile wirkt die Schwere, desto weiter nach dem Rande pflanzt sie sich fort, desto geringer werden die Randwirkungen und desto schmaler die Krümmungen längs derselben. Je enger dagegen die Röhre, je geringer ist die Menge der Flüssigkeitstheilchen, auf welche die Schwere ungehindert wirkt, desto weniger Einfluſs hat sie auf die Randflüssigkeit, und deren Krümmungen werden breiter. Ist eine cylindrische Röhre so eng, daſs die mittlere Ebene in einen Punkt verschwindet, so findet keine alleinige Wirkung der Schwere mehr statt, und die Röhre ist ein **Capillaritätsgefäſs**, welches schon bei $\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser anfängt, so daſs die Röhre wegen dieser noch bedeutenden Weite nicht gut schon **Haarröhrchen** genannt werden kann.

Die Wirkung der Adhäsion, so wie die der Cohäsion auf eine Flüssigkeit im Haarröhrchen, die C., wächst natürlich mit der Länge des Randes, die ihr entgegenwirkende Schwerkraft wächst (oder die C. nimmt ab) mit der Summe der Flüssigkeits-Elemente, auf welche die Schwere wirkt, also mit dem Querschnitt der Röhre; bezeichnen also D, d die Durchmesser zweier Haarröhrchen, C, c deren Capillaritätswirkungen, so ist

$$1)\quad C : c = \pi D : \pi d$$

$$2)\quad C : c = \frac{1}{\frac{\pi}{4}D^2} : \frac{1}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

mithin

$$C : c = \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$$

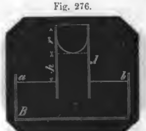
woraus das Gesetz hervorgeht:

die Capillaritäten zweier verschieden weiten Röhren für einerlei Flüssigkeit verhalten sich umgekehrt wie deren Durchmesser.

Dieses Gesetz modificirt sich um etwas nach folgender Betrachtung:

Wird ein Haarröhrchen A in eine in dem weiten Gefäſs B befindliche Flüssigkeit getaucht, welche die Wandung der Röhre benetzt, so macht sich die C. dadurch geltend, daſs die Flüssigkeit der Schwere entgegen in das Röhrchen um eine Höhe h aufsteigt und eine Oberfläche bildet, die näherungsweise als Hohlkugelfläche von dem Halbmesser r der Röhre betrachtet werden kann. Die C. wird also ausgesprochen durch das Gewicht der aufgestiegenen Flüssigkeit; der Raum-Inhalt derselben ist ein Cylinder von der Höhe h und dem Halbmesser $r = \pi r^2 h +$ einem

Fig. 276.



Meniscus von der Höhe r und dem Halbmesser r, der also = ist einem Cylinder von dem Halbmesser r und der Höhe $r = \pi r^3$ — einer Halbkugel von dem Halbmesser $r = \frac{2}{3}\pi r^3$. Der Rauminhalt der aufgezogenen Flüssigkeit ist demnach

$$\pi r^2 h + \pi r^3 - \tfrac{2}{3}\pi r^3 = \pi r^2 (h + \tfrac{1}{3} r)$$

Nennt man das Gewicht der Kubikeinheit γ, so hat man die Capillarität

$$= \pi r^2 (h + \tfrac{1}{3} r)\gamma$$

Bezeichnet man wie oben die Capillarität der Längeneinheit mit c, so beträgt dieselbe für die Röhre vom Halbmesser r (weil deren Wandumfang $= 2\pi r$ ist) $2\pi r c$, und man hat

$$2\pi r c = \pi r^2 (h + \tfrac{1}{3} r)\gamma$$

woraus

$$c = r(h + \tfrac{1}{3} r)\frac{\gamma}{2}$$

oder

$$\frac{2c}{\gamma} = r(h + \tfrac{1}{3} r) \qquad (1)$$

und

$$h = \frac{2c}{\gamma r} - \tfrac{1}{3} r \qquad (2)$$

Für eine Röhre von dem Halbmesser R, der Höhe H, hat man bei derselben Flüssigkeit die Capillarität c

$$c = R(H + \tfrac{1}{3} R) \frac{\gamma}{2}$$

oder

$$\frac{2c}{\gamma} = R(H + \tfrac{1}{3} R) \qquad (3)$$

nnd

$$H = \frac{2c}{\gamma R} - \tfrac{1}{3} R \qquad (4)$$

daher

$$\frac{2c}{\gamma} = R(H + \tfrac{1}{3} R) = r(h + \tfrac{1}{3} r)$$

nnd

$$H : h = \frac{2c}{\gamma R} - \tfrac{1}{3} R : \frac{2c}{\gamma r} - \tfrac{1}{3} r$$

Diese Formeln stimmen anch so genau, als es zn verlangen ist mit den Versnchen: Gay Lussac beobachtete, dafs Wasser in einer Röhre von 1,2944 Millimeter Weite aufstieg anf $23{,}1634^{mm}$ Höhe, in einer Röhre von $1{,}9038^{mm}$ Weite anf $15{,}5861^{mm}$ Höhe. Legt man die erste Beobachtnng zu Grunde, so hat man nach Formel 1

$$\frac{2c}{\gamma} = \frac{1{,}2944}{2} \left[23{,}1634 + \tfrac{1}{3} \frac{1{,}2944}{2} \right] = 15{,}130975$$

Diesen Werth in Formel 4 gesetzt und auf die 2. Beobachtung angewendet giebt

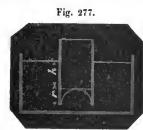
$$H = \frac{15{,}130975}{\tfrac{1}{2} \cdot 1{,}9038} - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}9038 = 15{,}57825^{mm}$$

beobachtet ist $H = 15{,}58610^{mm}$

Differenz $= 0{,}00785^{mm}$

Bei der C.-Depression, wenn nämlich die Röhre tiefer in die Flüssigkeit getancht wird, entsteht ein leerer Ranm

Fig. 277.



abwärts von der Form des vollen Ranms bei der C.-Attraction; es sind also die obigen 4 Formeln anch für die C.-Depression gültig.

Capillaritätsgefäfse s. u. Capillarität.

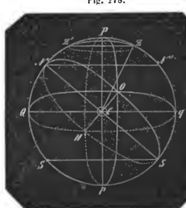
Cardanische Formel, Cardan's Regel, s. Algebraische Gleichung, No. 21, wo sie entwickelt ist, No. 22, wo die Fälle der Anwendbarkeit dargelegt nnd No. 23, wo Anwendnngen derselben gegeben sind.

Cardinalpunkte sind für irgend einen Ort der Erdoberfläche die an der hohlen Himmelskugel befindlichen Pnnkte: Ost, West, Süd, Nord; diejenigen Pnnkte also, welche den Umfang des wahren Horizonts in 4 Qnadranten theilen. Von diesen sind der Ostpnnkt nnd der Westpunkt die Durchschnittspnnkte des Aeqnators, der Nordpunkt und der Südpunkt die des Meridians mit dem Horizont (s. astronomischer Horizont 1 nnd 8).

Die eben gedachten Kreise: der Aeqnator und der Meridian, schneiden den scheinbaren Horizont in 4 über dem wahren Horizont belegenen Pnnkten, die ebenfalls Cardinalpnnkte des scheinbaren Horizonts nnd Ost, West, Süd, Nord heifsen, woher man auch wohl die znm wahren Horizont gehörenden C.-P. wahrer Ost-, West-, Süd-, Nordpnnkt nennt. Besonders sind in der Nautik diese Bezeichnungen gebräuchlich, und man nennt dort die gerade Verbindnngslinie zwischen dem wahren Nord- nnd dem wahren Südpnnkt die wahre Mittagslinie oder die wahre Nord-Südlinie, so wie die gerade Linie zwischen dem wahren Westpunkt die wahre Ost-Westlinie.

Es sei $PQpq$ ein Meridian der Himmelskngel, P der Nordpol, p der Südpol, Pp die Himmels-Axe, Qq die in dem Meridian $PQpq$ belegene Dnrchschnittslinie des Aequators, welche die Axe in dem Mittelpnnkt C schneidet, um den die Erdkngel als kleiner Kreis angedeutet ist. $QOqW$ sei der Aeqnator, $POpW$ der dnrch die Pole normal darauf geführte Kreis, welcher den Aeqnator in den Pnnkten O, W schneidet, so sind die Pnnkte Q, O, q, W, Q 90° von einander entfernt, und jeder andere normal auf die Meridian-Ebene $PQpq$ durch den Mittelpunkt C gelegte Kreis schneidet die beiden Kreise $POpW$ nnd $QOqW$ in OW. So z. B. der Kreis $NOSW$, welcher der wahre Horizont desjenigen Orts o der Erde ist, dessen Zenith z in der normal auf $NOSW$

Fig. 278.



in *C* gerichteten Linie *Cz* und eben so in dem Meridian *PQpq* liegt. Für diesen Ort *o* der Erde ist also *N* der Nordpunkt, *S* der Südpunkt, *O* der Ostpunkt und *W* der Westpunkt.

Für alle übrigen Orte *o* der nördlichen Halbkugel in demselben Meridian, mit Ausnahme wenn *z* in *P*, wenu also *o* im Nordpol der Erde selbst liegt, bleiben *o* und *W* die Durchschnittspunkte der Horizonte mit dem Aequator und *O* bleibt der Ostpunkt, *W* der Westpunkt.

Denkt man sich einen Ort *o* durch seinen Parallelkreis um die Erde geführt, also dessen Zenith *z* um den Parallelkreis *zz'*, so entspricht jedem andern dieser Orte *o* mit seinem zugehörigen *z* ein anderer Horizont, die aber sämmtlich innerhalb der Parallelkreise *NN'* und *SS'* verbleiben, und die Durchschnittspunkte *O* und *W* werden durch alle Punkte des Aequators geführt. Dasselbe geschieht für alle anderen Orte *o* der Erde unter anderer geographischer Breite mit den zugehörigen Zenithen in anderen Parallelkreisen und ebenfalls für alle Orte *o* der südlichen Halbkugel; es ist mithin der Aequator der geometrische Ort der Ost- und Westpunkte für alle Orte der Erdoberfläche.

Liegt *z* und sein Ort *o* in der östlichen Halbkugel (indem man irgend einen Meridian als den ersten feststellt), also *z'* und sein Ort *o'* in demselben Meridian in der westlichen Halbkugel, so ist *W* der Ostpunkt und *O* der Westpunkt für *o'*. Dasselbe findet zwischen allen anderen Orten *o* und *o'* in anderen Parallelkreisen statt, daher ist für Orte in entgegengesetzten Meridianen gegenseitig der Ostpunkt des einen der Westpunkt des anderen.

Fällt *z* in *P* oder *p*, d. h. ist der Ort *o* der Nordpol oder der Südpol der Erde, so decken sich Horizont und Aequator, es sind keine Durchschnittspunkte *O* und *W* vorhanden, deshalb haben die Erdpole weder Ost- noch Westpunkt, oder vielmehr, jeder Punkt des Horizonts ist zugleich Ostpunkt und Westpunkt.

Je nachdem der Ort in der östlichen oder westlichen Halbkugel liegt, je nachdem liegt der Nordpunkt in der westlichen oder östlichen Halbkugel; ist *o* der Nordpol oder der Südpol, so ist jeder Punkt des Horizonts der Nordpunkt und zugleich der Südpunkt, wie er der Ost- und der Westpunkt ist. Liegt *o* mit *z* im Aequator, so ist der Nordpunkt der Nordpol, der Südpunkt der Südpol.

Die den Cardinalpunkten nahen Punkte des Horizonts heifsen **Himmelsgegenden**, sie sind Osten, Westen, Süden und Norden; die beiden Erdpole haben keine Himmelsgegenden.

Cardioide, eine Curve, mufs geschrieben werden: Kardioide, von *καρδία*, das Herz, also herzähnliche Curve, ist ähnlich der Brennlinie Fig. 251.

Cartesianische Wirbel, die vor Newton von Descartes (Cartesius) aufgestellte Theorie, nach welcher jeder Weltkörper von einer feinen Materie umgeben ist, die wirbelartig sich bewegt, den Weltkörper mit sich fortreifst und ihn durch seine Bahn führt. Erwägt man, dafs diese Wirbel den damals schon bekannten Bahnen gemäfs sich bewegen mufsten, und dafs, obgleich die von Newton entdeckten Gesetze der Anziehungskraft durchaus sich bewähren, die Anziehungskraft aber eben so wenig als alle anderen Naturkräfte in ihren physikalischen Eigenschaften zu ergründen ist, so gaben die Cartesischen W., von dem Centralkörper, einer Sonne ausgehend gedacht, eine fafsliche bildliche Anschauung von der primitiven Wirkung der Anziehungskraft, freilich nicht als fortreifsend. sondern vielmehr die Centrifugalkraft einschränkend. (Vgl. Attraction No. 4.)

Cassinische Curve, von Cassini erfunden, in welcher nach ihm die Bewegung der Erde um die Sonne geschehen soll; ist ohne wissenschaftlichen Werth, und auch, wahrscheinlich scherzweise, **Cassinoide** genannt worden.

Cata — und **Caust** — s. Kata = und Kaust.

Centralbewegung ist die Bewegung eines Punkts in geschlossener krummer Linie um einen anderen Punkt; der erste ist der bewegte Punkt, der letzte der Centralpunkt, die krumme Linie die Bahn des bewegten Punkts, die in irgend einem Augenblick der Bewegung zu denkende gerade Verbindungslinie zwischen beiden Punkten der Radius vector (der führende, der leitende Strahl). Bewegt sich der Centralpunkt, so soll der bewegte Punkt dieselbe Bewegung haben, d. h. mit dem Centralpunkt fortschreiten, und er beschreibt dann eine Spirale, die ebenfalls geschlossen ist, wenn der Centralpunkt der bewegte Punkt eines anderen Centralpunkts ist.

In der Wirklichkeit bewegen sich Punkte nicht einzeln, sondern Massen, d. h. Summen mit einander vereinigter Massenpunkte; unter dem Centralpunkt und dem bewegten Punkt werden dann die Mittelpunkte der Massen verstanden, auch sagt man Centralmasse, bewegte Masse, Centralkörper, bewegter Körper.

Centralbewegungen geschehen entweder auf vorgeschriebenen Wegen oder im freien Raum, erstere z. B. beim Schwung einer Masse an einem straffen Faden um dessen Endpunkt, beim Regulator mit Schwungkugeln um eine Axe, letztere in der Bewegung der Weltkörper. Drehende Bewegungen um feste Axen, wie beim Räderwerk, werden unter Centralbewegung nicht verstanden.

Centralbewegungen sind nicht anders denkbar, als dafs der bewegte Punkt mittelst einer Kraft zu einer Bewegung veranlafst worden, die nun geradlinig war und geblieben wäre, wenn nicht ein anderer aufserhalb der Bewegungsrichtung befindlicher fester Punkt eine anziehende Wirkung auf ihn ausgeübt, den Punkt von der ursprünglich geradlinigen Richtung abgelenkt hätte, und der nun denselben durch fortdauernde Einwirkung auf ihn um sich herumführt. Der Centralpunkt heifst deshalb auch Kraftpunkt, Mittelpunkt der Kräfte.

Die Entwickelung der bei solchen Zusammenwirkungen nothwendigen Entstehung einer Rundbewegung um den Centralpunkt ist in dem Art.: Bahn No. 2 bis 5, mit Fig. 164 bis 166, pag. 270 geschehen; in No. 6 mit Fig. 167 sind die dynamischen Gesetze entwickelt, unter welchen die Bahn ein Kreis wird; in dem Art.: Bahn der Weltkörper, mit Fig. 184 bis 190, pag. 289 sind die Curven untersucht, welche bei dem durch Newton entdeckten Attractionsgesetz für die Bahnen der Weltkörper möglich sind, und in dem folgenden Art.: Bahn der Weltkörper, die Ellipse, ist diese Curve als die einzige Bahn wiederkehrender also wirklich in Centralbewegung begriffener Weltkörper speciell abgehandelt.

Es ist nun noch zu erörtern, dafs der Mittelpunkt des Centralkörpers keineswegs auch der Mittelpunkt der Bewegung, der Kraftpunkt ist, sondern dafs dieser in dem Schwerpunkt sämmtlicher zu demselben System gehörenden Massen besteht. Um den einfachsten Fall zu erläutern, hat man in dem Art.: Attraction No. 9, dafs zwei Massen M und m in dem Verhältnifs ihrer Gröfsen auf einander einwirken; bedeutet also E die Masse der Erde, M die Masse des Mondes, so zieht die Erde den Mond mit der Masse E, der Mond die Erde mit der Masse M an. Geschieht nun eine Drehung des Mondes um die Erde, so kann nach dem System der Statik das System zwischen Erde und Mond als Kräfte im freien Raum nur im Gleichgewicht sein, wenn zugleich eine Drehung der Erde um den Mond geschieht, und beide Drehungen sind nur um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider Weltkörper möglich. Ist demnach L die Entfernung zwischen den Mittelpunkten von Erde und Mond, so geschieht die Drehung um einen Punkt C in der Entfernung $CE = l_e$ von der Erde, und und in der Entfernung $CM = l_m$ von dem Monde, dafs:

$$l_e \cdot E = l_m \cdot M$$

woraus

$$l_e = \frac{M}{E} \cdot l_m = \frac{M}{E+M} \cdot L$$

und

$$l_m = \frac{E}{M} \cdot l_e = \frac{E}{E+M} \cdot L$$

Wegen der elliptischen Bewegung des Mondes um die Erde ist die Länge L und mit dieser auch der Punkt C zwischen E und M veränderlich.

Man kann auch durch folgende Betrachtung zu diesem Resultat gelangen: Nach dem Art.: Bahn No. 6, pag. 272 hat man die Geschwindigkeit V einer durch die Schwungkraft P in der Entfernung r vom Mittelpunkt bewegten Masse durch die Formel

$$V^2 = 2gr\frac{P}{m}$$

Der schwingende Mond hat keine andere Schwungkraft P als seine Masse M, mithin ist $\frac{P}{m} = \frac{M}{M} = 1$; und die schwin-

gende Erde hat ebenfalls $P = E$ und $m = E$, folglich $\frac{P}{m} = \frac{E}{E} = 1$; dagegen ist im ersten Fall M die angezogene, E die anziehende Masse, die Beschleunigung g also $= G\frac{M}{E}$ wenn G die Beschleunigungseinheit ist; im zweiten Fall ist E die angezogene Masse, M die anziehende Masse, mithin $g = G\frac{E}{M}$, die Entfernung r ist in beiden Fällen $= L$. Nennt man daher v_e die Geschwindigkeit der Erde, v_m die des Mondes, so hat man

$$v_e{}^2 = 2LG\frac{M}{E}$$

$$v_m{}^2 = 2LG\frac{E}{M}$$

daher

$$v_e{}^2 : v_m{}^2 = 2LG\frac{M}{E} : 2LG\frac{E}{M} = M^2 : E^2$$

oder

$$v_e : v_m = M : E$$

Da aber die Geschwindigkeiten in einerlei System wie deren Hebelsarme sich verhalten, so verhält sich

$$l_e : l_m = M : E$$

also

$$l_e + l_m : \begin{cases} l_e \\ l_m \end{cases} = E + M : \begin{cases} M \\ E \end{cases}$$

da nun $l_e + l_m = L$, so hat man die Längen l_e und l_m wie schon oben gefunden ist.

Um den vorstehenden Satz auf das System zwischen Erde und Mond anzuwenden, hat man die Masse des Mondes zu der der Erde wie

1 : 87,73

die kleinste Entfernung des Mondes von der Erde 48990 geogr. Ml., die gröfste 54670 Ml.; bei 48990 Ml. hat man also die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunkts vom Mittelpunkt der Erde oder

$$l_e = \frac{1}{87,73 + 1} \times 48890 = 552,125 \text{ Ml.}$$

Bei 54670 Ml. Entfernung:

$$l_e = \frac{1}{87,73 + 1} \times 54670 = 616,139 \text{ Ml.}$$

Der Punkt, der mit Erde und Mond in der Ekliptik um die Sonne sich bewegt, ändert also seinen Ort in der Drehaxe zwischen Erde und Mond um eine Länge von 616,139 − 552,125 = 64,014 Ml., und zwar fortdauernd allmälich und in Perioden eines anomalistischen Monats von 27 Tagen 13 Std. 5⅓ Minuten, in welcher Zeit der Mond aus der Erdnähe in denselben Punkt der nächstfolgenden Erdnähe, oder aus Erdferne wieder in die Erdferne gelangt, und in der der Schwerpunkt den Weg von 64,014 Ml. hin und her macht.

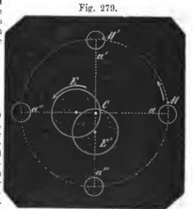
Aufser der Bahn in der Ekliptik macht folglich die Erde noch fortdauernd Seitenbewegungen, die bald nach der Sonne hinwärts, bald von der Sonne abwärts geschehen. Bei 64,014 geogr. Meilen zu 1970,175 preufs. Ruthen beträgt diese Seitenbewegung in der halben Zeit von 13 Tg. 18 Std. 32⅔ Min. = 19832⅔ Min. 126118,78 preufs. Ruthen, also im Mittel per Min. 6,359 Ruthen = 76,308 preufs. Fufs, per Secunde im Mittel 1,2718 preufs. Fufs.

Der Halbmesser der Erde ist 859,5 geogr. Meilen, der Schwerpunkt liegt also noch innerhalb der Erdkugel, und zwar während der Erdnähe des Mondes 307,375 geogr. Ml. und während der Erdferne des Mondes 243,36 geogr. Ml. von der Erdoberfläche nach dem Erdmittel hin.

Während nun der Mond von Abend nach Morgen um den Schwerpunkt C sich dreht, dreht sich die Erde auf der ihm entgegengesetzten Seite um denselben Punkt C, so dafs die Mittelpunkte der Erde und des Mondes mit dem Schwerpunkt C immer in einer geraden Linie verbleiben; wenn z. B. der Mond M die Lage M' erhalten hat, befindet sich die Erde E in der Lage E'.

Der Mond dreht sich bekanntlich um die Erde der Art, dafs er bei einmaligem Umgange zugleich eine vollständige Axendrehung gemacht hat; so z. B. kommt der Punkt a nach und nach in die Lagen a', a'', a''', a. Bei der Erde ist dies nicht der Fall, diese bleibt während der Dre-

Fig. 279.



hung um den Schwerpunkt in allen Punkten und deren gegenseitigen Lagen ∦ mit sich selbst, wenn man von deren in jedesmal 24 Stunden stattfindenden Axendrehung absieht, und die also von der Drehung der Erde um jenen Schwerpunkt *C* ganz unabhängig bleibt.

Eben so hat das ganze Sonnensystem einen Schwerpunkt, der mit jeder veränderten Stellung der Planeten ein anderer ist, der also in jedem Augenblick sich ändert, und um den jedesmal Sonne und Planeten sich drehen. Demnach liegt streng genommen keine einzige Planetenbahn in einer Ebene.

Es dürfte von Interesse sein, diesen Schwerpunkt des Sonnensystems näher zu betrachten: Die kleineren Planeten Vesta, Juno, Ceres, Pallas und die übrigen in der Neuzeit entdeckten sehr kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter haben auf die Aendrung des Schwerpunkts einen nur geringen Einfluſs, und sollen hier unberücksichtigt bleiben, und nur die folgenden Planeten mit ihren Entfernungen L von dem Mittelpunkt der Sonne, die Länge des Sonnenhalbmessers = 1 gesetzt, und deren Massen m, die Masse M der Sonne = 1 gesetzt, kommen in Betracht:

Mercur	$L = 83{,}7$	$m = 1 : 2025810 = 0{,}00000049$
Venus	$L = 156{,}4$	$m = 1 : 401847 = 0{,}00000245$
Erde	$L = 216{,}2$	$m = 1 : 354936 = 0{,}00000282$
Mars	$L = 329{,}4$	$m = 1 : 2680337 = 0{,}00000037$
Jupiter	$L = 1124{,}3$	$m = 1 : 1054 = 0{,}00094877$
Saturn	$L = 2061{,}8$	$m = 1 : 3500 = 0{,}00028572$
Uranus	$L = 4146{,}8$	$m = 1 : 17918 = 0{,}00005581$
	Summe der Planeten-Massen	$= 0{,}00129643$
	Masse der Sonne	$= 1$
	Summe der Masse	$= 1{,}00129643$

Bezieht man die statischen Momente der obigen Massen sämmtlich auf den Mittelpunkt der Sonne, so hat man das Moment:

des Mercur $= \frac{83{,}7}{2025810} = 0{,}0000413$

der Venus $= \frac{156{,}4}{401847} = 0{,}0003832$

der Erde $= \frac{216{,}2}{354936} = 0{,}0006091$

des Mars $= \frac{329{,}4}{2680337} = 0{,}0001229$

des Jupiter $= \frac{1124{,}3}{1054} = 1{,}0666983$

des Saturn $= \frac{2061{,}8}{3500} = 0{,}5890857$

des Uranus $= \frac{4146{,}8}{17918} = 0{,}2314321$

die Summe der Momente $= 1{,}8883726$

das Moment der Sonne ist = Null.

Die gröſste Entfernung vom Mittelpunkt der Sonne hat der Schwerpunkt offenbar, wenn sämmtliche Planeten auf einer Seite der Sonne in einerlei geraden Linie stehen. Alsdann ist

die Summe der Momente der Planetenmassen = 1,8883726

die Summe sämmtlicher Massen in der Entfernung x vom Sonnenmittel diesen Momenten das Gleichgewicht haltend giebt das Moment

$$1{,}00129643 \times x$$

folglich

$$1{,}00129643 \times x = 1{,}8883726$$

woraus die Entfernung des Schwerpunkts *C* vom Sonnenmittel *S* (Fig. 280)

$$x = \frac{1{,}8883726}{1{,}00129643} = 1{,}886$$

also noch 0,886 Halbmesser weit auſserhalb der Sonnenoberfläche liegt der Schwerpunkt, um welchen die Sonne sich dreht.

Fig. 280.



Die geringste Entfernung des Schwerpunkts von der Sonne findet statt, wenn der Jupiter auf der einen Seite, und sämmtliche übrige Planeten auf der an-

deren Seite der Sonne geradlinig ihm gegenüber stehen. Dann ist
das Moment des Jupiter 1,0666983
das Moment d. übrigen Planeten 0,8216743
die Summe der Momente 0,2450240
und man hat die Entfernung x' des Schwerpunkts C vom Sonnenmittel S (Fig. 281)

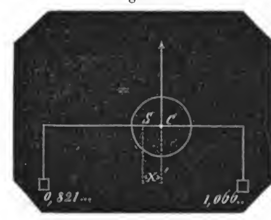
$$0{,}2450\,240 = 1{,}00129643 \times x'$$

woraus

$$x' = \frac{0{,}2450240}{1{,}00129643} = 0{,}2446$$

also im kleinsten Abstande noch gegen ¼ des Sonnenhalbmessers liegt der Schwerpunkt vom Mittel entfernt, um den die Sonne sich dreht.

Fig. 281.



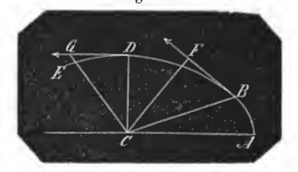
Wenngleich nun die Abstände aller möglichen wirklichen Schwerpunkte bei der Sonne nicht unbedeutend sind, so betrachtet man dennoch mit Kepler die Mittelpunkte der Sonne und der Planeten, als wenn sie die wirklichen Kraftpunkte, der der Sonne für die Planeten, die der Planeten für deren Trabanten wären.

Centrale ist die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise oder Kugeln.

Centralkräfte sind diejenigen Kräfte, durch welche Centralbewegungen geschehen. Man versteht in der Regel darunter die Centripetalkraft, Anziehungskraft, und die Centrifugalkraft, Fliehkraft; mehrere Mathematiker nehmen aber nur die erstgenannte als Centralkraft an, und betrachten das, was die letztere sein soll, als Beharrungszustand einer in Bewegung befindlichen Masse. Der Streit ist interessant und nicht unwichtig, woher folgende kurze Erläuterungen hier Platz finden sollen.

Es befinde sich in dem Punkt C eine Masse M, die als anziehende Kraft eine andere Masse m durch die Bahn $ABDE \ldots A$ führt; diese Masse m hat nun in jedem Punkt ihrer Bahn das Bestreben, nach der erhaltenen Richtung, d h. nach der in diesem Punkt an der Bahn zu denkenden Tangente fortzugehen, so z. B. in B nach der Richtung BF, in D nach der Richtung DG, und sie würde dies thun, wenn die Masse M in C irgend

Fig. 282.



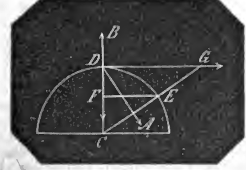
einmal anziehend auf m zu wirken aufhörte. Die Masse M heifst nun die Centripetalkraft (petére, begehren) und das Bestreben der Masse m, nach der Tangente zu entweichen, die Centrifugalkraft; erstere wirkt nach der Richtung des Radius vector (s. Centralbewegung) (BC, DC) letztere nach der Tangente (BF, DG).

Die letztere Kraft wird als Kraft geleugnet, weil das Bestreben der Masse m, nach der Tangente fortzugehen, nur die Wirkung des Beharrungsvermögens ist, und die Bezeichnung Centrifugalkraft wird auch deshalb für unangemessen angesehen, weil da, wo der Radius vector (CB) mit der Tangentialrichtung (BF) einen spitzen Winkel bildet, die ersten Elemente der wirklichen Bewegung nach der Tangente das Centrum nicht fliehen, sondern ihm näher kommen, was bei einer elliptischen Bahn innerhalb zweier Quadranten, nämlich dem von A bis D, und dem diesem Quadrant diametral gegenüber liegenden stattfindet.

Ferner leitet man einen Widerspruch aus der Annahme einer Centrifugalkraft folgendermafsen her: Wenn zwei Kräfte nach DC und DG gerichtet wirken, so können diese zu einer Mittelkraft nach einer Richtung DA zusammengesetzt werden, welche dieselbe Wirkung hat, als die beiden ursprünglichen Kräfte zusammengenommen, es müfste also auch die Bewegung der Masse nach dieser Richtung geschehen, welches aber nicht geschieht.

Die Gröfse der Centrifugalkraft für den Kreis wird entwickelt, indem man vor aussetzt, vermöge der Centripetalkraft falle die Masse m in einer Zeit t um eine Länge DF; da nun m in der Peripherie verbleibt, so ist m während dieser Zeit nach E gelangt, wenn $FE \mathrel{\#} DG$ ist. Zieht

Fig. 283.

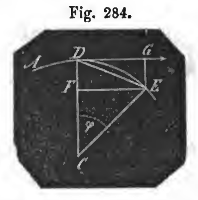



man nun EG durch E, so würde m ohne Mitwirkung der Centripetalkraft in G gekommen sein. Die Centrifugalkraft entfernt also m um EG von C und die Centripetalkraft nähert m aus G nach E, beide Kräfte sind also einander gleich, und heben sich einander auf. Entgegnet wird wiederum, dafs eine nach DC gerichtete Kraft nur aufgehoben werden könne durch eine ihr gleiche nach entgegengesetzter Richtung DB wirkende Kraft; geschehe dies aber, so bewege sich die Masse nach der einzigen noch möglichen Richtung, der Tangente, und nicht im Kreise herum.

Auch mir kommt eine Ansicht über die Centralkräfte zu, und diese ist folgende: die bewegte Masse m strebt nach der Tangente sich zu bewegen nur in Folge des Beharrungsvermögens, d. h. sie strebt die Bewegung, in welcher sie begriffen ist, im nächsten Augenblick mit derselben Geschwindigkeit und nach derselben Richtung fortzusetzen. Kraft aber kann mit Beharrungsvermögen unmittelbar nicht verglichen werden; soll also die Vergleichung stattfinden, so mufs die Gröfse des Beharrungsstandes, die Gröfse der Bewegung, d. h. Masse mal Geschwindigkeit in der ihr zugehörigen Kraft ausgedrückt werden, und diese ist der Impuls, den die Masse in ruhendem Zustande empfangen müfste, um ihre innehabende Geschwindigkeit anzunehmen. Es hindert aber durchaus nichts, bei der Untersuchung der Bewegung einer Masse in irgend einem Punkt D ihrer Bahn anzunehmen, dafs diese Masse in der Zeit vorher geruht und durch augenblicklichen Impuls erst ihre Geschwindigkeit erhalten hat, und dieser Impuls ist die Centrifugalkraft der Masse m in dem Punkt D ihrer Bahn.

Die Gröfse der Centrifugalkraft und der Centripetalkraft wird nun folgender Art entwickelt. Es sei ADE ein Kreisbogen, C dessen Mittelpunkt, der Kraftpunkt, der Ort der Centripetalkraft, in D befinde sich die Masse m, DG sei die Tangente in D, also die Richtung der Centrifugalkraft. Denkt man sich die Masse m in der Zeit t durch die Kraft in C um die Länge DF nach C hin bewegt, so hat die Centrifugalkraft dieselbe Masse m fortdauernd nach DG und in Parallelen mit DG ebenfalls fortgezogen, und m befindet sich endlich in der Linie $FE \parallel DG$. Da nun m in dem Kreisbogen verbleibt, so ist der Punkt E in demselben der Ort von m nach Verlauf der Zeit t, und die Sehne DE der aus den beiden Seitenwegen DF und DG zusammengesetzte Mittelweg. Vollendet man also durch die Linie $EG \parallel DC$ das $\#$, so erhält man DG, den durch die Centrifugalkraft innerhalb der Zeit t veranlafsten Weg der Masse m.

Fig. 284.



Der Weg DE ist aber mit einer nach DC wirkenden veränderlichen Kraft durchlaufen worden, indem die in C befindliche Anziehungskraft anfangs in der Entfernung DC, am Ende in der Entfernung FC auf die Masse m gewirkt hat, und die Wirkungen der Anziehungskräfte umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dem angezogenen Punkt sich verhalten.

Bezeichnet man die Kraft für m in D mit P', für m in F mit P'', so ist also

$$P'' = \frac{DC^2}{FC^2} P'$$

und setzt man

$$DC = r, \; \angle DCE = \varphi$$

so ist

$$P'' = \frac{r^2}{r^2 \cos^2\varphi} P' = \frac{P'}{\cos^2\varphi}$$

die beschleunigenden Kräfte sind

$$\frac{P'}{m} \text{ und } \frac{P'}{m \cos^2\varphi}$$

die Beschleunigungen

$$g\,\frac{P'}{m} \text{ und } g\,\frac{P'}{m \cos^2\varphi}$$

und wenn jede für sich die Zeit t hindurch eingewirkt hätte, die Wege in der Zeit t

$$gt^2 \cdot \frac{P'}{m} \text{ und } gt^2\,\frac{P'}{m \cos^2\varphi}$$

Da die Masse m innerhalb des Kreisumfangs, also in constanter Entfernung r

von C bleibt, so hat man eine constante Kraft P zu finden, die in dem Abstande r verbleibend, die Masse m in der Zeit t durch denselben Weg führt, durch den die veränderlichen Kräfte von der kleinsten P' bis zur gröfsten $\frac{P'}{\cos^2\varphi}$ nach und nach innerhalb der Zeit t einwirkend, die Masse m geführt haben. Diese Kraft P vergleicht sich mit den Kräften P' und P'' wie

$$\frac{P}{r^2} : \frac{P'}{r^2} : \frac{P'}{r^2 \cos^2\varphi} = P : P' : P''$$

und P ist offenbar gröfser als P' und kleiner als P''; deren Beschleunigung ist $g\frac{P}{m}$ und der Weg der Masse m in der Zeit t

$$= gt^2 \frac{P}{m} = DF = \frac{\text{Sehne } DE^2}{2r}$$

Man hat also

$$gt^2 \frac{P'}{m} < \frac{\text{Sehne } DE^2}{2r} < gt^2 \frac{P'}{m \cos^2\varphi}$$

oder

$$P' < \frac{\text{Sehne } DE^2}{2grt^2}\, m < \frac{P'}{\cos^2\varphi}$$

Nun kann aber die Differenz

$$\frac{P'}{\cos^2\varphi} - P' = P'\left[\frac{1}{1-\sin^2\varphi} - 1\right]$$

der äufseren Glieder mit beliebiger Abnahme von φ beliebig klein werden. Kennt man daher eine Constante, gegen welche das Mittelglied $\frac{\text{Sehne } DE^2}{2gr\,t^2}\, m$ mit beliebiger Abnahme von φ ebenfalls beliebig klein werden kann, so ist diese $= P$. Nun sind aber in diesem Mittelgliede Sehne DE und t die einzigen Veränderlichen; mit der Abnahme von φ nimmt t ab, und die Sehne wird dem Kreisbogen beliebig nahe gebracht. Es hat aber die Masse m durch den in D empfangenen Impuls die Länge DG gleichförmig durchlaufen, und wenn die Zeit t der Bewegung sehr klein war, so beetand der Weg in dem an D befindlichen Element der Tangente, welche mit dem des Bogens zusammenfällt; es ist also das erste Bogenelement gleichförmig durchlaufen, und geschieht dies in allen folgenden Bogenelementen, mit welchen die ersten Elemente der folgenden Tangenten ebenfalls zusammenfallen; daher wird der Bogen DE in der Zeit t gleichförmig durchlaufen, und derselbe ist also, wenn man mit v die Geschwindigkeit per Secunde bezeichnet $= vt$, mithin ist die Centripetalkraft

$$P = \frac{v^2 t^2}{2grt^2}\, m = \frac{v^2}{2gr}\, m$$

die Beschleunigung der durch sie bewegten Masse

$$g\frac{P}{m} = \frac{v^2}{2r}$$

und die Geschwindigkeit in der Bahn

$$v = \sqrt{\left(2gr \cdot \frac{P}{m}\right)}$$

Mit der Centripetalkraft P ist nun nicht zugleich die in der Zeit t nach der Tangente den Weg DG erzeugende **Centrifugalkraft** gefunden, wohl aber die in die Richtung CD fallende Seitenkraft derselben. Denn zerlegt man den Weg DG

Fig. 285.

nach den Seitenrichtungen CD und DE, den einzig möglichen, so geschieht dies durch das # $DEGB$. DE ist die Länge des einen, DB die des anderen Seitenweges. Nun ist $DB = EG = DF =$ dem Wege, den die Centripetalkraft veranlafst. Wenn aber durch zwei Kräfte in gleichen Zeiten, gleiche Massen durch gleiche Wege geführt werden, so sind die Kräfte einander gleich, mithin ist die **Centripetalkraft gleich der in dieselbe Richtung fallenden Seitenkraft der Centrifugalkraft**: Oder vielmehr wenn man die nach der Tangente wirkende Kraft allgemein **Tangentialkraft** nennt, so ist deren nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtete Seitenkraft ausschliefslich diejenige, welche in dem System als das Centrum direct fliehende Kraft, als Centrifugalkraft auftritt, und die **Centripetalkraft ist gleich der Centrifugalkraft**.

Beide gleich grofsen Kräfte in einerlei geraden Linie heben sich einander auf, und es bleibt nur die nach der Sehne DE wirkende Kraft übrig, eine Seitenkraft des ursprünglichen Impulses, die wie dieser selbst gleichförmige Bewegung veranlafst.

Beide in der Zeit t zu durchlaufenden Wege DF und DB sind einander gleich und entgegengesetzt; es wird also keiner von beiden durchlaufen, und nur der Weg

durch die Sehne *DE* bleibt übrig, welcher gleichförmig durchlaufen wird. Die Sehne *DE* aber kommt dem Bogen *DE* immer näher, je kleiner φ genommen wird, und kann mit beliebiger Abnahme von φ dem Bogen beliebig nahe gebracht werden, so dafs für die Summe der durchlaufenen sehr kleinen Sehnen die Peripherie des Kreises zu setzen ist. (Vergl. den Art.: Bahn, No. 7, die Entwickelung der Gröfse der Schwungkraft.)

Mit dem Vorstehenden ist nachgewiesen, dafs eine Centrifugalkraft vorhanden ist, und dafs diese zu den Centralkräften gehört.

Centrallinie s. v. w. Centrale.

Centralprojection, die P. eines Gegenstandes auf eine Ebene der Art genommen, dafs sämmtliche von jenem auf diese treffenden geraden Linien nach einem hinter der Ebene befindlichen Punkt gerichtet sind.

Centralpunkt ist jeder Punkt, der als Mittelpunkt eines Systems betrachtet werden kann, wie der Mittelpunkt eines Kreises, einer Kugel, s. a. B. auch Bahn der Weltkörper, Central-Bewegung. Der Punkt, nach welchem alle Linien für eine Centralprojection gerichtet sind, kann auch C. genannt werden.

Centralsonne, eine S., um welche sich ein oder mehrere andere Sonnensysteme bewegen; so ist auch unsre Sonne wahrscheinlich ein Sternsatellit einer nahe der Milchstrafse befindlichen C., und hat zu dieser dieselbe Beziehung wie ein Planet, z. B. unsre Erde, zu unsrer Sonne hat.

Centrifugalkraft ist in dem Art.: Centralbewegung definirt, und die Gröfse derselben entwickelt:

$$P = \frac{v^2}{2gr} M$$

wenn v die Geschwindigkeit der Masse M in der Entfernung r vom Centralpunkt und g die Beschleunigung durch die Schwerkraft = $15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs bedeuten.

Die Beschleunigung einer Kraft P, die eine Masse M im Kreise herumtreibt, ist

$$g \cdot \frac{P}{M} = \frac{v^2}{2r}$$

Beispiel. Jeder Punkt des Erdaequators dreht sich alle 24 Stunden um die Erdaxe, und macht daher einen Weg

in 24 Stunden	von 5400	geogr. Ml.
„ 1 Stunde	„ 225	„	„
„ 1 Minute	„ 3,75	„	„
„ 1 Secunde	„ 0,0625	„	„

Die geogr. Meile hat 23642 preufs. F., mithin ist die Geschwindigkeit eines Punkts im Aequator $v = 0{,}0625 \times 23642 = 1477\frac{5}{8}$ preufs. Fufs.

Die Beschleunigung von P erhält man demnach, da r der Halbmesser der Erde = 859,5 geogr. Ml. ist

$$G = g\frac{P}{M} = \frac{0{,}0625^2 \square \text{Ml.}}{2 \cdot 859{,}5 \text{ Ml.}}$$

$$= \frac{0{,}0625^2}{2 \cdot 859{,}5} \times 23642 \text{ Fufs} = 0{,}053724 \text{ pr. F.}$$

mit welcher jeder Punkt des Aequators in jedem Punkt seiner Bahn das Bestreben hat, in der ersten Secunde senkrecht aufwärts zu steigen.

Die Beschleunigung g der Schwerkraft ist $15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs, die Beschleunigungen also

$$G : g = 0{,}053724 : 15\frac{5}{8}$$

woraus

$$G = \frac{0{,}053724}{15\frac{5}{8}} g = \frac{1}{290{,}83} g$$

Um zu erfahren, wie schnell die Erde um ihre Axe sich drehen müfste, wenn die Centrifugalkraft im Aequator der Schwerkraft gleich werden sollte, hat man die Gleichung:

$$\frac{v^2 \square \text{Meilen}}{2 \cdot 859{,}5 \text{ Ml.}} = \frac{v^2}{2 \cdot 859{,}5} \times 23642 \text{ Fufs} = 15\frac{5}{8} \text{ Fufs}$$

woraus

$$v = \sqrt{\frac{125}{4} \cdot \frac{859{,}5}{23642}} \text{ Ml.} = 1{,}0658 \text{ Meilen.}$$

Die Anzahl der Drehungen der Erde per 24 Stunden müfste also sein

$$\frac{1{,}0658}{0{,}0625} = 17{,}054 \text{ mal}$$

Man konnte auch aus der oben gefundenen Zahl $\frac{1}{290{,}83}$ die $\sqrt[2]{}$ ziehen wo man $\frac{1}{17{,}054}$ erhält.

Bei dieser Geschwindigkeit der Erde würden die Körper am Aequator kein Gewicht haben, sie würden nicht fallen, und zum Steigen wie zum Fallen für einerlei Geschwindigkeit einen gleich grofsen Impuls erfordern. Gegenwärtig beträgt die Länge des Secundenpendels am Aequator 15,054 pariser Fufs; bei 17maliger Schnelligkeit der Erde würde kein Pendel schwingen, die Länge des Secundenpendels an den Polen 15,132 par. Fufs würde dieselbe bleiben.

Wenn Massen um feste Axen sich drehen, so bezeichnet man die daraus hervorgehende C. mit dem Namen Schwungkraft.

Centripetalkraft s. u. Centralkräfte.

Centrirt heifsen Maschinentheile: Wel-

len, Räder, Scheiben u. s. w., wenn deren Axen zugleich deren Drehaxen sind.

Centriwinkel, Winkel am Mittelpunkt, ist der Winkel in einem Kreise, dessen Spitze der Mittelpunkt, und dessen Schenkel Halbmesser sind; sämmtliche Mittelpunktswinkel in einem Kreise sind = 4 rechten Winkeln.

Centrum, Mittelpunkt einer Linie, einer Fläche, eines Körpers, ist derjenige Punkt, um den alle Theile der geometrischen Gröfse entweder gleichmäfsig oder symmetrisch belegen sind.

In den ersten Fall gehören nur die Kreislinie, die Kreisebene und die Kugel, in den zweiten alle übrigen Gröfsen, denen ein Mittelpunkt zukommt, als die Ellipse, deren C. in dem Durchschnittspunkt der grofsen und der kleinen Axe liegt. Jeder Krystall hat einen Mittelpunkt, der zugleich der Durchschnittspunkt und Halbirungspunkt sämmtlicher Axen des Krystalls ist.

Ceres (⚳) Von den zwischen Mars und Jupiter sich bewegenden kleinen Planeten der, welcher zuerst entdeckt worden ist. Es geschah dies im Jahr 1801 von Piazzi in Palermo, und den Namen Ceres erhielt der Planet, weil im Alterthum Ceres die Schutzgöttin Siciliens war. Ceres ist der vierte der oberen Planeten (Mars, Vesta, Juno, Ceres, Pallas...) deren kleinste Entfernung von der Sonne ist 52½ Millionen Meilen, deren gröfste 61¼, deren mittlere gegen 57 Millionen Meilen, deren Entfernung von der Erde 32 bis 82 Millionen Meilen, Neigung deren Bahn gegen die Ekliptik 10° 36′ 55″ und noch im Abnehmen begriffen; deren Excentricität = 0,076738 der halben grofsen Axe, ebenfalls noch im Abnehmen begriffen, deren sidrische Umlaufszeit 4 Jahr 223 Tage 10½ Stunden, deren synodische 1 Jahr 101 Tage 3 Stunden. Der Planet ist mit nebelartiger, hoher Atmosphäre umgeben, welche ungleich erscheint, und bis 650 Meilen im Durchmesser betragen soll, der feste Kern der C. ist von Herschel zu 35 Meilen Durchmesser, später von Schröter zu 352 Meilen festgestellt worden.

Die C. wird als ein noch nicht vollendeter Weltkörper betrachtet; nicht nur die Veränderlichkeit seiner Atmosphäre, sondern auch die verschiedenen Farben, bläulich, röthlich, weifslich, in welchen er zu verschiedenen Zeiten glänzt, läfst schliefsen, dafs das Feste, Flüssige und Luftförmige sich noch nicht geschieden hat. Dasselbe gilt von den andern dreien, Vesta, Juno, Pallas. Man hält diese vier Weltkörper, welche ziemlich gleiche Bahnen und Umlaufszeiten haben, für Trümmer eines einzigen zwischen Mars und Jupiter vorhanden gewesenen Planeten, und es erhält diese Ansicht immer mehr Wahrscheinlichkeit, da später und noch heut immer neue Planetoiden entdeckt werden. die alle mit jenen Vieren in fast einerlei Entfernung von der Sonne sich befinden, und die alle diesen ehemals einzigen Planeten ausgemacht haben können.

Charakteristik Bezeichnung der Eigenthümlichkeit eines Gegenstandes, wodurch dieser von allen übrigen derselben Art unterschieden ist.

Die Ziffern 3 5 7 9 1 sollen nach dem dekadischen System, also zu einer Zahl geschrieben sein, so hat man

0,35791
3,5791
35,791

n. s. w.

Jede der folgenden Zahlen ist die zehnfache der vorstehenden, und dieses Eigenthümliche, dies Charakteristische giebt ihnen das Komma, woher bei Decimalbrüchen das Komma Charakteristik heifst.

Die Zahl 6060695 als briggischer Logarithmus hat den Numerus 40371, derselbe dekadisch geschrieben; allein den wirklichen Werth desselben ergiebt erst die dem Logarithmus voranstehende Ganze, als

0,6060695	hat den num:	4,0371
1,6060695	" " "	40,371
2,6060695	" " "	403,71
0,6060695 − 2	" " "	0,040371

u. s. w.

Deshalb heifst die ganze Zahl des Logarithmus die Charakteristik, Kennziffer, die Decimalen heifsen die Mantisse (Zugabe).

Desgleichen heifst die Constante in der Formel für die Berechnung des Umlaufs der Planeten in Theilen der halben grofsen Axe unserer Ekliptik

$$k = 0.0172021$$

Die Charakteristik unseres Sonnensystems (s. Bahn der Weltkörper, pag. 308). Für jedes andere Sonnensystem würde eine andere Ch. gefunden werden, weil dieselbe nur von der Masse des Centralkörpers (der Sonne) abhängig ist.

Chiliagon (χιλιας, Tausend) ein Vieleck von 1000 Seiten, Tausendeck, das reguläre Ch. hat den Centriwinkel für eine Seite

$$= \frac{360^\circ}{1000} = 21'\ 36''$$

2) den Umfangswinkel zwischen 2 benachbarten Seiten

$$\frac{1000-2}{1000}\cdot 180^\circ = 178^\circ\ 38'\ 24''$$

3) die Seite s für den Halbmesser R des nmbeschriebenen Kreises

$$s = 2R\cdot \sin\frac{180^\circ}{1000} = 2R\ \sin\ 10'\ 48''$$

4) die Seite s' für den Halbmesser des inbeschriebenen Kreises

$$s' = 2r\ tg\frac{180^\circ}{1000} = 2r\ tg\ 10'\ 48''$$

5) der Halbmesser R des nmbeschriebenen Kreises für die Seite s

$$R = \tfrac{1}{2}s\cdot cosec\frac{180^\circ}{1000} = \tfrac{1}{2}s\cdot cosec\ 10'\ 48''$$

6) der Halbmesser r des inbeschriebenen Kreises für die Seite s

$$r = \tfrac{1}{2}s\cdot cotg\frac{180^\circ}{1000} = \tfrac{1}{2}s\cdot cot\ 10'\ 48''$$

7) der Flächeninhalt J

$$= \frac{1000}{2}\cdot R^2 \sin\frac{360^\circ}{1000} = \frac{1000}{2}\cdot R^2 \sin 21'36''$$

$$= 1000r^2\cdot tg\cdot\frac{180^\circ}{1000} = 1000r^2\cdot tg\ 10'48''$$

$$= \frac{1000}{4}s^2\cdot cot\ \frac{180^\circ}{1000} = \frac{1000}{4}s^2\cdot cot\ 10'48''$$

Sinus nnd Tangente für 10′ 48″ sind in der 7ten Decimalstelle noch nicht nnterschieden, wie Vega's Tafeln nachweisen, nnd somit anch nicht cosecante $= \frac{1}{sin}$ nnd cotangente $= \frac{1}{tg}$

Sollen also R von r, s von s' nnterschieden werden, so hat man sin nnd tg aus den nach Potenzen der Bogen fortschreitenden Reihen auf mehr Decimalen zu berechnen.

Man hat

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{2\cdot 3} + \frac{\alpha^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{\alpha^7}{2\cdot3\ldots7} + \ldots$$

hier ist

$$\angle\alpha = 10'\ 48''$$

$$\text{Bogen}\ \alpha = \frac{180^\circ}{1000}\cdot\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{1000}$$

daher

$$\sin\alpha = +\ \frac{\alpha}{1} = +0{,}00314\ 15926\ 536$$

$$-\ \frac{\alpha^3}{2\cdot3} = -0{,}00000\ 00051\ 677$$

$$+\ \frac{\alpha^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} = +0{,}00000\ 00000\ 000\ldots$$

$$\sin\alpha\ = \ 0{,}00314\ 15874\ 859$$

hieraus:

3) $s = 2R\ \sin\alpha = \ 0{,}00628\ 31749\ 718R$

Ferner hat man für die Auffindnng von s'

$$tg\ \alpha = \alpha + \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{3\cdot5}\alpha^5 + \frac{17}{3\cdot3\cdot5\cdot7}\alpha^7 + \ldots$$

Bogen $\alpha = \frac{\pi}{1000}$, daher

$$tg\ \alpha = +\ \alpha = +0{,}00314\ 15926\ 536$$

$$+\ \tfrac{1}{3}\alpha^3 = +0{,}00000\ 00103\ 354$$

$$+\ \frac{2}{3\cdot5}\cdot\alpha^5 = +0{,}00000\ 00000\ 000$$

$$tg\ \alpha\ = \ 0{,}00314\ 16029\ 890$$

hieraus

4) $s' = 2r\ tg\ \alpha = \ 0{,}00628\ 32059\ 780\times r$

Um R zu finden, hat man

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{\alpha} + \tfrac{1}{6}\alpha + \frac{7}{360}\alpha^3 + \frac{31}{15120}\alpha^5 + \ldots$$

Bogen $\alpha = \frac{1}{1000}\pi$, daher

$$cosec\ \alpha = +\frac{1}{\alpha} = \frac{1000}{\pi} = +318{,}30988\ 61837\ 9$$

$$+\tfrac{1}{6}\alpha = +\ 0{,}00052\ 35987\ 8$$

$$+\frac{7}{360}\alpha^3 = +\ 0{,}00000\ 00006\ 0$$

$$cosec\ \alpha\ = \ 318{,}31040\ 97831\ 7$$

hierans

5) $R = \tfrac{1}{2}s\cdot cosec\ \alpha\ = \ 159{,}15520\ 48915\ 8\times s$

Um r zn finden, hat man

$$cot\ \alpha = \frac{1}{\alpha} - \tfrac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3\cdot3\cdot5}\alpha^3 - \frac{2}{3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7}\alpha^5 - \ldots$$

Bogen $\alpha = \frac{1}{1000}\pi$, daher

$$cot\ \alpha = \frac{1}{\alpha} = \frac{1000}{\pi} = +318{,}30988\ 61837\ 9$$

$$-\tfrac{1}{3}\alpha = -\ 0{,}00104\ 71975\ 6$$

$$-\tfrac{1}{45}\alpha^3 = -\ 0{,}00000\ 00006\ 9$$

$$cot\ \alpha\ = \ 318{,}30883\ 89855\ 4$$

hieraus

$$6)\quad r = \tfrac{1}{2} a \cdot cot\ \alpha = 159{,}15441\ 94927\ 7 \times s$$

Für den Flächen-Inhalt J hat man

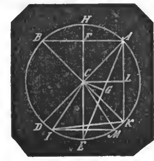
$$J = 1000\, r^2\, tg\ \alpha = 1000 \times 0{,}00314\ 16029\ 89 \cdot r^2$$
$$= 3{,}14160\ 2989 \times r^2$$

oder

$$J = \frac{1000}{4} s^2 \cdot cot\ \alpha = \frac{1000}{4} \cdot 318{,}30883\ 89855\ 4 \times s^2$$
$$= 79577{,}20974\ 638 \times s^2$$

Chorde, Sehne, im Allgemeinen die gerade Verbindungslinie zweier Punkte einer krummen Linie, ohne dafs diese geschnitten wird, besonders aber die gerade Verbindungslinie AB zweier Punkte A, B eines Kreisumfangs. Trifft die Ch. AD

Fig. 286.



durch den Mittelpunkt C, so ist sie ein Durchmesser des Kreises, und theilt die Kreislinie und die Kreisebene in 2 congruente Theile.

2. Zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehören gleiche Sehnen. Denn ist $\angle ACB = \angle ACK$, so werden diese von 4 gleichen Seiten, den Radien, eingeschlossen, $\triangle ACB \cong \triangle ACK$, und folglich $AB = AK$.

Wie das aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Loth die Grundlinie halbirt, so halbirt ein aus dem Mittelpunkt auf eine Sehne gefälltes Loth die Sehne.

Ist $\triangle ABC \cong \triangle AKC$, also $AB = AK$, also $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AK$ nämlich $AF = AL$, so sind auch die Lothe $CF = CL$, d. h. gleiche Sehnen in einem Kreise sind gleich weit vom Mittelpunkt entfernt und gegenseitig.

Die Aufgabe: in einem Kreise eine Sehne von gegebener Länge a zu verzeichnen, in der oder in deren Richtung zugleich ein gegebener Punkt A liegt, ist demnach zu lösen, dafs man von einem beliebigen Punkt der Peripherie aus eine Sehne von der Länge a einträgt, vom Mittelpunkt ein Loth auf dieselbe fällt, mit diesem als Halbmesser einen concentrischen Kreis beschreibt, und durch den Punkt A an diesen Kreis eine Tangente zieht, dessen Theil zwischen den Durchschnittspunkten der äufseren Peripherie die verlangte Sehne ist.

Sobald a nicht = dem Durchmesser d des Kreises ist, giebt es 2 gleiche Sehnen a, für $a > d$ und für $a <$ als die kleinst mögliche Sehne, nämlich die auf der geraden Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt und einem innerhalb des Kreises liegenden Punkt A' normale Sehne, ist die Aufgabe unmöglich.

3. Sind CF, CG Lothe auf AB, AE, und ist $CF > CG$, so ist in den beiden rechtwinkligen Dreiecken ACF und ACG auch $AF < AG$ und somit $AB < AE$ d. h. je kleiner die Sehnen in einem Kreise sind, desto weiter sind sie vom Mittelpunkt entfernt.

4. Sind die Sehnen AB und JM ‡, so sind die Bogen BJ und AM, welche sie abschneiden, einander gleich. Denn die Normalen vom Mittelpunkt auf beiden Sehnen liegen in einerlei Durchmesser EH. Da nun

$$\angle HCB = \angle HCA$$
$$\angle ECJ = \angle ECM$$

so ist auch $\angle BCJ = \angle ACK$ woraus Bogen BJ = Bogen AM.

5. Zwei Sehnen, die in einem Punkt der Peripherie zusammentreffen, bilden dort einen Peripheriewinkel, Umfangswinkel, wie die Sehnen BA und EA in A den Peripherie-$\angle ABE$; auch $\angle BAC$, $\angle JMC$ sind Peripheriewinkel.

Der Peripheriewinkel ist halb so grofs, als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriwinkel. $\angle BAE = \frac{1}{2} \angle BCE$.

Denn zieht man AD durch C, so sind als Aufsenwinkel der Dreiecke BAC und EAC

$$\angle BCD = \angle CAB + \angle CBA = 2 \angle CAB$$

und $\angle ECD = \angle CAE + \angle CEA = 2 \angle CAE$

also $\angle BCE = \angle BAE$

oder $\frac{1}{2} \angle BCE = \angle BAE$

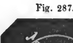
Daher sind Peripheriewinkel zu einer

lel oder gleichen Sehnen desselben Kreises einander gleich, zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Sehnen, zu gleichen Sehnen 2 Paare gleicher Peripheriewinkel, und die zu einer Sehne gehörenden entgegengesetzt liegenden Peripheriewinkel ergänzen sich einander zu 2 rechten Winkeln.

Die Aufgabe: durch einen in der Ebene eines Kreises gegebenen Punkt A eine gerade Linie zu verzeichnen, welche in dem Kreise eine Sehne bildet, die einem gegebenen Peripheriewinkel α zugehört, ist demnach zu lösen, dafs man an irgend einem Punkt des Kreisumfangs den gegebenen $\angle \alpha$ zeichnet, die Endpunkte dessen Schenkel zur Sehne verbindet, vom Mittelpunkt auf diese eine Normale fällt, mit dieser als Halbmesser einen concentrischen Kreis beschreibt, und durch A an diesen eine Tangente zieht. Wie bei der Aufgabe No. 2 entstehen hier zwei Sehnen; ist der Punkt A innerhalb des später zu construirenden concentrischen Kreises gegeben, so ist die Aufgabe unmöglich, denn jeder durch A gezogenen Sehne gehört ein gröfserer Peripheriewinkel zu, als der gegebene α.

6. Schneiden sich zwei Sehnen AB, DE innerhalb des Kreises, so ist jeder der von ihnen gebildeten Winkel = der

Fig. 287.





Summe derjenigen beiden Peripherinwinkel, welche auf den beiden zwischen den Sehnen liegenden Bogen stehen, z. B.

$$\alpha = \beta + \gamma$$

Denn α als Aufsenwinkel $= \angle \gamma + \delta$, δ aber $= \beta$, weil β und δ auf einerlei Bogen AD stehen.

Schneiden sich die Sehnen aufserhalb des Kreises, so ist der von ihnen gebildete $\angle \alpha =$ der Differenz beider auf den zwischen den Sehnen befindlichen Bogen stehenden Peripheriewinkel γ und β, nämlich $\alpha = \gamma - \beta$.

Fig. 288.

7. Schneiden sich zwei Sehnen AB, DE normal, und man zieht die 4 Halbmesser nach deren Endpunkten, so ergänzen sich die gegenüberliegenden Centriwinkel gegenseitig zu 2 Rechten.

$\angle DCA + BCE = \angle BCD + \angle ACE = 2R$

Fig. 289.



Denn zieht man die Sehne AE, so ist

$\angle DCA = 2 \angle DEA = 2 \angle FEA$

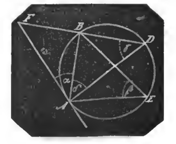
$\angle BCE = 2 \angle BAE = 2 \angle FAE$

$\angle DCA + \angle BCE = 2(\angle FEA + \angle FAE)$
$= 2 \angle AFE = 2R$

8. Der Winkel α, den eine Tangente AF des Kreises in ihrem Berührungspunkt A mit einer Sehne AB bildet, ist = dem Peripheriewinkel β in dem gegenüberliegenden Kreisabschnitt $BDEA$.



Fig. 290.



Denn zieht man den Durchmesser AD und die Sehne BD, so ist

$$\angle \alpha + \delta = R$$

auch $\quad \angle ABD = R$

also $\quad \angle \delta + \gamma = R$

folglich $\quad \alpha = \gamma$

γ aber $= \beta$, weil beide auf demselben Bogen AB stehen, daher $\alpha = \beta$.

Wenn durch den Berührungspunkt F zweier Kreise mit einander 2 gerade Linien AB, DE bis zu deren Umfängen gezogen werden, so sind die beiden Sehnen BD, AE, welche die Durchschnittspunkte mit einander verbinden, einander parallel.

Denn zieht man die Tangente GH durch F, so ist nach No. 8

$$\angle GFB = \angle BDF$$

ebenso $\quad \angle AFH = \angle AEF$

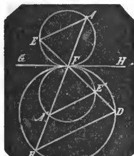
aber $\quad \angle GFB = \angle AFH$ als Scheitel$\angle$

daher $\quad \angle BDF = \angle AEF$

ebenso $\quad \angle DBF = \angle EAF$

woher $\quad BD \nparallel AE$

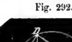
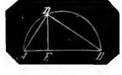
Fig. 291.



Dasselbe ergiebt sich, wenn die beiden Kreise innerhalb sich berühren, wo dann E in E', A in A' fällt und $A'E' \nparallel BD$.

10. Ist AB ein Durchmesser, DE normal darauf, so sind die Dreiecke ADE, DBE und ABD einander ähnlich, und es folgt daraus

Fig. 292.

$$AE : DE = DE : BE \qquad (1)$$

oder

$$DE^2 = AE \cdot BE \qquad (2)$$

ferner

$$AE : AD = AD : AB \qquad (3)$$

oder

$$AD^2 = AE \cdot AB \qquad (4)$$

ebenso

$$BD^2 = BE \cdot AB \qquad (5)$$

Aus beiden letzten Gleichungen hat man

$$AE \cdot AB : BE \cdot AB = AD^2 : BD^2$$

und es folgt noch

$$AE : BE = AD^2 : BD^2 \qquad (6)$$

11. Schneiden sich zwei Sehnen, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne mit dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen gleich grofs.

Denn da (Fig. 287 und Fig. 288)

$$\angle \beta = \angle \delta$$

so ist

$$\triangle AEF \sim \triangle DBF$$

folglich

$$AF : EF = DF : BF$$

woraus

$$AF \cdot BF = DF \cdot EF$$

Schneidet eine Tangente (Fig. 290) AF eine verlängerte Sehne DB in F, so ist das Quadrat der Tangente = dem Rectangel aus den Abschnitten der Sehne.

Denn da $\quad \angle F = \angle F$

$$\angle \alpha = \angle \gamma$$

so ist $\quad \triangle FAB \sim \triangle FDA$

woraus

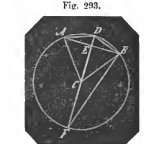
$$AF : BF = DF : AF$$

oder

$$AF^2 = BF \cdot DF.$$

12. Es sei der Halbmesser $BC = AC = r$, eine Sehne $AB = a$, $AD = BD$ die zu dem

Fig. 293.



halben Bogen gehörende Sehne $= b$. Nennt man den Abschnitt $DE = x$, so ist $CE = r - x$, $AE = BE = \frac{a}{2}$ und man hat

$$x : b = b : 2r$$

woraus

$$x = \frac{b^2}{2r}$$

Es ist aber

$$x^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

oder

$$\frac{b^4}{4r^2} = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

woraus

$$b^4 - 4b^2r^2 + a^2r^2 = 0$$

die allgemeine Gleichung zwischen 2 Sehnen, von denen die eine zu dem halben Bogen oder Centriwinkel der anderen gehört.

Man erhält aus derselben

$$\text{I.} \quad a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{2r^2 \pm r\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

und da b als $\sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$, nämlich als Seite des regulären Vierecks im Kreise das Maximum ist, wobei nämlich

$$r\sqrt{4r^2 - a^2} = 0$$

also $a = 2r$ wird, so kann nur das Vorzeichen – gelten, und es ist

$$\text{II.} \quad b = \sqrt{2r - 4r\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$\text{III.} \quad r = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

Die Formeln I und II geben das Mittel, die Seite eines regulären n-Ecks algebraisch auszudrücken, wenn die Seite des $2n$-Ecks oder die des $\frac{n}{2}$-Ecks gegeben ist. Z. B. wird synthetisch bewiesen, dafs die Seite des regulären Sechsecks im Kreise $= r$ ist.

Aus Formel I erhält man demnach die Seite des regulären Dreiecks, wenn man r für b setzt:

$$a = \frac{r}{r}\sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$$

und aus Formel II erhält man die Seite des regulären Zwölfsecks, wenn man r für a setzt:

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2}} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{3}}$$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

aus diesem die Seite des Vierundzwanzigecks u. s. w.

13. Setzt man $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$, so hat man, wenn man DC bis F verlängert, und BF zieht, $\angle DBF = 90°$ folglich

$$BD = b = 2r \sin F = 2r \sin\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

ebenso

$$a = 2r \sin \alpha = 4r \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

mithin

$$\frac{a}{b} = 2\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

woraus

$$a = 2b\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (4)$$

$$b = \frac{a}{2}\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad (5)$$

was auch beides aus der Figur unmittelbar entnommen werden kann, weil

$$\angle DAB = \angle DBA = \frac{\alpha}{2}$$

Aus diesen 5 Formeln sind die Seiten der regulären Vielecke im Kreis trigonometrisch zu finden. Aus Formel I und II hat man dieselben für den Radius $= r$, z. B. für den Halbmesser $= 1$

Die Seite a

des Vierecks $= 2 \cdot \sin 45° = 1{,}4142136$

„ Achtecks $= 2 \cdot \sin 22\tfrac{1}{2}° = 0{,}7653668$

„ Sechsechs $= 2 \cdot \sin 30° = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$

Chronologie ist die Wissenschaft von der Abmessung, Eintheilung und Vergleichung der Zeit bei verschiedenen Völkern und zu verschiedenen Zeitaltern.

Die Natur hat uns Erdbewohnern zwei constante Zeitmafsstäbe gegeben: Die Zeit, in welcher die Erde eine vollständige Umdrehung um ihre Axe macht und die Zeit, in welcher die Erde eine vollständige Umdrehung in der Ekliptik um die Sonne macht. Der erste Zeitabschnitt ist der Tag, der zweite das Jahr; aber beide sind mit einander incommensurabel, und dieser Umstand bildet den wesentlichsten Grund für die Schwierigkeiten, welche Zeitmessungen darbieten. Das Jahr, nämlich die Zeit, in welcher die Erde in ihrer Bahn genau 360° beschreibt, enthält zwischen 336 und 367 Tage, und zwar 366,25638 … Tage, welches in Unterabtheilungen 366 Tage 6 Stunden 9 Minuten und etwa 11 Secunden beträgt.

2. Aufser der eben gedachten Schwierigkeit kommt dazu, dafs diese beiden constanten Maafsstäbe für das bürgerliche Leben unmittelbar nicht anzuwenden sind; die eben gedachten Zeiten sind Sternzeit, der Mensch bedarf aber der Sonnenzeit, und in dem Art. Bogenmaafs, pag. 389 mit Fig. 231 wird nachgewiesen, dafs das Sternjahr mit dem ihm gleich grofsen Sonnenjahr genau einen Sonnentag weniger enthält als Sterntage, demnach würde das Jahr 365,25638 Sonnentage enthalten.

3. Aber auch dieses Jahr ist für den bürgerlichen Bedarf nicht anwendbar: Es ist durchaus erforderlich, dafs nach Verlauf eines Jahres die Sonne genau denselben Stand zur Erde einnehme, den sie im Augenblick des begonnenen Jahres

inne hatte. Ein Jahr hat also zu dauern von dem Angenblick an, wo die Erde in dem Frühlingspunkt steht, bis zum Wiedereintritt derselben in den Frühlingspunkt, oder von Herbst- zu Herbstpunkt, oder von Winter- zu Winterpunkt, oder von Sommer- zu Sommerpunkt.

Frühlings- nnd Herbstpnnkt sind nnn die Durchschnittspunkte der Ekliptik mit der Aequatorebene; diese bleibt unverrückbar, die Ekliptik dagegen macht eine kleine Bewegnng von Ost nach West, welche jährlich 50,1 Bogensecunden beträgt, nm welche sie die Erde bei deren jährlichem Umlauf in der Ekliptik entgegenkommt, so dafs in dem für das bürgerliche Leben allein anwendbaren Jahr die Erde 50,1 Secunden weniger als 360 Grad zurücklegt, welches an Zeit 20 Minuten 20,4 Secnnden = 0,014125 Tage weniger beträgt als die obigen 365,25638 Tage (s. astronomisches Jahr, pag. 148). Dieses der bürgerlichen Zeitrechnung zu Grunde liegende **tropische Jahr** hat also 365,242255 Sonnentage = 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und etwa 51 Secunden Sonnenzeit und 366,242255 Sterntage = 366 Tage 5 Stunden 48 Miunten nnd etwa 51 Secunden Sternzeit.

Demnach ist

ein Sonnentag $= \frac{366,242255}{365,242255} = 1,002738$ Sterntage = 24 Stnnden 3 Minnten 56,5632 Sec. Sternzeit

eine Sonnenstunde $= \frac{366,242255}{365,242255} = 1,002738$ Sternstunden = 1 Std. 9,8568 Sec. Sternzeit

eine Sonnenminute $= \frac{366,242255}{365,242255} = 1,002738$ Sternmin. = 1 Min. 9,8568 Terzien Sternzeit.

4. Diesem dem bürgerlichen Jahr (s. d. Art. pag. 442) zu Grunde liegenden tropischen Jahr hat aber die Natur wiedernm nicht constante Tage als Unterabtheilungen gegeben: jeder (wahre) Sonnentag ist an Länge dem ihm vorangegangenen und dem ihm nachfolgenden Tage ungleich, nnd so sind es auch deren Stunden, so dafs die Stunde, der genau 24ste Theil eines Tages verschieden ist von der Stunde des vorangegangenen nnd von der des nachfolgenden Tages, desgleichen die Minnte nnd die Secunde, während alle Sterntage, Sternstnnden, Sternminuten dieselben sind und bleiben.

Die Verschiedenheit der Sonnenzeit liegt darin, dafs die Erde mit verschiedenen Geschwindigkeiten die Ekliptik durchläuft. Im Perihel bewegt sich die Erde am schnellsten, im Aphel am langsamsten; auf dem Wege vom Perihel nach dem Aphel hin immer langsamer, vom Aphel nach dem Perihel hin immer schneller.

Fig. 294.

Es sei *BAD* ein Theil der Ekliptik, *S* der Stand der Sonne. Ist *A* das Aphel, *AA'* der Bogen, den die Erde in einem Sonnentage durchläuft, so würde dieselbe einen gröfseren Bogen *AA''* durchlaufen, wenn *A* das Perihel wäre. In *A* hat der Pnnkt *a* der Erdoberfläche Mittag, in *A'* hat *b'*, in *A''* hat *b''* Mittag, indem die Radien *ca*, *cb'*, *cb''* nach der Sonne *S* hingerichtet sind. In *A'* hat der Punkt *a* eine volle Umdrehnng bis *a'* um die Erdaxe + dem Bogen *a'b'* durchlaufen; in *A''* hat *a* eine volle Umdrehung bis *a''* nm die Erdaxe + dem Bogen *a''b''* durchlaufen. Da nun die Zeit der Umdrehung der Erde nm ihre Axe (von *a* bis *a'* oder *a''*), der Sterntag constant ist, Bogen *a''b''* > Bogen *a'b'* so ist der Sonnentag von *A* bis *A'* kleiner als der von *A* bis *A''*.

Ueberhanpt nehmen die Sonnentage mit ihren 24 Sonnenstnnden immer mehr ab, je mehr die Erde vom Perihel nach dem Aphel hin sich bewegt, nnd immer mehr zu, je näher die Erde wieder dem Perihel

kommt. Für nns, die Bewohner der nördlichen Halbkugel ist Winter, wenn die Erde in der Nähe des Perihels, und Sommer, wenn sie in der Nähe des Aphels sich befindet; im Winter haben wir also längere, im Sommer kürzere Tage, Stunden, Minuten und Secunden. Der Unterschied zwischen dem längsten und dem kürzesten dieser Tage beträgt gegen vier Minuten.

5. Solche Verschiedenheit darf aber in der Zeit für den bürgerlichen Verkehr nicht vorkommen: die Tage und deren Unterabtheilungen müssen von Anfang bis Ende des Jahres einerlei bleiben. Aus diesem Grunde denkt man sich neben der wirklichen Erde von ungleichförmiger Bewegung eine zweite Erde von gleichförmiger Bewegung in der Ekliptik, oder wie man zu sagen pflegt, neben der wirklichen Sonne von (scheinbar) ungleichförmiger Bewegung eine zweite von (scheinbar) gleichförmiger Bewegung am Himmel, eine nicht vorhandene **mittlere Sonne**, welche die gleichmäfsige Zeit, die **mittlere Sonnenzeit** bestimmt, während die erste, die **wahre Sonne**, **wahre Sonnenzeit** angiebt, und indem beide Sonnen in einerlei Zeit, nämlich in einem Jahr, die Ekliptik (scheinbar) durchlaufen.

Der Art.: Absiden, pag. 15 mit Fig. 17 zeigt, dafs die halbe Ekliptik vom Perihel P über den Frühlingspunkt F nach dem Aphel A in einerlei Zeit mit der anderen halben Ekliptik von A über den Herbstpunkt H nach P von der Erde zurückgelegt wird. In P ist die Geschwindigkeit der Erde am gröfsten, in A am geringsten; die Erde bedarf also einer längeren Zeit zu Durchlaufung der halben Ellipse FAH als zu der anderen Hälfte HPF. Hieraus geht nothwendig hervor, dafs wenn beide Sonnen in ihren Umläufen jährlich übereinstimmen sollen, nur die Punkte P und A, das Perihel und das Aphel es sein können, in welchen beide Sonnen, die wahre und die mittlere, in der Ekliptik zusammentreffen, und dafs beide in allen anderen Punkten derselben auseinanderstehen.

Die wahre Sonne S läuft von P bis F schneller als die mittlere Sonne S'; ist S in F, so ist S' noch vor F; von F ab läuft S langsamer als S' und S' holt S in A ein. Von hier ab geht S langsamer als S'; S bleibt zurück und S' trifft früher in H ein als S, dagegen wird S' von S in P wieder eingeholt.

6 Die mittlere Sonne durchläuft nun die Ekliptik gleichförmig; allein die gleich weit von einander entfernten Punkte der **Ekliptik** sind es nicht, welche Tag für Tag culminiren müssen, um gleich grofse mittlere Tage zu geben, sondern die Punkte im **Aequator**, der sich fortdauernd um die Erdaxe gleichförmig umdreht, weil dessen Ebene normal der Erdaxe ist und verbleibt, während die Ekliptik ihn und die Erdaxe schief durchschneidet. Dafs aber mit Punkten von gleichweiten Abständen in der Ekliptik nicht zugleich gleich weit von einander entfernte Punkte im Aequator culminiren, geht aus folgender Betrachtung hervor:

Es sei QQ' der Aequator, EE' die Ekliptik, beide schneiden sich im Frühlingspunkt F, $\angle e (= 23\frac{1}{2}°)$ sei die Schiefe der

Fig. 295.

Ekliptik $FA = AB = BC =$ u. s. w. seien die gleich grofsen Wege, welche die mittlere Sonne in den aufeinander folgenden Tagen zurücklegt, so sind, wenn man die sphärischen Projectionen der Punkte A, B, C... auf den Aequator nimmt, wenn man also die Bogen AA', BB', CC'... normal auf QQ' fällt, F, A', B', C'... die Punkte im Aequator, welche mit den Punkten F, A, B, C... zugleich culminiren.

Nun ist

$$tg\ FA' = tg\ FA \cdot cos\ a$$
$$tg\ FB' = tg\ FB \cdot cos\ c$$
$$tg\ FC' = tg\ FC \cdot cos\ e$$

u. s. w.

Setzt man $FA = AB = AC \ldots = c$

$FA' = w_1$; $A'B' = w_2$; $B'C' = w_3$ ... w_n

so hat man

$$w_1 = tg\ c \cdot cos\ a$$
$$w_2 = (tg\ 2c - tg\ c) \cdot cos\ a$$
$$w_3 = (tg\ 3c - tg\ 2c) \cdot cos\ e$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$w_n = [tg (nc) - tg (n-1)c)]\ cos\ c$$

Nun ist

$$tg\ \alpha - tg\ \beta = \frac{sin\ (\alpha - \beta)}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta}$$

folglich

$$tg\ 2c - tg\ c = \frac{sin\ c}{cos\ 2c \cdot cos\ c}$$

$$tg\ 3c - tg\ 2c = \frac{sin\ c}{cos\ 3c \cdot cos\ 2c}$$

. . . .

$$tg\ nc - tg(n-1)c = \frac{sin\ c}{cos\ nc \cdot cos(n-1)c}$$

hieraus

$$w_1 = tg\ c \cdot cos\ e$$

$$w_2 = \frac{sin\ c}{cos\ 2c \cdot cos\ c}\ cos\ e = \frac{1}{cos\ 2c} w_1$$

$$w_3 = \frac{sin\ c}{cos\ 3c \cdot cos\ 2c}\ cos\ e = \frac{cos\ c}{cos\ 3c} w_2$$

$$w_4 = \frac{sin\ c}{cos\ 4c \cdot cos\ 3c}\ cos\ e = \frac{cos\ 2c}{cos\ 4c} w_3$$

. . . .

$$w_n = \frac{cos\ (n-2)c}{cos\ nc} w_{n-1}$$

Wendet man die Formel an:

$$cos\ (\alpha+\beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha \cdot sin\ \beta$$

schreibt in die Formeln für w_1; w_2; w_3 ... w_n von w_3 an bis w_n für α nach und nach die Werthe c, $2c$, $3c$, ... $(n-2)c$ für β immer den Werth $2c$ und dividirt jedesmal Zähler und Nenner durch den Zähler, so erhält man

$$w_1 = w_1$$

$$w_2 = \frac{1}{cos\ 2c} w_1$$

$$w_3 = \frac{1}{cos\ 2c - sin\ 2c\ tg\ c} w_2$$

$$w_4 = \frac{1}{cos\ 2c - sin\ 2c \cdot tg\ 2c} w_3$$

$$w_5 = \frac{1}{ces\ 2c - sin\ 2c \cdot tg\ 3c} w_4$$

. . . .

$$w_n = \frac{1}{cos\ 2c - sin\ 2c \cdot tg(n-2)c} w_{n-1}$$

Da nun *cos* ein ächter Bruch ist, so ist $w_2 > w_1$; In w_3 ist der Nenner kleiner als in w_2, daher ist $w_3 > w$, und da die Tangenten in allen folgenden Ausdrücken wachsen, die Subtrahenden der Nenner also immer gröfser, folglich die Nenner selbst immer kleiner werden, so ist jeder folgende Weg der Sonne im Aequator immer gröfser als der in gleicher Zeit zuvor zurückgelegte Weg derselben.

7. Wenn also die ad 5 und 6 gedachte mittlere Sonne *S'* die Ekliptik gleichförmig durchläuft, so durchlaufen deren Projectionen den Aequator ungleichförmig, und es ist auch diese Sonne zur Zeitbestimmung nicht anwendbar. Nur eine eingebildete zweite, eine dritte Sonne *S"* welche die Ekliptik zwar ungleichförmig, aber so durchläuft, dafs deren Projectionen auf den Aequator in gleichen auf einander folgenden Zeiten gleich weit von einander abstehen, oder was dasselbe ist, eine Sonne *S"*, die den Aequator gleichförmig durchläuft, ist es, welche die Zeit bestimmen kann.

Geht man auf die Formel zu Fig. 295 zurück

$$tg\ FA' = tg\ FA\ cos\ e$$

so ist für $FA = 90^\circ$, $tg\ FA = \infty$ folglich auch $tg\ FA' = \infty$ und $FA' = 90^\circ$. Im Sommerpunkt also culminirt die mittlere Sonne *S'* mit deren Projection *S"* auf den Aequator zu einerlei Zeit. Für $FA' = 180^\circ$ nämlich im Herbstpunkt, wo die mittlere Sonne *S'* mit deren Projection *S"* in einerlei Punkt zusammenfällt, und im Winterpunkt ($FA' = FA = 270^\circ$) culminiren beide eingebildete Sonnen wieder in einerlei Zeit. Auf diese Eigenschaft der Uebereinstimmung beider Sonnen in vier Hauptpunkten gründet sich die Annahme der eben gedachten dritten Sonne *S"*.

8. Die Bestimmung der gleichförmig erforderlichen Zeit geschieht nun folgendermafsen: die wahre Sonne *S*, welche sichtbar die Ekliptik ungleichförmig durchläuft, deren beide von der grofsen Axe *AP* (Fig. 17, pag. 15) geschiedene Hälften *PFH* und *AHP* aber in gleichen Zeiten, jede Hälfte in einem halben Jahre zurückgelegt werden, giebt in dem Lauf von *P* über *F*, *A*, *H* bis wieder zu *P* die Zeit des Jahres an. Die erste mittlere in der Ekliptik gleichförmig sich bewegende Sonne *S'* trifft mit der wahren Sonne *S* in den Absiden *P* und *A* zusammen, in allen anderen Punkten stehen beide auseinander. Die dritte, die zweite mittlere Sonne *S"*, welche die gleichförmige, die mittlere Zeit bestimmt, bewegt sich im Aequator gleichförmig, trifft mit der zweiten Sonne *S'* in den Nachtgleichenpunkten *F* und *H* zusammen, und in den Wendepunkten *a* und *b* (Fig. 17), dem Sommerpunkt und dem Winterpunkt culminiren sie beide in einerlei Zeit.

Hierbei ist noch festzuhalten, dafs die Punkte *F*, *a*, *H*, *b* jährlich um 50,1 Bogensecunden von Ost nach West der Erde entgegenrücken, so dafs Frühlings- und Herbstpunkt von der kleinen Axe, und Sommer- und Winterpunkt von der grofsen Axe der Ekliptik immer mehr sich entfernen.

Die um ein Geringes aber während des Jahres veränderlich im Abstande verschiedenen Orte der sichtbaren Sonne *S* von der eingebildeten dritten Sonne *S"* veranlassen den Unterschied zwischen der von den Sonnenuhren richtig angegebenen **wahren Sonnenzeit** und der von den Pendeluhren angebenen **mittleren**

Sonnenzeit. Diese Unterschiede sind für das ganze Jahr in jedem Hauskalender tabellarisch geordnet aufgeführt.

9. Die astronomische mittlere Zeit, das Sonnenjahr zu 365,242255 ganz gleichen Tagen zu 24 Stunden ist also unsre Uhrzeit. Das bürgerliche Jahr kann aber nur ganze Tage haben: bekanntlich hat das Gemeinjahr 365 Tage, der Decimalbruch wird zunächst ausgeglichen, dafs alle vier Jahr ein Jahr (Schaltjahr) von 366 Tagen eingeschaltet wird; da aber der Decimalbruch kleiner als $\frac{1}{4}$ ist, so geschieht eine fernere Ausgleichung dadurch, dafs man alle 100 Jahre ein Schaltjahr wiederum in ein Gemeinjahr von 365 Tagen umwandelt.

Diese Einrichtung macht den bekannten Kalender aus, dessen Richtigkeit wir allein der in ihren Erkenntnissen soweit gediehenen astronomischen Wissenschaft verdanken. Der Art.: Kalender, der auf den vorstehenden Aufsatz sich gründet, wird auch kurz das Historische der mathematischen Chronologie enthalten und erhellen, dafs die Unrichtigkeit und oft erforderlich gewesene Aenderung der Zeitrechnung in noch zu mangelhaften Standpunkten der Sternkunde ihren Grund hatte.

Chronometer (*χρονος* die Zeit, *μετρειν* messen) Zeitmesser. Die Zeit ist ein einfacher Begriff wie der Raum, sie ist daher nicht zu definiren, denn diejenigen Definitionen, welche die Philosophie davon giebt, passen auch auf andere Dinge. Man hat ein Bild von der Zeit, wenn man sich eine gerade Linie vorstellt; nach einer Richtung, der Vergangenheit hin, unabsehbar, an deren Ende der uns unbekannte Anfang liegt; oder vielmehr, da solcher Anfang ganz undenkbar ist, nach der Vergangenheit hin unendlich. Der Endpunkt der geraden Linie ist die Gegenwart, welche mit jedem folgenden Augenblick wieder in die Vergangenheit tritt, so dafs dieser Gegenwartspunkt eine stetige Bewegung macht, und die Linie verlängert; die jedem Zeitaugenblick zugehörenden verschiedenen Begebenheiten können in rechtwinkligen Ordinaten verzeichnet gedacht werden.

Die in dem vor. Art. erklärte Sternzeit und die mittlere Sonnenzeit mufs in deren Theilen: Tag, Stunde, Minute, Secunde in jedem Augenblick angegeben werden können, wenn jene für die Astronomie, diese für das bürgerliche Leben von Nutzen sein soll. Da der zu messende Gegenstand in stetiger Bewegung ist, so kann ein Maafsstab nicht angelegt werden wie bei einer ruhenden Raumgröfse: das Maafs mufs selbst beweglich sein; Bewegung erfolgt aber nur mittelst einwirkender Kraft; eine solche ist an jedem Ort der Erdoberfläche und in jedem Zeitaugenblick unmittelbar in der Schwerkraft gegeben; und in der That sind die ältesten C. auf diese Kraft in den Wasseruhren und Sanduhren gegründet, indem Wasser oder Sand durch kleine Oeffnungen in Gefäfse fiel, die so geaicht waren, dafs deren Anfüllung in einer bestimmten Zeit geschah. Wenn nun auch kleine Gefäfse oder grofse Gefäfse mit Theilstrichen Messung von kleinen Zeiten gestatten, so war doch die Abwartung dieser C., damit die Gefäfse rechtzeitig ausgegossen und gefüllt würden, umständlich und auch, abgesehen von den Temperatur-Einflüssen, unzuverlässig.

Gegenwärtig wird die Schwerkraft auf Gewichte angewendet; das Gewicht wird um eine Schnur befestigt, die um eine Walze geschlungen, diese umdreht, womit zugleich ein Räderwerk in Bewegung gesetzt wird. Bekanntlich fällt ein Gewicht mit jedem folgenden Augenblick schneller, die Walze wird also mit Beschleunigung umgedreht, was für eine gleichmäfsig nothwendige Zeitmessung nicht pafst. Erst durch die Entdeckung Galilei's im 17. Jahrhundert, dafs das Pendel isochrone Schwingungen macht, und Huygens Anwendung davon zu periodischen Hemmungen des fallenden Gewichts ist man zu Gewichts-Chronometern gekommen. Es ist äufserst merkwürdig, dafs für eine und dieselbe Maschine der menschliche Geist eine und dieselbe Kraft, die Schwerkraft in dem Gewicht als bewegende Kraft und in dem Pendel als das Entgegengesetzte, als Hemmung der Bewegung wirksam zu sein nöthigt. Die Einrichtung ist folgende:

Es sei *a* die Walze, um die eine Schnur mehrmals umgewunden ist, an welcher das Gewicht *b* hängt und die Walze umzudrehen strebt; mit der Walze *a* ist ein Stirnrad *d* verbunden. An der mehr oberhalb befindlichen Axe *c*, die ∦ der Walzenaxe liegt, ist ein Pendel *ce* aufgehängt, welches zur Seite der Walze Oscillationen macht, und mit der Pendelaxe ist der Winkel *fcg* fest verbunden. Dieser endigt in 2 Haken, welche abwechselnd in die Radzähne greifen, der Haken *g*, wie gezeichnet, wenn das Pendel seine weiteste Lage links hat und der Haken *f*, wann das Pendel am weitesten rechts anschlägt.

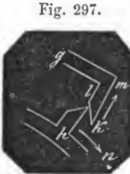
Während nämlich das Mittel der Pendellinse aus *e* nach *e'* schwingt, löst der Haken *g* von links nach rechts aus dem

Fig. 296.



Zahn sich aus, und der Haken *f* dreht sich, nachdem das nun frei wirkende Gewicht *b* um eine kleine Länge gefallen ist, und die Walze so viel nach rechts umgedreht hat, zwischen die Zähne *i* und *h*

Fig. 297.



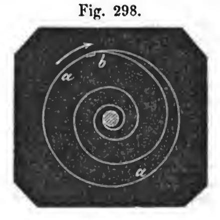
Da das Pendel seine Schwingungen in gleichen Zeiten macht, so wird auch immer in gleichen Zeitabständen ein Zahn ausgelöst, und ein Zahn ergriffen, und die Welle in gleichen Zeitabständen gedreht und in Ruhe versetzt, das Gewicht *b* fällt also, wenn ein Zahn ausgelöst ist, immer nur während einerlei Zeit, und da das Fallen immer von der Ruhe aus stattfindet, immer nur um einerlei Weg, den zugleich der Walzenumfang in einem Bogen zurücklegt. Steht nun mit der gleichmäfsig sich umdrehenden Welle ein Räderwerk in Verbindung, welches auf Zeiger wirkt, die Stunden, Minuten und Secunden angeben, so hat man in der obigen Maschine ein C.

Es ist noch zu erwähnen, dafs das Pendel durch die Reibung der Axenzapfen in den Lagern und die Luftwiderstände nach und nach zum Stillstand kommen würde, weshalb demselben immer ein kleiner Impuls von Neuem gegeben werden mufs, der die gedachten Widerstände jedesmal aufhebt, und es wird dies auf verschiedene Weise bewirkt. Nach Fig. 296 und 297 geschieht dies dadurch, dafs wenn der Winkelarm *g* nach der Richtung des Pfeils *km* auslösend sich dreht, und den Zahn bei seinem Bestreben zur Bewegung nach dem Pfeil *hn* vermöge des Gewichts *b* schon in die gezeichnete Lage (Fig. 297) hat kommen lassen, der Zahn *h* den Arm *g* bei dessen Bewegung nach *km* um den Drehpunkt *c* längs dessen schräger Fläche *kl* schiebend und hebend unterstützt. Ein Gleiches geschieht bei dem Arm *f* während dessen Auslösung.

Ein zweites C. wird noch construirt, das Taschenchronometer, wo man statt der Schwerkraft die Elasticität einer gespannten Stahlfeder als bewegende Kraft anwendet, und deren Wirkung anstatt durch das Pendel durch die sogenannte Unruhe; einen mit Spiralfeder versehenen Schwungring gehemmt wird.

Es sei *a* eine hohle um die mittlere Spindel drehbare Trommel; an der Spindel ist eine Stahlfeder befestigt, diese mehrere Male, als hier gezeichnet, umwunden und mit dem anderen Ende in *b* gegen die innere Trommelwandung genietet. Mit

Fig. 298.

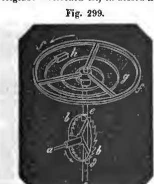


dem Druck dieses äufseren Endes der Feder gegen die Trommel zu deren Umdrehung ist die bewegende Kraft des C. hergestellt. Bei den bekannten Spindeluhren ist um die äufsere etwas hohe Trommel eine Stahlkette gewickelt, und diese über die Schneckentrommel geleitet, welche durch den Zug der Kette umgedreht wird. Bei den Cylinder- und Ankeruhren ist diese Kette nicht vorhanden, und dafür einfacher auf eine der beiden Trommelebenen ein Stirnrad gelegt, welches die Bewegung fortpflanzt. Zuerst ist die Feder am gespanntesten, die Bewegung würde also anfangs am schnellsten geschehen, und nach und nach im-

mer langsamer werden, daher ist auch hier eine regulirende Hemmung nöthig.

Diese Hemmung besteht darin, dafs die letzte Welle *a* des Räderwerks mit einem Steigrade *b* versehen ist, in dessen Zähne

Fig. 299.



wechselsweise die Flügel *d*, *e* der senkrechten Spindel *c* eingreifen. An das obere Ende der Spindel ist der metallene Schwungring *f*, die Unruhe, mit Armen befestigt, und eine feine Spiralfeder *g* mit einem Ende an dessen Nabe genietet und mit dem anderen Ende durch einen Stift *h* gesteckt, der mit dem Gehäuseboden verschiebbar befestigt ist.

Wenn die Betriebsfeder (Fig. 298) mittelst des Räderwerks die Welle *a* mit dem Steigrade *b* nach der Pfeilrichtung umdreht, so trifft ein unterer Sperrzahn den Flügel *d*, wodurch die Spindel *c* mit der Unruhe *f* nach deren Pfeilrichtung sich bewegt und zugleich den Flügel *e*, der einen rechten Winkel mit dem Flügel *d* bildet, zwischen zwei obere Zähne des Steigrades einführt, und die weitere Bewegung des Steigrades hemmt. Durch die Drehung der Unruhe wird nun die Spirale *g* zusammengezogen, und wenn die Unruhe einen Bogen von etwa 90° zurückgelegt hat, ist die Spannung der Feder *g* so grofs, dafs sie die Kraft der Hauptbetriebsfeder (Fig. 298) übertrifft. Hierdurch bleibt die Unruhe nicht allein stehen, sondern sie wird gezwungen, nach entgegengesetzter Richtung umzulaufen, wobei sie für die Beschreibung eines hin reichend grofsen Bogens durch die Schwungkraft ihrer verhältnifsmäfsig grofsen Masse unterstützt wird. Mit dieser Bewegung läfst der Flügel *e* den Zahn los und der Flügel *d* dreht sich vor den folgenden unteren Zahn, den er hemmt, der ihn aber durch den von der Hauptbetriebsfeder empfangenden Druck wieder zurückschiebt, und die Unruhe wiederum zur entgegengesetzten Drehung veranlafst; und so geht das abwechselnde Spiel der Hemmung während des Ganges des C. von Statten.

Wie bei dem Gewichts-Chronometer Bewegung und Hemmung vermöge der Schwerkraft geschieht, so hier beides durch Elasticität von Federn.

Mit den Hemmungen sind zugleich die Regulirungen der C. verbunden. Je länger ein Pendel ist, desto langsamer schwingt es, desto weniger oft in einerlei Zeit geschehen die einzelnen Hemmungen und die einzelnen gleich grofsen Fortrückungen der Walze, des Räderwerks und der Zeiger. Dasselbe ist mit der Spiralfeder *g*, Fig. 299 der Fall: je länger sie ist, desto gröfsere Bogen beschreibt die Unruhe, und desto langsamer geschehen die einzelnen Hemmungen des Steigrades. Geht also ein C. nach, so mufs das Pendel oder der schwingende Theil der Feder verkürzt werden; geht das C. vor, so sind beide zu verlängern.

Zu diesem Zweck befindet sich unter der Pendellinse, Fig. 296, die Schraubenmutter 0, mit welcher die Linse und mit dieser der Schwerpunkt des Pendels auf- und niedergeschraubt, also das Pendel verkürzt oder verlängert werden kann. Beim Taschenchronometer geschieht die Längen-Aenderung der Spirale mit dem Uhrschlüssel durch den Mittelstift der Stellscheibe, mit welcher die Klemme *h* vor- und zurückgeschoben werden kann.

Mit diesem Aufsatz hat nur das Grundprincip bei Construction des C. gegeben werden sollen, ein Weiteres im Art.: Compensation.

Circularbewegung s. v. w. Centralbewegung s. Bewegung No. 2.

Circummeridianhöhen sind die nahe dem Meridian genommenen Höhen eines Gestirns. Aus den beobachteten gleich grofsen Höhen des Gestirns vor und nach dessen Culmination und dem genau gemessenen Abstand der Zeit zwischen beiden Beobachtungen findet man in dem Mittel dieser Zeit den Zeitpunkt, in welchem der Durchgang des Gestirns durch den Meridian des Orts stattgefunden hat.

Circumpolarsterne sind dem Wortlaut nach alle Gestirne, denn alle scheinen um die Pole sich zu drehen. Man bezeichnet aber damit diejenigen Fixsterne die dem Beobachtungsort nie untergehen, indem sie dem Pole so nahe sind, dafs deren untere Culmination noch über dem Horizont des Beobachtungsortes stattfindet.

Orte im Aequator haben keine C.; für die Erdpole ist jeder zu derselben Himmelshalbkugel gehörende Stern ein C. Je näher ein Ort dem Pole liegt, desto mehr C. hat er aufzuweisen, weil sein Horizont einen um so gröfseren Winkel mit dem Pole bildet, eine um so gröfsere Polhöhe hat.

Der dem Nordpol zunächst stehende Fixstern ist der Polarstern, er befindet sich gegenwärtig 1° 35′ vom Pol entfernt, für Orte im Aequator culminirt er also in einer Höhe von 1° 35′, und geht eben so tief unter; für Orte von $2 \times 1° 35' = 3° 10'$ nördliche geographische Breite ist er der einzige C., und zwar tangirt er bei seinem unteren Durchgang durch den Meridian den Horizont.

Die C. sind für die Astronomie und die Geographie von gröfster Wichtigkeit, denn man erfährt durch sie die Polhöhe oder geographische Breite des Beobachtungsorts, indem man die Höhen, deren oberen und deren unteren Culmination beobachtet, und von beiden Höhen das Mittel nimmt, welches die Polhöhe angiebt. Ferner findet man durch die C. die richtige Mittagslinie des Orts; denn die Zeit zwischen der oberen und der unteren Culmination eines C. beträgt genau die Hälfte der Zeit, in welcher eine obere oder eine untere Culmination zum zweitenmal wiederkehrt (der Sterntag), so dafs danach die Linie des Beobachtungs-Instruments mittelst mehrerer Beobachtungen rectificirt werden kann.

Wenn nämlich zwischen der oberen und der unteren Culmination eine gröfsere Zeit liegt als zwischen der eben gedachten unteren und der zunächst folgenden oberen Culmination, so hat die lothrechte Ebene der Axe des Instruments zuerst mehr als den Halbkreis der Bahn des C. abgeschnitten, die Ebene ist nicht nach dem Pol, sondern nach rechts von demselben gerichtet, und das Instrument mufs so weit nach links gewendet werden, dafs die senkrechte Axenebene auf den Pol trifft, und die Axe die Mittagslinie angiebt.

Coefficient ist in der niederen Arithmetik die bekannte Zahl als Factor vor der Unbekannten: in ax, by^2 z. B. sind a, b als Factoren der Unbekannten x, y^2 deren C. Bei Unbekannten ohne bekannten Factor, wie x, x^3, ist der C. = 1. In der Analysis sind C. die unveränderlichen bekannten oder unbekannten Gröfsen, wenn sie Factoren der Veränderlichen sind. Soll $\sqrt{a^2 + x^2}$, wo a constant, x veränderlich ist, in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen von x entwickelt werden so setzt man

$$\sqrt{a^2 + x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

wo A, B, C, D ... unbekannte noch zu bestimmende von x unabhängige also unveränderliche Gröfsen sind; sie heifsen **unbestimmte Coefficienten**, und auch A gehört dazu, indem man A mit $x^0 = 1$ multiplicirt denkt.

Cofunctionen sind in der Trigonometrie die Functionen der Complementswinkel, also der Cosinus, die Cotangente, die Cosecante und der Cosinus versus.

Cohärenz ist die Kraft, mit welcher die gleichartigen Massentheilchen einander sich anziehen, und dadurch zu dem Körper sich gestalten (s. Adhärenz und den folgenden Art.).

Cohäsion, die Wirkung der Cohärenz (vergl. Affinität, Anziehung und Atom). Die Naturphilosophen haben sich viel mit den Ursachen der C. beschäftigt und Hypothesen dafür aufgestellt. Diese sind hier nicht so nothwendig, als für Erscheinungen, deren Gesetze zu erforschen von der gröfsten Wichtigkeit ist; als: die Bewegung der Weltkörper, die Wirkungen der Electricität u. s. w., deren Gesetze nicht eher aufzufinden waren, als bis man Hypothesen zu Grunde legte, die mit den Erscheinungen übereinstimmend sich allgemein bewährten, ohne dafs wir dennoch wissen, ob sie richtig sind.

Man nimmt an, dafs die C. eine gleiche Ursach mit der Attraction habe, und auch dafs beide Naturkräfte verschieden seien. Ersteres ist mir deshalb wahrscheinlicher, weil ich annehme, dafs der Schöpfer zu seinen Zwecken die möglichst einfachen Mittel anwendet. Die Grade der Attraction (s. d.), der Anziehung in der Ferne werden bestimmt durch die Gröfse der Masse in directem, und durch die Quadrate deren Entfernungen in indirectem Verhältnifs. Wollte man nun annehmen, dafs die Atome, welche durch die C. zu einem Körper sich gestalten, in unmittelbarer Berührung, also in der Entfernung = Null sich befänden, so würde die Gröfse der Anziehung überall unendlich grofs sein, alle Körper würden also einerlei Festigkeit haben.

Die nicht hoch genug zu schätzende Atomentheorie (s. Atom und die diesem folg. Art.) hebt Annahme und Schlufs auf: die Atome berühren sich nicht; sie ziehen sie an bis zu einer Entfernung, in der sie von einander verbleiben, die in Verhältnifs zu der Kleinheit ihrer Masse vielleicht sehr bedeutend ist und die, Vernunftschlüssen nach, abhängig ist von der jedem Stoff eigenthümlich ankom-

menden Gröfse einer als abstofsende Kraft wirkenden Wärme-Atmosphäre, die jedes einzelne Atom umgiebt.

Diese verschiedenen Abstände der Atome in Körpern verschiedenen Stoffs machen die verschiedenen Festigkeiten der Körper aus. Körper, um deren Atome nur geringe Wärme-Atmosphären sich befinden, sind fest, wie Eisen, Stein; wird ihnen eine gröfsere Wärmemenge zugeführt, so nimmt diese die um die Atome befindlichen leeren Räume ein, diese erweitern sich, während die Atome selbst unverändert bleiben; die Atome werden auseinandergerückt, die Festigkeit des Körpers wird vermindert, er wird weich, später flüssig und luftförmig. Eisen bedarf einer bedeutend gröfseren Menge Wärme um flüssig zu werden, als Zink; da nun die Atomgewichte beider Stoffe etwa wie 7:8 und deren Atomvolum (Atom + leerer Raum) etwa wie 5:6 sich verhalten, so kann man sich vorstellen, dafs die Atome selbst beim Eisen von gröfserem Umfang als beim Zink sind, so dafs die Eisenatome näher an einander liegen, als die Zinkatome, was auch mit dem Verhältnifs der Festigkeit beider Stoffe übereinstimmt, und dafs mithin für das Eisen eine bedeutend gröfsere Wärme erforderlich ist, als für das Zink, um in beiden Stoffen die Atome um gleich viel auseinander zu bringen, d. h. um beide Stoffe in den Zustand einerlei Festigkeit, in den Zustand der Flüssigkeit zu bringen.

Von der Gröfse der C. sind die Aggregat-Zustände (s. d.) der Körper abhängig. Körper sind fest, tropfbar-flüssig und luftförmig; zwischen den ersten beiden Hauptzuständen noch ein mittlerer, der weiche, mufsige; zwischen beiden letzten ein mittlerer, wie der Wrasen, der beim Kochen von Wasser, oder der Wasserrauch, der uns in der Atmosphäre als Wolke erscheint.

Die luftförmigen Körper haben nicht abstofsende Kraft in den materiellen Theilen, sondern, da sie in einem zusammengeprefsten Zustande sich befinden, nur das Bestreben, sich in die dem Gase eigenthümliche uns unbekannte geringere Dichtigkeit zu versetzen, was ihre Expansibilität ausmacht. Bei einer permanent abstofsenden Kraft der Theile müfste die Atmosphäre das ganze Weltall ausfüllen.

Das Zerfliefsen der tropfbar flüssigen Körper liegt darin, dafs ihre C. von der Schwerkraft unsres Erdkörpers überwunden wird; daher auch das langsamere Zerfliefsen dickflüssiger Körper von gröfserer C. Beim freien Fall flüssiger Körper von geringem Volum dagegen kommt die C. zur Erscheinung, weil alle Theile des Körpers einerlei Geschwindigkeit haben. Der Regen fällt in Tropfen, je kleiner diese sind, desto kugeliger sind sie; je gröfser, desto mehr Geschwindigkeit hat fortdauernd der untere Theil des Tropfens gegen den oberen, der Tropfen ist also in senkrechter Richtung länglich. Gröfsere Massen fallen in noch längeren Formen, in Strömen.

Plateau hat auch bei einer gröfseren Masse Flüssigkeit die C. von der Schwere zu isoliren gelehrt: Oel in ein Gefäfs gegossen, fliefst über den Boden, bis es eine horizontale Oberfläche angenommen hat. Wasser darüber gegossen, durchdringt das Oel, dieses steigt in die Höhe, und lagert sich auf die Oberfläche des Wassers. Denn die Schwere übt auf jedes Massenelement gleich grofsen Einflufs, in jedem Molekül Wasser ist aber mehr Masse als in dem gleich grofsen Molekül Oel (Wasser ist schwerer als Oel), folglich ist die Wirkung der Schwere auf das Wssser gröfser als auf das Oel.

Uebergiefst man dagegen das Oel mit Weingeist, so bleibt dieser über dem Oel, weil er leichter als Oel ist. Tropft man nun nach und nach Wasser in den Weingeist, so entsteht eine immer schwerere Mischung; diese kann der Schwere des Oels beliebig nahe gebracht werden, sie erhält also mit dem Oel immer näher einerlei Fallbestreben; d. h. das Oel wird immer weniger von der Schwerkraft der Erde afficirt, folglich wird die C. des Oelkörpers immer unabhängiger von der Schwerkraft, immer selbstständiger, und sie macht sich dadurch geltend, dafs sie den Oelkörper hebt, und ihn nach und nach zu einer Kugel gestaltet.

Man kann hierbei die C. durch Centrifugalkraft zum Theil wieder aufheben, indem man durch die Oelkugel einen Draht mit Scheibe führt, und diesen umdreht, wodurch die Kugel in Rotation versetzt wird, und sich oben und unten abplattet; bei vermehrter Schnelligkeit der Scheibe löst sich ein Ring von der Oelkugel ab, der ebenfalls rotirt, wie der Ring des Saturns.

Cohäsionskraft ist Cohärenz.

Collective Gröfse od. discrete Gröfse (colligere sammeln, discernere unterscheiden, zertheilen) s. v. w. Zahl. Für die erste Bezeichnung ist die Einheit, für die zweite die Ganzheit zu Grunde gelegt: der erste Name besagt eine Gröfse, die aus Einheiten zusammengelesen oder aufgesammelt wird; der zweite Name eine Gröfse, die in Einheiten zu unterscheiden,

zu zertheilen ist. Beiden Bezeichnungen gegenüber steht die continuirliche oder concrete Gröfse, welche die Gröfse im Raum ist.

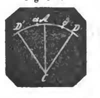
Collectivglas ist jedes Glas, welches die Lichtstrahlen sammlet und in einen Punkt vereinigt, also jedes auf einer oder beiden Oberflächen convexe Glas (vergl. Brennglas 5). Man versteht unter C. aber auch besonders das in einem zusammengesetzten Mikroskop befindliche Zwischenglas, welches die durch das Objectivglas convergirenden Strahlen noch mehr convergirt, um das von dem Objectiv hervorgebrachte Luftbild zu verkleinern, in seinen Umrissen schärfer zu erhalten, das Gesichtsfeld des Oculars zu vergröfsern, und die nachtheilige Farbenzerstreuung aufzuheben.

Collimation (collimare oder collineare nach gerader Linie richten, zielen) bedeutet das Zusammenfallen zweier Richtungslinien, nämlich der wirklichen Linie zwischen dem Auge und dem Object mit der Linie, in welcher man nach demselben Objecte zielt (visirt); und zwar bei einem Winkel-Instrument das Zusammenfallen der Visirlinie mit dem von der Alhidade bezeichneten richtigen Kreistheil des Limbus. Findet diese C. nicht statt, so wird der gemessene Winkel unrichtig abgelesen: das Instrument hat einen Collimationsfehler.

Collimationsfehler, ein Fehler aus Mangel der Collimation bei einem Winkelinstrument. Wenn bei Messung eines Winkels beide Schenkel einzeln visirt werden, so heben sich beide C. einander auf. Wenn aber nur ein Schenkel visirt wird, indem der Nullpunkt des Instruments auf eine Reihe von Beobachtungen fixirt ist, entweder in der vertikalen (nach dem Zenith), oder in der Horizontalebene, z. B. in der Mittagslinie, dann kann der Nullpunkt aus seiner festgestellten Lage gerückt sein, und es ist die Messung auf einen C. zu untersuchen. Es geschieht dies durch Repitition (vergl. Borda'scher Kreis S. 394).

Es sei AC die Axe des Instruments,

Fig. 300.



A der Nullpunkt, CD die Visirlinie nach einem Stern. Vermuthet man, dafs Bogen AD in Folge eines C nicht genau angegeben wird, so dreht man das Instrument um, wo dann CD in CD' fällt. Fixirt man in dieser Lage das Instrument, dreht das Fernrohr aus der Linie CD' wieder in die Visirlinie, und diese fällt in d, so dafs $Ad < AD'$, so ist offenbar nicht AC die richtige Verticale, sondern aC in derjenigen Richtung, dafs $D'a = da$; Bogen $AD' = AD$ als Zenithdistanz des Sterns ist also unrichtig abgelesen: sie ist

$$\frac{dD'}{2} = \frac{Ad + AD}{2}$$

Collimationslinie, die in den beiden vor. Art. angeführte Visirlinie.

Combination (Arithm.) ist die Zusammenstellung einer Anzahl aus mehreren gegebenen gleichartigen Gröfsen, welche hier Elemente genannt und in der Regel durch Buchstaben, auch wohl durch Ziffern ausgedrückt werden.

Es seien

$$a, b, c, d, e \ldots.$$

die gegebenen Elemente, so sind

$$a, ab, cba, dacb, abcsd \ldots.$$

$$aa, aaa, abab, aabbbc \ldots.$$

Combinationen. Bei den C. der ersten Reihe sind alle Elemente von einander verschieden, diese C. heifsen C. ohne Wiederholung; bei den C. der zweiten Reihe kommen einzelne Elemente mehrere Male vor, diese C heifsen C. mit Wiederholung, und es können die gleichen Elemente wie Potenzen geschrieben werden: also $a^2 = aa$; $a^3 = aaa$; $a^2b^2 = aabb = abab$ u. s. w. Die Anzahl der gleichen Elemente heifst der Wiederholungsexponent.

Die C. werden nach der Anzahl der combinirten Elemente, welche der Exponent der C. heifst, in Klassen getheilt. Ein einzelnes der gegebenen Elemente ist eigentlich keine C., sie heifst jedoch C. der ersten Klasse. Union, wie $a, b, c, d \ldots$, ihr Exponent ist $= 1$. Eine C. von 2 Elementen ($ab, bb, cd \ldots$) heifst C. der zweiten Klasse, Binien, deren Exponent ist $= 2$. Eine C. von 3 Elementen ($aaa, abc, \ldots$) heifst Ternion, eine C. von 4 Elementen Quaternion, von 5 Elementen Quinion, von 6 Elementen Senion u. s. w.

Eine C. heifst geordnet, wenn die Buchstaben in der Ordnung des Alphabets einander folgen; $abcd$, $aabb$, $abcc$ sind geordnete; bac, $dacb \ldots$ ungeordnete C. Eben so wird die Zusam-

menstellung sämmtlicher C. aus gegebenen Elementen lexicographisch geordnet.

C. die mit dem erten Buchstaben (a) anfangen, heifsen C. der ersten Ordnung. aa, ab, ac... sind C. der 2ten Classe erster Ordnung; bbb, bbc, bcc, bcd... sind C. der 3. Classe zweiter Ordn. u. s. w.

C. heifsen ähnlich oder einerlei Gattung, wenn sie in der Anzahl der Elemente und der Wiederholungen übereinstimmen, wie aaa, bbb; oder abc, bcd; oder $aabc$, $bbcd$ u. s. w.

2. Combinationen ohne Wiederholungen.

So viele Elemente gegeben sind, so viele Klassen von C. sind möglich.

1 Element $= a$.

C. 1. Kl. $= a$.

2 Elemente $= a, b$.

C. 1. Kl.: a; b.
C. 2. „ ab.

3 Elemente $= a, b, c$.

C. 1. Kl.: a; b; c.
C. 2. „ ab, ac; bc.
C. 3. Kl.: abc.

4 Elemente $= a, b, c, d$.

C. 1. Kl.: a; b; c; d.
C. 2. „ ab, ac, ad; bc, bd; cd.
C. 3. „ abc, abd; bcd.
C. 4. „ $abcd$.

5 Elemente $= a, b, c, d, e$.

C. 1. Kl.: a; b; c; d; e.
C. 2. „ ab, ac, ad, ae; bc, bd, be; cd, ce; de.
C. 3. „ abc, abd, abe, acd, ace, ade; bcd, bce, bde; cde.
C. 4. „ $abcd$, $abce$, $abde$, $acde$; $bcde$.
C. 5. „ $abcde$.

Die Bildung sämmtlicher C. aus mehreren Elementen geht aus den vorstehenden C. hervor. Bei n Elementen hat die 1ste Klasse n C., die n Klasse eine C. Um die Anzahl der C. bei gegebenen n Elementen für die übrigen Klassen in Formeln auszudrücken, hat man folgende Betrachtung für die einfachste Ermittelungsweise:

Verbindet man jede der n Unionen mit jedem der übrigen $(n-1)$ Elemente, so erhält man $n(n-1)$ Binionen; in diesen ist nun jede Binion zweimal vorhanden, als: ab, ba; bd, db u. s. w.; mithin gehört zur 2ten Klasse nur die Hälfte sämmtlicher Binionen, nämlich

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Verbindet man für die dritte Klasse jede dieser $\frac{1}{2}n(n-1)$ Binionen mit jedem der übrigen $(n-2)$ Elemente, so erhält man $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ Ternionen; allein jede derselben ist 3mal vorhanden, als: $(ab)c$, $(ac)b$, $(bc)a$ u. s. w.; mithin ist die Anzahl der C. der dritten Klasse =

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2).$$

Verbindet man für die 4te Klasse jede dieser Ternionen mit jedem der übrigen $(n-3)$ Elemente, so erhält man

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Quaternionen

in diesen sind aber alle C. 4mal vorhanden, z. B. $(abc)d$, $(abd)c$, $(acd)b$, $(bcd)a$, und folglich gehören zur 4ten Klasse nur

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) \text{ C.}$$

So fortgefahren, findet man für die $m$te Klasse

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\ldots\frac{1}{m}\,n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Die Anzahl der C. ohne Wiederholungen für n Elemente hat man demnach

für die 1. Klasse $= \dfrac{n}{1}$

„ „ 2. „ $= \dfrac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}$

„ „ 3. „ $= \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$

„ „ 4. „ $= \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

. . . .

„ „ m. „ $= \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ m}$

Beispiele. 1. Wenn man aus einem Dominospiel (von 0 bis 6) von 28 Steinen 6 Steine zum Spiel zu ziehen hat, so kann man $\dfrac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 376740$ verschieden zusammengesetzte Steine erhalten.

2. Jeder der 3 L'hombrespieler erhält aus dem Spiel von 40 Karten 9 Karten, 13 Karten bleiben als Talon. Jeder Spieler kann also

$$\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} = 273\,438880$$

verschiedene Spiele erhalten, und der Talon kann aus

$$\frac{40\cdot 39\cdot 38\ldots 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13} = 12033\ 222880$$

verschieden zusammengesetzten Karten bestehen.

3. Combinationen mit Wiederholungen.

1 Element $= a$.

C. 1. Klasse $= a$.
2. „ $= aa$.
3. „ $= aaa$.
u. s. w.

2 Elemente $= a, b$.

C. 1. Klasse $= a$; b.
2. „ $= aa$, ab; bb.
3. „ $= aaa$, aab, abb; bbb.

C. 4. Klasse = *aaaa*, *aaab*, *aabb*, *abbb*; *bbbb*.

u. s. w.

3 Elemente: *a*, *b*, *c*.

C. 1. Klasse: *a*; *b*; *c*.

2. „ *aa*, *ab*, *ac*; *bb*, *bc*; *cc*.

3. „ *aaa*, *aab*, *aac*, *abb*, *abc*, *acc*; *bbb*, *bbc*, *bcc*; *ccc*.

4. „ *aaaa*, *aaab*, *aaac*, *aabb*, *aabc*, *aacc*, *abbb*, *abbc*, *abcc*, *accc*; *bbbb*, *bbbc*, *bbcc*, *bccc*; *cccc*.

u. s. w.

Die Anzahl aller Unionen oder C. 1ster Klasse bei n Elementen ist $= n$. Die Anzahl aller C. ohne Wiederholungen 2ter Klasse ist nach No. 2 $= \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$ hierzu kommen n Verdoppelungen, giebt C. mit Wiederholungen 2ter Klasse =

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

Um die Anzahl der Ternionen zu finden, hat man die der Ternionen ohne Wiederholung $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ D. h. die Anzahl der Ternionen von der Form (abc). Hierzu kommen die Ternionen von der Form (a^3) in der Anzahl n und die von der Form (a^2b) in der Anzahl $n(n-1)$, indem n Elemente verdoppelt, mit jedem der übrigen $(n-1)$ Elemente verbunden werden. Die Anzahl der Ternionen mit Wiederholungen ist also:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + n + n(n-1) = \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Eben so findet man die Anzahl der Quinionen, der Senionen u. s. w.

Die Anzahl der C. mit Wiederholungen für n Elemente hat man demnach

für die 1. Klasse $= \frac{n}{1}$

„ „ 2. „ $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

„ „ 3. „ $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

„ „ 4. „ $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

. . . .

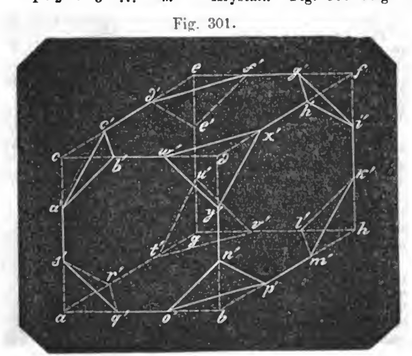
„ „ m „ $= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$

Beispiel. Mit 2 Würfeln sind $\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$ verschiedene Würfe möglich, mit 3 Würfeln $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ Würfe.

Rechnet man dagegen die Würfe aufser den Paschen doppelt [1, 2 und 2, 1] so werden mit 2 Würfeln $6^2 = 36$, mit 3 Würfeln $6^3 = 216$ Würfe gemacht, indem hier die möglichen 36 Würfe zweier Würfel jeder mit den 6 Augen des 3ten Würfels zusammen treffen können.

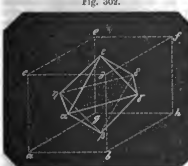
Combination (Kryst.) zusammengesetzte Form, ist die Vereinigung verschiedener einfachen Formen zu einem Krystall. Fig. 300 zeigt die C. eines

Fig. 301.



Hexaeders und Octaeders; die hier vorherrschende Form des Hexaeders ist punktirt vollständig dargestellt, die dreieckigen Flächen, welche die Ecken des Hexaeders abstumpfen, sind die Octaederflächen; vergrößert man diese immer mehr, so entsteht aus ihnen das vollständige Octaeder, und das Hexaeder verschwindet, wie dies Fig. 301 darstellt.

Fig. 302.



Nämlich bei fortdauernder gleichmäßiger Verlängerung der Kanten fallen *a'b'* und *o'n'* in die Diagonale *ad*, die Kanten *q's'* und *w'y'* in die Diagonale *bc*, die genannten 4 Kanten schneiden sich in dem Mittelpunkt α, Fig. 301, d. h. sie verschwinden als eine Ecke α. Eben so verschwinden die Kanten *m'k'*, *x'y'*, *n'p'*, *h'i'* in dem Durchschnittspunkt γ der Diagonalen *dh* und *bf*, die Kanten *g'i'*, *u'v'*, *e'f'*, *k'l'* in dem Durchschnittspunkt δ der Diagonalen *eh* und *fg*, die Kanten *a'c'*, *t'u'*, *r's'*, *d'e'* in dem Punkt η, die Kanten *b'c'*, *g'h'*, *d'f'*, *w'x'* in dem Punkt ε, und die Kanten *q'v'*, *l'm'*, *o'p'*, *t'v'* in dem Punkt β. Diese 8 Durchschnittspunkte geben die 8 Ecken des neugebildeten Octaeders mit den 8 dreieckigen Flächen $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\delta\beta$, $\delta\eta\beta$, $\eta\alpha\beta$; $\alpha\gamma\varepsilon$, $\gamma\delta\varepsilon$, $\delta\eta\varepsilon$, $\eta\alpha\varepsilon$. Das Octaeder hat die 3 Basen $\alpha\gamma\delta\eta$ mit den äußeren Ecken β, ε; $\gamma\varepsilon\eta\beta$ mit den äußeren Ecken α, δ und $\alpha\beta\delta\varepsilon$ mit den äußeren Ecken γ, η.

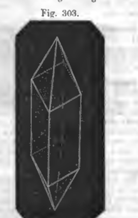
Man kann sich auch vorstellen, daß sämmtliche 8 Octaederflächen Fig. 300 in ihren Ebenen nach allen Richtungen beliebig erweitert werden; alsdann schneiden sich die vier bei *c*, *e*, *f*, *d* befindlichen Flächen in einer über dem Quadrat *cefd* liegenden Ecke, die 4 bei *a*, *b*, *g*, *h* befindlichen Flächen in einer unter *abgh* liegenden Ecke, die 4 Flächen bei *a*, *b*, *c*, *d* in einer vor *abcd* liegenden Ecke u. s. w. Es entsteht ein Octaeder, welches die vorherrschenden Hexaederflächen umschließt.

Eben so kann man durch Fortrückung der Hexaederflächen die Octaederflächen verdrängen. Entweder läßt man die Fläche *b's'o'y'* bis in die Ebene *c'x'r'p'* sich ∥ mit sich selbst bewegen, wo sie ein Quadrat ist; die ihre parallele Fläche bis in die Ebene *d'h'm't'* desgleichen zum Quadrat; die diesen angrenzenden Seitenflächen bis in die Ebenen *b'f'v'q'* und *g'w'o'l'*; ferner die obere und die untere Fläche bis in die Ebenen *a'e'i'y'* und *s'n'u'k'* und man erhält ein Hexaeder, dessen Flächen die Octaederflächen innerhalb berühren. Oder man verbreitet die Hexaederflächen bis an den Durchschnittspunkten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, wo dann das Hexaeder entsteht, welches die Octaederflächen umschließt.

2. Durch die C. mehrerer einfachen Formen entsteht die **combinirte Form**; die zu derselben einfachen Form gehörenden Flächen heißen **gleichnamig**, die Flächen der anderen einfachen Form in Beziehung auf die der ersteren einfachen Form **ungleichnamig**. Durch Erweiterung gleichnamiger Flächen, bis dahin, daß die ungleichnamigen Flächen gänzlich verdrängt werden, entsteht aus der combinirten Form eine einfache Form.

Man hat C., in welchen gleichnamige Flächen erweitert, keine vollständige Form geben, z. B. bei der C. der quadratischen Säule und des Octaeders, Fig. 302 wo die 4 Säulenflächen allein keine vollständige Form bilden können. Solche Flächen heißen **zusammengehörige Flächen**.

Fig. 303.



Die aufgesetzten 8 Octaederflächen bilden gehörig verbreitet, ein vollständiges Octaeder. Die Kanten, in welchen die Flächen zweier verschiedenen Formen sich schneiden, heifsen Combinationskanten, wie Fig. 300 *b'c'*, in welcher die Octaederfläche *c'b'a'* und die obere Hexaederfläche sich schneiden. Die Ecken, in welchen die Flächen verschiedener Formen zusammentreffen, heifsen Combinationsecken, wie *b'*, *c'* u. s. w.

Es giebt Krystalle combinirter Form, in welchen die Combinations-Ecken und -Kanten abgestumpft sind; bei den Ecken findet immer eine schiefe, bei den Kanten selten eine gerade Abstumpfung statt.

Combinationsexponent (Arithm.) ist die Anzahl der Elemente in einer Combination (s. d. No. 1).

Commensurable Gröfsen sind solche, die ein gemeinschaftliches Maafs haben, also alle ganze Zahlen, weil diese die Einheit 1 zum Maafs haben, alle Brüche von gleichen Nennern; z. B. $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$ haben zum gemeinschaftlichen Maafs die Einheit $\frac{1}{7}$. Ferner incommensurable Gröfsen, wie $3\sqrt{5}$ und $7\sqrt{5}$, die $\sqrt{5}$ zum gemeinschaftlichen Maafs haben. Dagegen sind irrationale Zahlen wie $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ und $\sqrt{10} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$ nicht commensurabel, weil deren Factoren 3 und $\sqrt{5}$ kein gemeinschaftliches Maafs haben. Ist das Maafs zweier c. Gröfsen nicht die Einheit, so wird es auch gemeinschaftlicher Theiler genannt.

In der Potenz commensurabel heifst bei Euklid commensurabel im Quadrat, als $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ die incommensurabel, aber in den Quadraten (2, 5) commensurabel sind.

Commutation oder Commutationswinkel s. d. Erklärung in dem Art.: Breite, astronomische. Die C. ist = dem Unterschied zwischen der heliocentrischen Länge der Erde und der des Planeten.

Compafs ist ein Winkelmefsinstrument, welches sich darauf gründet, dafs eine frei spielende Magnetnadel immer nach dem magnetischen Pol, einem bestimmten Punkt der Erde gerichtet ist, so dafs die Richtungen der Magnetnadel an Orten, von verschiedener geographischer Länge zu deren Pol sich verhalten wie die Meridiane zum Nordpol, in dessen Nähe der magnetische Pol liegt.

Die Anwendung des C. zu Vermessungen ist in dem Art. Boussole, wie nämlich der C. der Feldmesser und der Berglente heifst, angegeben. Seine wichtigste Anwendung findet bekanntlich der C. in der Seeschifffahrt, denn bei genauer Kenntnifs der Abweichung der Magnetnadel (s. d.) von dem geographischen Meridian in jedem Ort der Länge und Breite, welche möglichst genau ermittelt worden, kann nach bestimmter Richtung gesteuert werden, daher dieser C. auch Schiffscompafs, Steuercompafs heifst.

Die Einrichtung des Schiffscompasses ist von der Boussole nur darin verschieden, dafs er der Schwankungen des Schiffs wegen frei aufgehängt, und dafs die freie Spielung der Nadel durch einschliefsende Flächen gesichert wird. Ferner ist der Rand nicht nur in 360 Grade getheilt, sondern die Nadel ist auch mit der Windrose belegt, einer Scheibe, die in 32 Hauptwindrichtungen oder Striche eingetheilt ist.

Der Azimuthalcompafs der Schiffer (s. d.) hat keine Windrose, und wird bei jedem beabsichtigten Gebrauch wie die Boussole auf ein Stativ gesetzt. Die eben gedachten speciellen Einrichtungen gehören in die Technik.

Compensation. Hierunter begreift man die C. oder Aufhebung von Fehlern, die bei dem Pendel durch Verlängerung und Verkürzung der Pendelstange und bei der Unruhe durch Aenderung der Spiralfederlänge mit der Vermehrung und Verminderung der Luftwärme entstehen, und wodurch die Uhr einen unregelmäfsigen also unrichtigen Gang hat. Vgl. Chronometer, von dem dieser Art die Fortsetzung ist.

In dem Art. Ausdehnung, pag. 194 u. 195 hat man bei einer Temperaturänderung von 0° bis 100° C. die Ausdehnung des Messings durchschnittlich 0,0019; die des Stahls durchschnittlich 0,0012. Die Längenänderungen sind zwischen 0° und 100° von Grad zu Grad ziemlich constant; verbindet man daher Stahlstäbe mit Messingstäben in dem Längen-Verhältnifs 19 : 12, wie Fig. 303 angiebt, so wird der Fehler, der aus den Aenderungen der Lufttemperatur entspringt, compensirt.

An dem Aufhängepunkt *a* ist der horizontale Steg *bb* befestigt, zu beiden Seiten gehen die beiden Stahlstäbe *bc* senkrecht herab, an den Stegen *cd* die Messingstäbe *de* in die Höhe, von deren oberen Steg *ee* die Stahlstäbe *fg* wieder herab, von deren unteren Stegen *gh* die Messingstäbe *hk* wieder hinauf, und endlich von deren Steg *kk* der Eisenstab *lm* mit der Linse *m* wieder herab.

Bei Temperatur-Aenderungen der Luft verlängern sich die herabgehenden Stäbe *bc*, *fg*, *lm* nach unten, die hinaufgehen-

Fig. 304.



den Stäbe *de* und *hk* nach oben, und deren Verkürzungen geschehen nach den entgegengesetzten Richtungen. Die summarische Länge des Pendels, welche zur Aenderung kommt, ist mithin:

$$bc - de + fg - hk + lm$$

Die Aenderung, welche ein Eisenstab von der Länge l zwischen 0° und 100° Temperatur-Unterschied erleidet ist $0{,}0012 \times l$; bei 1° Temperaturänderung $= 0{,}000012 \times l$ und bei $t°$ Temperatur-Aenderung $= 0{,}000012 \times t \cdot l$. Bei einem Messingstab sind diese Aenderungen $0{,}0019 \times l$; $0{,}000019 \times l$ und $0{,}000019 \times t \cdot l$.

Soll also für eine Temperaturänderung t eine vollständige C. eintreten, so mufs sein:

$$0{,}000012 \times t \cdot (bc + fg + lm) = 0{,}000019 \times t \cdot (de + hk)$$

oder reducirt:

$$12 \cdot (bc + fg + lm) = 19 \cdot (de + hk)$$

Setzt man nun die Entfernung
des Stegs *bb* von $ee = x$
" " ee " $kk = y$
" " gg " $cc = u$
des Linsenmittels *m* von $cc = z$
die Länge $bc = l$

so ist $de = l - x$
$fg = l - x - u$
$hk = l - x - y - u$
$lm = l - x - y + z$

Nun soll also sein:

$$12(3l - 2x - u - y + z) = 19(2l - 2x - y - u)$$

woraus

$$14x + 7u + 7y + 12z = 2l$$

Setzt man die Zwischenräume $x = y = u$, so hat man

$$28x + 12z = 2l$$

oder

$$14x + 6z = l$$

Für ein Secundenpendel in Berlin ist *am* ziemlich genau 3′ 2″ preufs. Nimmt man $z = 3$ Zoll, die Höhe des Aufhängepunkts *a* über dem Steg $bb = 3$ Zoll, so ist $l = 3' \, 2'' - 6'' = 2' \, 8'' = 32''$

$$14 \cdot x + 18'' = 32''$$

woraus $x = 1$ Zoll, welcher von der Oberkante des oberen bis zur Oberkante des unteren Stegs zu nehmen ist.

Aus dieser Berechnung ist zu ersehen, dafs weniger als 3 niedergehende und 2 aufsteigende Stäbe nicht genommen werden können, wenn vollkommene C. eintreten soll, weil die Zwischenräume x, y, u sonst gar nicht stattfinden könnten.

Nimmt man einen Stahl, dessen Ausdehnungscoefficient $= 0{,}0013$ ist (pag. 195 giebt Berthoud 0,001375) so würde auch bei der Fig. 303 gezeichneten Construction keine vollkommene C. möglich sein, denn man erhält aus der Bedingungsgleichung:

$$13 \cdot (3l - 2x - u - y + z) = 19(2l - 2x - y - u)$$

entwickelt

$$l + 12x + 6y + 6u + 13z = 0$$

welches unmöglich ist.

Für diesen Fall hätte man also 4 niedergehende und 3 aufsteigende Stäbe, erstere von Stahl, letztere von Messing zu construiren.

Die wie hier gezeichnet construirten Pendel heifsen der Gestalt wegen **Rostpendel**.

Fig. 305.

Will man einfachere Pendelstangen construiren, so mufs man ein Metall statt des Messings nehmen, welches eine stärkere Ausdehnung hat. Aufser dem Blei, welches seiner Weichheit wegen nicht anzuwenden ist, hat unter allen Metallen das Zink den gröfsten Ausdehnungs-Coefficient, den man nach pag. 196 im Mittel $= 0{,}0030$ nehmen kann.

Das einfachste Compensationspendel ist wohl Fig. 304: *ab* und *ef* sind eiserne Stäbe, *cd* ist ein Zinkstab. Bezeichnet man die Länge *af* mit l, *cd* mit h, so hat man die Bedingungsgleichung für vollständige C:

$$12(l + h) = 30h$$

woraus

$$h = \frac{2}{3} l$$

Für das Secundenpendel $l = 38$ Zoll hat man $h = 25\frac{1}{3}$ Zoll.

2. Eine zweite C. geschieht mittelst Quecksilber nach Fig. 305: *a* ist der Aufhängepunkt des Pendels, an der eisernen



Fig. 306.

Stange *ab* ist der eiserne Rahmen *cdef* befestigt und in diesem befindet sich ein Glas *efgh*, welches bis *ik* mit Quecksilber gefüllt ist. Nahe der Mitte *p* der Quecksilberhöhe liegt d. Schwingungspunkt des Pendels und die Pendellänge ist $ap = l$.

Die Ausdehnung des Eisens geschieht von oben nach unten, die des Quecksilbers von unten nach oben, indem es in dem Gefäfs aufsteigt. Der Ausdehnungs-Coefficient des Eisens ist im Mittel 0,00117; der des Quecksilbers 0,018; mithin hat man für vollkommene C.

$$117 \cdot l = 1800 \frac{fk}{2}$$

woraus

$$fk = \frac{117}{900} l = 0{,}13 \cdot l$$

Beim Secundenpendel ist $l = 38$ Zoll, folglich die Höhe *fk* des Quecksilbers 4,94 beinahe 5 Zoll, die Länge von *a* bis *ef* $= 40\frac{1}{4}$ Zoll.

Andere Compensationsweisen bei Pendeln, durch Biegung von Federn, durch Hebelwerk werden hier übergangen.

3. Die C. bei Taschenchronometern geschieht ebenfalls auf verschiedene Weise; das Princip dabei ist ähnlich dem beim Pendel. Die Kraft der Spirale *g* Fig. 298, welche die Unruhe in abwechselnde Hin- und Herbewegung versetzt, mufs mit dem Trägheitsmoment des Schwungringes *f* in

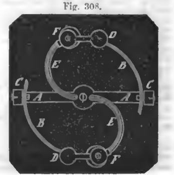
Fig. 307.

einem ganz bestimmten Verhältnifs sein; bleibt dies constant, so bleiben auch die Schwingungen gleichzeitig. Bei Verlängerung und Verkürzung der Spirale *g* durch Wärme-Einflufs wird die Kraft geringer und gröfser. Im ersten Fall ist also das Trägheitsmoment des Schwungringes *f* zu vermindern, im zweiten Fall zu vermehren, und dies geschieht nach Fig. 306, dafs unabhängig von der Spirale *g* Fig. 298 auf der Oberfläche oder einem Stege der Unruhe 2 Metallfedern in *a*, *a* befestigt werden, die bei Vermehrung der Wärme nach dem Mittelpunkt *c* hin sich krümmen, die an deren Endpunkten befindlichen Gewichte *p*, *p* also dem Mittelpunkt *c* näher führen, und somit das Trägheitsmoment vermindern, während bei verminderter Wärme die Federn vom Mittelpunkt *c* sich entfernen, und das Trägheitsmoment vermehren.

Die Federn sind nämlich aus Platten gewalzt, die aus 2 verschiedenen Metallen z. B. aus Stahl- und Messing- oder aus Platin- und Goldplatten zusammengelöthet sind, und während des Walzens bis zur äufsersten Schwäche immer aus 2 verschiedenen Metallblättchen bestehen bleiben. Nun werden Streifen in der erforderlichen Länge *ap* in der Art gekrümmt, dafs das Metall der gröfseren Ausdehnungsfähigkeit, also Messing oder Gold die convexe Seite, das Metall der geringeren Ausdehnung, also Stahl oder Platin, aber die concave Seite bildet.

Bei vermehrter Luftwärme dehnt sich also die convexe Seite der Feder mehr aus als die concave, und das convex liegende Metall veranlafst damit gewaltsam die gröfsere Verkrümmung der Feder, während bei verminderter Luftwärme das convex liegende Metall sich stärker zusammenzieht als das concav befindliche, und die Verflachung der Feder hervorbringt. Eine zweite Compensationsweise geschieht wie beim Pendel mit Quecksilber und nach demselben Princip der Verminderung oder Vermehrung des Trägheitsmoments wie bei der erst gedachten C. nach Fig. 307. *A* ist der Steg; *E*, *E* sind 2 Capillaritätsröhren, in welchen das Quecksilber bei vermehrter Luftwärme nach dem Mittel-

Fig. 308.



punkt der Unruhe hin sich ausdehnt, und deren Trägheitsmoment vermindert, wogegen es bei verminderter Luftwärme sich zusammenzieht, von dem Mittelpunkt sich entfernt und das Moment vermehrt.

Man kann diese C. mit der ersteren verbinden, dann sind *B*, *B* Compensationsstreifen aus 2 Metallen wie Fig. 306, *D*, *D* Gewichte, um die primitive C., die hauptsächlichste zu bewirken; *F*, *F* Verbindungen zwischen *B* und *E*, und *C* Stellschrauben für die Federn *B*.

Complement ist Ergänzung, nämlich eines Theils zu einem Ganzen. Eine Gröfse, der man ein C. beilegt, wird also als ein Theil eines Ganzen betrachtet, von dem das C. der ergänzende zweite Theil ist. So z. B. versteht man unter C. eines ächten Bruchs dessen Ergänzung zur Einheit ($\frac{2}{7}$ ist das C. von $\frac{5}{7}$). Der Art.: Arithmetisches C. eines Logarithmus giebt über dieses C. genauere Auskunft.

C. eines Winkels ist dessen Ergänzung zu einem Rechten, das C. eines Kreisbogens dessen Ergänzung zum Quadranten, so dafs deren C. positiv und negativ sein können: Bogen oder $\angle 30°$ hat das C. $= 60°$; Bogen oder $\angle 100°$ hat das C. $= -10°$. Polhöhe und Aequatorhöhe sind gegenseitig Complemente. Die Ergänzung eines Winkels zu $180° = 2$ Rechten und eines Bogens zum Halbkreise heifst Supplement.

Complex s. v. w. Aggregat, eine aus mehreren Gliedern bestehende (in Theilen durch die Vorzeichen + und − verbundene) Zahlengröfse als: $x - y + z$.

Complexion. Die Zusammenstellung mehrerer einfacher Zahlengröfsen (Elemente), ist also s. v. w. Combination, jedoch mit Ausnahme der Unionen.

Concavgläser, Hohlgläser, sind Gläser mit Oberflächen, welche in Form eines Theils einer hohlen Kugeloberfläche ausgeschliffen sind. Sind beide Oberflächen eines Glases hohl, so heifst das Glas concav-concav oder biconcav; eine Anwendung davon s. d. Art.: Brille für die Ferne. Ist eine der beiden Oberflächen eben, die andere hohl, so heist das Glas planconcav. ist eine Oberfläche erhaben, die andere hohl, so heifst das Glas convex-concav oder concav-convex. Die planconcaven Gläser zerstreuen die Lichtstrahlen, wie die biconcaven es thun; die Wirkung der convexconcaven Gläser s. im Art.: Brennglas No. 5.

Concentrisch heifsen Kreise, die in derselben Ebene liegen, und einerlei Mittelpunkt haben.

Conchoide, Muschellinie, mufs geschrieben: Konchoide, von κογχη, die Muschel.

Concrete Gröfse od. continuirliche Gröfse s. v. w. Raumgröfse, vgl. collective Gröfse.

Concrete Zahl s. v. w. benannte Zahl.

Configurationen sind im Allgemeinen s. v. w. Aspecten (s. d.), im engeren Sinne das jedesmalige Bild, welches irgend eine Stellung eines Planeten mit seinen Trabanten wie z. B. Jupiter mit seinen 4 Monden dem Beschauer gewährt; indem einige der Monde bald in Conjunction, bald in Opposition, andere in Quadraturen, diese verfinstert, jene erhellt erscheinen. Denkt man sich die Bilder vom Jupiter aus gesehen, so hat man jovicentrische, von der Erde aus geocentrische C.

Confocale Kegelschnitte heifsen Kegelschnitte, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben. Fig. 188, pag. 296 giebt ein Beispiel von Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, die sämmtlich confocal sind.

Congruent ist das, was mit einander übereinstimmt, in der Geometrie, was in Form und Gröfse übereinstimmt. Zwei Raumgröfsen sind congruent (≌), wenn beide vollkommen übereinstimmend sind, so also, dafs eine für die andere genommen werden kann. In der Planimetrie ist daher auch Congruenz gleichbedeutend mit dem Begriff: Deckung. Z. B. Kreise von gleichen Halbmessern decken sich (sind ≌), d. h. man kann beide Kreise so auf einander legen, dafs sie mit ihren Umfängen nur einen Umfang bilden.

Die wichtigsten Sätze in der Elementar-Geometrie sind die von der Congruenz der Dreiecke (s. d. folg. Art.). In der Stereometrie kann man Congruenz nur dann mit Deckung bezeichnen, wenn man unter dieser die Möglichkeit versteht, die Flächen und die Körper so in einander zu schieben, dafs bei ersteren und bei letzteren die Begrenzungen in allen Punkten zusammenfallen.

Würfel sind ≌ wenn sie gleiche Seiten haben, alle Kugeln von gleichen Halbmessern sind ≌, normale Cylinder und Kegel sind ≌, wenn sie gleiche Grundkreise und gleiche Höhen haben u. s. w.

Congruenz der Dreiecke. Diese findet natürlich nur statt, wenn jede der 3 Seiten des einen Dreiecks einer der 3 Seiten des anderen gleich ist, und wenn die in beiden Dreiecken gleichliegenden Winkel einzeln einander gleich sind. Wie dies z. B. bei den Dreiecken *ABC* und *DEF* Fig. 153, pag. 263 der Fall ist. Um nun die C. zweier Dreiecke zu erfahren, soll man nicht nöthig haben, alle die genannten 6 Stücke der Dreiecke einzeln mit einander zu vergleichen, und die Geometrie lehrt, dafs man nur die Gleichheit

dreier Stücke in zweien Dreiecken zu kennen nöthig hat, um daraus die Gleichheit der übrigen 3 Stücke und die Congruenz der beiden Dreiecke zu folgern. Wie überhaupt die Elementargeometrie in ihren Lehrsätzen überall die Aufgabe löst, aus der Beschaffenheit und dem Zusammenhang einzelner Raumgröfsen die Beschaffenheit und die Art des Zusammenhangs anderer mit jenen zusammenhangenden Raumgröfsen zu finden.

So viele verschiedene 3 Stücke nun in 2 Dreiecken als gleich gegeben sein können, aus welchen die C. der Dreiecke hervorgeht, so viele Sätze (Lehrsätze) über die C. der Dreiecke giebt es.

Die als gleich zu gebenden 3 Stücke sind nun:

1. drei Seiten,
2. zwei Seiten und ein Winkel,
3. eine Seite und zwei Winkel,
4. drei Winkel.

Diese 4 Bestimmungsfälle sind aber nicht alle geeignet, auf die C. der Dreiecke zu schliefsen; unmittelbar ist es nur der erste Fall. Wenn nämlich in 2 Dreiecken 3 Seiten des einen den 3 Seiten des anderen Dreiecks einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke $\cong$.

Der zweite Bestimmungsfall: „Zwei Seiten und ein Winkel" schliefst in Beziehung auf die Lage des gegebenen Winkels 2 Fälle in sich: Entweder der Winkel wird von beiden Seiten eingeschlossen, oder er liegt einer von beiden Seiten gegenüber. Im ersten Fall sind die Dreiecke $\cong$. Wenn nämlich in 2 Dreiecken 2 Seiten des einen zweien Seiten des anderen Dreiecks einzeln einander gleich sind, und die von beiden Seiten eingeschlossenen Winkel in beiden Dreiecken sind einander gleich, so sind die Dreiecke $\cong$.

Der zweite Fall dagegen läfst Dreiecke zu, die nicht $\cong$ sind. Beschreibt man

Fig. 309.

nämlich aus A mit AB den Kreisbogen BD, zieht AD, so hat man in den beiden verschiedenen, also **nicht congruenten Dreiecken** ABC und ADC.

$$AB = AD$$
$$AC = AC$$
$$\angle C = \angle C$$

Dafs in diesem Falle 2 verschiedene Dreiecke möglich sind, liegt offenbar darin, dafs die Seite AB, die dem gegebenen $\angle C$ gegenüber liegt, kleiner ist als die gegebene zweite dem $\angle C$ anliegende Seite AC. Denn wird im $\triangle ABC$ mit den Seiten AB und AC der $\angle B$ gegeben, welcher der gröfseren Seite AC gegenüber liegt, so schneidet der Kreisbogen, der aus A mit AC beschrieben wird, die Seite BC erst in deren Verlängerung BE, und es entsteht das $\triangle ABE$, in welchem zwar $AB = AB$, $AE = AC$, aber $\angle ABE$ das Suplement von $\angle ABC$ ist, so dafs beide Dreiecke ABC und ABE nicht einerlei Winkel zu Bestimmungsstücken haben.

Demnach erleidet dieser zweite Fall eine Einschränkung, und 2 Dreiecke sind $\cong$, wenn 2 Seiten des einen zweien Seiten des anderen Dreiecks einzeln einander gleich sind, und wenn die der gröfseren von beiden gegebenen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.

Der dritte Bestimmungsfall: „eine Seite und zwei Winkel" bedarf der Einschränkung, dafs die gleichen Winkel einerlei Lage gegen die gegebene Seite haben müssen; die Dreiecke sind also nur dann $\cong$, entweder wenn beide gegebene Winkel der gegebenen Seite anliegen, oder wenn einer derselben der Seite gegenüber liegt, dafs der anliegende Winkel dem anliegenden und der gegenüberliegende Winkel dem gegenüberliegenden in beiden Dreiecken gleich ist. Denn nimmt man in dem $\triangle ABC$ von B aus den $\angle ABD = \angle ACB = \alpha$, so hat man in den beiden nicht congruenten Dreiecken ABC u. ABD

$$AB = AB$$
$$\angle CAB = \angle DAB$$
$$\angle ACB = \angle ABD$$

In dem $\triangle ABC$ ist α der Seite AB gegenüberliegend in dem $\triangle ABD$ ist α der Seite AB anliegend.

Der vierte Bestimmungsfall: „Drei Winkel gleich" giebt nur ähnliche Dreiecke, wie $\triangle ABC \sim \triangle abc$, in welchen, wenn $\triangle abc$ nach Abc verlegt wird, $bc \neq BC$ ist.

Die 3 Bestimmungsstücke, unter wel-

Fig. 310.

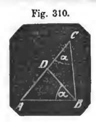
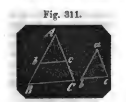


Fig. 311.



chen jedesmal congruente Dreiecke hervorgehen, sind demnach:
1. drei Seiten,
2. zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel,
3. zwei Seiten und der der gröfseren von beiden gegenüberliegende Winkel
4. eine Seite und zwei gleichliegende Winkel.

Und man hat also auch 4 Lehrsätze über die C. der Dreiecke.

Die Elementargeometrie gestattet nicht in der systematisch auf einander folgenden Entwickelung und Erkenntnifs ihrer Wahrheiten die Sätze über die C. der Dreiecke in der obigen Ordnung und unmittelbar auf einander folgend. In dem uns bekannten ältesten Lehrbuch der Geometrie, im Euklid, bilden die hier unter No. 2 aufgeführten Bestimmungsstücke den ersten Lehrsatz (Satz 4) und zugleich den ersten Satz über die C. der Dreiecke; in dem Art.: „Axiom" ist derselbe pag. 263 mit Fig. 153 nach Euklid erwiesen.

Nachdem nun Euklid nach Satz 5 und 6 über die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks in Satz 7 erwiesen hat, dafs wenn über einer geraden Linie AB von deren Endpunkten A, B aus zwei gerade Linien AC, BC in einem Punkt C zusammenlaufen, zwei andere gerade Linien AD, BD nicht in einem anderen Punkt D zusammenlaufen können, wenn $AD = AC$ und zugleich $BD = BC$ ist, giebt Satz 8 als nothwendige Folge von Satz 7 den zweiten Lehrsatz über die C. der Dreiecke mit den hier unter No. 1 aufgeführten Bestimmungsstücken: 3 Seiten in beiden Dreiecken einzeln gleich.

Man beweist diesen Lehrsatz auch unmittelbar aus Euklid, Satz 5 und 6 wie folgt: Wenn nämlich

$$AB = DE$$
$$AC = DF$$
$$BC = EF$$

so lege $\triangle FDE$ mit der Seite DE an die ihr gleiche AB, so dafs $AF = AC$, $BF = BC$, ziehe CF, dann sind die Dreiecke CAF und CBF gleichschenklig, daher

$$\angle ACF = \angle AFC$$
$$\angle BCF = \angle BFC$$

daraus $\angle ACB = \angle AFB$

in den Dreiecken ACB und AFB sind nun zwei Seiten, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, die Dreiecke also, nach Euklid Satz 4, $\cong$.

Fig. 312.



Erst nach einer Reihe von 11 Lehrsätzen nebst 6 Aufgaben kommt in Satz 26 der dritte Satz über die C. der Dreiecke unter den hier No. 4 aufgeführten Bedingungen: „Eine Seite und zwei Winkel gleich," der in 2 Theile getheilt ist, 1) wenn die Seite beiden Winkeln und 2) wenn die Seite nur einem Winkel anliegt. Die Beweise sind folgende:

1. In beiden Dreiecken CAB, FDE sind gegeben

$$AB = DE$$
$$\angle CAB = \angle FDE$$
$$\angle CBA = \angle FED.$$

Nimmt man nun an AC nicht $= DF$, so mufs AC entweder gröfser oder kleiner sein als DF; ist $AC > DF$, so ist irgend

Fig. 313.



eine Linie AG, die $<$ als AC ist, $= DF$, zieht man dann GB, so ist in den beiden Dreiecken GAB, FDE

$$AB = DE$$
$$AG = DF$$
$$\angle GAB = \angle FDE$$

folgt $\triangle GAB \cong \triangle FDE$ nach Satz 4

hieraus $\angle GBA = \angle FED$

Vorausgesetzt ist aber

$$\angle CBA = \angle FED$$

folglich $\angle GBA = \angle CBA$
welches unmöglich ist.

Bei der Annahme, dafs $AC < DF$, würde eine Linie

$$AH\ (>AC) = DF \text{ sein;}$$

dann erhält man durch gleiche Schlüsse

$$\angle ABH = \angle ABC$$

welches wiederum unmöglich ist, daher ist

$$AC = DF$$

und nach Satz 4

$$\triangle CAB \cong \triangle FDE$$

2. In den Dreiecken *CAB* und *FDE* sind gegeben:

$$AC = DF$$
$$\angle CAB = \angle FDE$$
$$\angle CBA = \angle FED$$

Nimmt man an, *AB* sei nicht gleich *DE*, so sei $AJ (< AB) = DE$, ziehe *CJ*, so ist nach Satz 4:

$$\triangle CAJ \cong \triangle FDE$$

also $\angle CJA = \angle FED$

also auch $\angle CJA = \angle CBA$

welches unmöglich ist, da Satz 16 beweist, dafs ein Aufsenwinkel gröfser ist, als der innere ihm gegenüber liegende Winkel.

Setzt man $AB < DE$, so würde

$$AJ' (> AB) = DE$$

sein und $\angle CBA$ der Aufsenwinkel von von *CJ'A* werden. Es kann mithin nur $AB = DE$ sein, und dann ist nach Satz 4: $\triangle CAB \cong \triangle FDE$.

Der erste Theil des Lehrsatzes beruht auf keinem späteren Lehrsatze als auf Satz 4, und hätte daher Satz 5 sein können, wenn Euklid nicht vorgezogen hätte, beide Theile zu einem Satz zu vereinigen, wie es auch die späteren Lehrbücher thun. Dafs der Satz nicht unmittelbar dem 16. Satz folgt, auf den allein der Beweis sich beruft, liegt wohl darin, dafs die dem Satz 16 folgenden Sätze dem Satz über die Aufsenwinkel sich näher anschliessen.

Den 4. Satz: „Dreiecke sind $\cong$, wenn in ihnen zwei Seiten und der der gröfseren von beiden gegenüberliegende Winkel einzeln gleich sind" hat Euklid nicht aufgestellt.

Der Beweis wird geführt, nachdem die

Fig. 314.



Sätze vorangegangen sind: 1. In jedem $\triangle$ steht der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber (Euklid, Satz 18) und 2. In einem $\triangle$ ist der Aufsenwinkel gröfser als jeder der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel (Euklid, Satz 16) nämlich:

In den beiden Dreiecken *ACB* und *DFE* sei

$$AC = DF$$
$$AB = DE > (AC = DF)$$
$$\angle ACB = \angle DFE$$

Lege $\triangle DFE$ auf $\triangle ACB$, so dafs *D* auf *A*, *F* auf *C* fällt, so fällt *FE* in die Richtung *CB*. Ist nun $CB > FE$, so fällt E innerhalb *CB*, etwa in *G*; ziehe *AG*, dann ist:

$\triangle ACG \cong \triangle DFE$ nach Satz 4

daher $AG = DE$

aber auch $AB = DE$

daher $AG = AB$

folglich $\angle AGB = \angle ABG$ Satz 5.

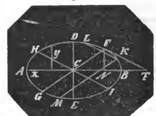
Nun ist $\angle ACB > \angle ABC$ nach Satz 18, folglich auch $\angle ACB > \angle AGB$ welches nach Satz 16 unmöglich ist.

Auf gleichen Widerspruch kommt man bei der Annahme, dafs $CB < FE$, wo dann *E* in die Verlängerung von *CB*, etwa in *H* fällt.

Conjugirt (verbunden) oder coordinirt (zugeordnet) heifsen in der Geometrie Punkte und Linien, welche zu einer gewissen gegenseitigen Abhängigkeit mit einander verbunden sind oder in gewisser Beziehung zu einander gehören und einander zugeordnet werden (s. die folg. Art.)

Conjugirte Axe. 1. Bei der Ellipse heifst die kleine Axe oder Nebenaxe (*DE* Fig. 314) zugleich die c. A. (zur grofsen Axe oder Hauptaxe *AB*). Diese c. A. ist die mittlere geometrische Proportionale


Fig. 315.



zwischen der grofsen Axe und dem Parameter; man kann aber eben so gut erklären: der Parameter ist diejenige Linie, welche die dritte geometrische Proportio-

nale zwischen der kleinen Axe und der grofsen Axe ist. Die erste Erklärung ist angemessen, wenn die rechtwinklige Coordinatengleichung durch die grofse Axe (a) und den Parameter (p) gegeben ist; die zweite, wenn sie durch die grofse Axe (a) und die kleine Axe (c) gegeben ist. Man hat nämlich für die Ellipse

$$y^2 = p\left(x - \frac{x^2}{a}\right)$$

und

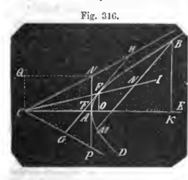
$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\,(ax - x^2)$$

woraus zu ersehen, dafs $c^2 = ap$

und $p = \frac{c^2}{a}$

2. Bei der Hyperbel nennt man eben so die Nebenaxe oder Zwerchaxe zugleich c. A. in Beziehung auf die Hauptaxe (vgl. conjugirte Hyperbel), und sie ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen

Fig. 316.



der Hauptaxe und dem Parameter, wie man auch den Parameter als die dritte Proportionale zwischen der Hauptaxe und der c. A. feststellen kann. Es sei BAD das Stück einer Hyperbel, A der Scheitel, CE durch A die Axe der Hyperbel, nämlich die auf dem Curvenelement A im Scheitel normal befindliche Linie.

Bezeichnet man mit A' den Scheitel der zweiten Hyperbel, welche mit der Hyperbel BAD in einerlei Ebene durch den über die Spitze hinaus verlängerten Kegel gebildet wird, so sei C die Mitte zwischen A' und A, also der Mittelpunkt beider Hyperbeln; $A'A = 2CA$ die Hauptaxe (a). Es seien ferner CH und CP die beiden Asymptoten der Hyperbel, NP durch A auf CA normal, so ist NP die Zwerchaxe oder die c. A. (c). Bezeichnet man nun wieder den Parameter mit p, so hat man für rechtwinklige Coordinaten (wie $AK = x$ und $BK = y$)

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{a}\right)$$

und

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\,(ax + x^2)$$

woraus wie bei der Ellipse

$$c^2 = ap$$

und $p = \frac{c^2}{a}$

Conjugirte Durchmesser. Unter Durchmesser einer Curve versteht man jede gerade Linie, die als Abscisse genommen an beiden Seiten in gerader Linie gleiche mit einander parallele Ordinaten zulässt. Es ist mithin jede Axe zugleich Durchmesser wie AB, Fig. 314, in der Ellipse, und AE, Fig. 315, in der Hyperbel, wo die gleichen Ordinaten rechtwinklig sind, und auch bei der Parabel und dem Kreise findet dies statt. Beim Kreise ist jeder beliebige Durchmesser zugleich Axe, und die gleichen Ordinaten sind rechtwinklig auf denselben, dagegen hat die Parabel keinen anderen Durchmesser als die Axe aufzuweisen, wohl aber die Ellipse und die Hyperbel, bei welchen jede durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie ein Durchmesser ist, wie FG durch C, Fig. 314, CJ durch C Fig. 315.

Aufser den Axen bei der Ellipse und der Hyperbel gehören zu allen übrigen Durchmessern schiefwinklige Ordinaten.

2. Um bei der Ellipse, Fig. 314, für einen beliebigen Durchmesser HJ den Winkel zu finden, unter welchem die Ordinaten zu beiden Seiten gleich grofs sind, construire die mit HJ parallele Tangente FT, ziehe durch den Berührungspunkt F den Durchmesser FG durch C, so ist $\angle FCB$ der gesuchte Coordinatenwinkel; alle mit FG parallele Chorden oder Doppelordinaten wie KM werden von dem Durchmesser HJ halbirt. Desgleichen halbirt der Durchmesser FG alle Chorden, die mit dem Durchmesser HJ ∓ sind, wie z. B. $OK = OL$, und HJ, FG sind conjugirte Durchmesser.

3. Die Construction einer Tangente ∓ einem gegebenen Durchmesser geschieht aber einfach aus folgender Betrachtung: In dem Art.: „Berührende gerade Linie, Beispiel 2, Ellipse“ pag. 341 mit Fig. 210 hat man rechts, Z. 13 v. u.

$$tg(\angle BTD) = \frac{y}{s} = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a-x}{y}$$

wo a und c die halben Axen bezeichnen.

Fällt man Fig. 314 das Loth FN auf AB, so ist hier zu setzen $\angle FTC = \alpha$ für $\angle BTD$, und es ist ferner

$$FN = y;\; TN = s$$

$DC = c$; $BC = a$; $CN = a - x$

Nun ist aber auch $\angle FCN = \beta$ gesetzt:

$$\cot \beta = \frac{CN}{FN} = \frac{a - x}{y}$$

Da nun

$$tg\, \alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y}$$

so ist

$$tg\, \alpha = \frac{c^2}{a^2} \cot \beta$$

oder $c^2 \cot \beta = a^2\, tg\, \alpha$

Da nun $\angle \alpha$ in $\angle HCA$ gegeben ist, so läſst sich $\angle FCB = \beta$ folgendermaſsen construiren.

Ist Fig. 316, wie in Fig. 314, $AC = a$, $CD = c$, HJ der gegebene Durchmesser, also $\angle HCA = \alpha$, so errichte das Loth AO bis in die Verlängerung von CH, ziehe DA, $OE \parallel AC$, $EK \parallel DA$, ziehe DK und $CF \parallel DK$ so ist $\angle FCB = \beta$, F der Berührungspunkt der zu zeichnenden Tangente und $FT \parallel HJ$ die Tangente selbst. Denn es ist, wenn man noch AE zieht:

$\square ACEO = AC \times AO = a \cdot a\, tg\, \alpha = a^2\, tg\, \alpha$

folglich $\triangle EAO = \frac{1}{2} a^2\, tg\, \alpha$

Fig. 317.

Da nun $KE \parallel AD$

so ist $\triangle DKC = \triangle EAC = \frac{1}{2} a^2 \cdot tg\, \alpha$

Es ist aber auch

$\triangle DKC = \frac{1}{2} DC \cdot KC = \frac{1}{2} c \cdot KC$

folglich ist $a^2 \cdot tg\, \alpha = c \cdot KC$

Nach der Formel ist aber

$a^2 \cdot tg\, \alpha = c^2 \cdot \cot \beta$

folglich ist $KC = c \cdot \cot \beta$

und hieraus $\angle DKC = \beta$

folglich, da $FC \parallel DK$

$\angle FCB = \beta$

4. Ist in der Hyperbel, Fig. 315, CJ durch F ein beliebiger Durchmesser und man zeichnet die Tangente HG in F, so werden alle mit HG parallele Chorden oder Doppelordinaten wie BM durch CJ halbirt, es ist also $BN = MN$. Sind CH und CP die beiden Asymptoten der Hyperbel, so heiſsen CF und HG die conjugirten Durchmesser, wie (s. den vor. Art.) CA und NP die conjugirten Axen.

Die Construction der Tangente an einem gegebenen Punkt der Hyperbel ist in dem Art.: „Berührende gerade Linie" pag. 342 mit Fig. 212 und 213 gezeigt. Bezeichnet man in Fig. 315 den $\angle FTO$, den die Tangente mit der Axe bildet mit α so ist nach pag. 342

$$tg\, FTO = tg\, \alpha = \frac{p}{2a} \cdot \frac{a + x}{y}$$

wo p den Parameter und $2a$ die Hauptaxe bedeutet. Dieser Bezeichnung nach ist Fig. 315 der Halbmesser $CA = a$ und setzt man demgemäſs $AN = c$ so hat man, da nach No. 2

$$NP^2 = 2AC \cdot p$$

$$4c^2 = 2a \cdot p$$

woraus $p = \frac{2c^2}{a}$

Diesen Werth in den Ausdruck für $tg\, \alpha$ gesetzt, giebt

$$tg\, \alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a + x}{y}$$

Nun ist Fig. 315 für den Punkt F:

$$CO = a + x$$

$$FO = y$$

und bezeichnet man den $\angle FCO$, den der Durchmesser durch F mit der Axe CE bildet, mit β, so ist

$$CO\ tg\, \beta = FO$$

oder

$$(a + x)\, tg\, \beta = y$$

woraus

$$\frac{a + x}{y} = \cot \beta$$

mithin ist auch hier wie ad 3 bei der Ellipse

$$tg\, \alpha = \frac{c^2}{a^2}\, tg\, \beta$$

und man kann bei der Hyperbel die Tangente wie bei der Ellipse in Beziehung auf einerlei Formel construiren.

Conjugirte Hyperbeln sind diejenigen Hyperbeln, welche in einerlei Ebene liegen und dieselben conjugirten Axen haben, so aber, daſs die Hauptaxe der einen die Nebenaxe der anderen Hyperbel ist. Errichtet man, Fig. 315, das Loth CQ auf der Hauptaxe CE, zieht $NQ \parallel CE$, so ist Q der Scheitel der Hyperbel, welche der Hyperbel BAD conjugirt ist.

Hieraus ist zugleich ersichtlich, weshalb bei der Hyperbel die Hauptaxe nicht groſse Axe, und die Nebenaxe nicht kleine Axe genannt werden kann, weil es nämlich Hyperbeln giebt, bei welchen die Nebenaxe gröſser ist, als die Hauptaxe.

2. Die in dem Art.: „conjugirte Axe" No. 2 angeführten rechtwinkligen Coordinatengleichungen für die Hyperbel sind

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{a}\right)$$

wo $p = \frac{c^2}{a}$ ist

und $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$

In diesen beiden Gleichungen hat man nur *a* mit *c* zu vertauschen, um die Gleichungen für die c. H. zu erhalten. Diese sind also:

$$y_1^2 = p_1\left(x + \frac{x^2}{c}\right)$$

wo $p_1 = \frac{a^2}{c}$ ist

und $y_1^2 = \frac{a^2}{c^2}(cx + x^2)$

In den vorstehenden Gleichungen sind *a* und *c* die ganzen Axen.

3. Bezeichnet man die ganze Hauptaxe (wie es häufig geschieht) mit $2a$, die Nebenaxe mit $2c$, so hat man

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

Nimmt man die Abscissen nicht vom Scheitel aus, sondern als Anfangspunkt derselben den gemeinschaftlichen Mittelpunkt *C*, Fig. 314, bezeichnet diese mit *u* so ist $u = a + x$

also $x = u - a$

Diesen Werth in die Coordinatengleichung gesetzt, giebt

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}[2a(u-a) + (u-a)^2]$$

woraus

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

c und *a* mit einander vertauscht, giebt die Gleichung für die c. H.

$$y_1^2 = \frac{a^2}{c^2}(u^2 - c^2)$$

Die Asymptoten beider c. H. schneiden sich in dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt *C*. In dem Art.: „Asymptote," pag. 159, Beispiel 3 ist die Gleichung für die Hyperbel in allgemeiner Form aufgestellt:

$$y^2 = ax + bx^2$$

und $tg\,\alpha$, nämlich die Tangente des Winkels, den die Asymptote mit der Hauptaxe bildet ($\angle NCA$ Fig. 314), ist $= \sqrt{b}$ gefunden worden.

Verwandelt man die obige Gleichung in No. 3

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

in die Form der Gleichung $y^2 = ax + bx^2$, so hat man

$$y^2 = \frac{2c^2}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

und es ist jenes $b = \frac{c^2}{a^2}$ und $\sqrt{b} = \frac{c}{a}$

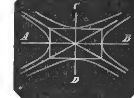
mithin $tg\,\alpha = \frac{c}{a}$, wie Fig. 314 bildlich darstellt.

Vertauscht man nun *c* und *a*, so wird die Tangente des Winkels, den die Asymptote mit der conjugirten Axe *c* bildet:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{a}{c}$$

Da nun α und α_1 ($\angle NCA$ u. $\angle NCQ$ Fig. 314) Complements-Winkel sind, so haben beide c. H. dieselben Asymptoten. Von den 4 Hyperbeln *A, B, C, D* Fig. 316

Fig. 318.



sind *A* und *B*, so wie *C* und *D* Ergänzungs-Hyperbeln oder entgegengesetzte Hyperbeln; je 2 derselben gehören zu einerlei Kegel, und jedes Paar derselben ist mit dem anderen Paar conjugirt.

Conjunction, Zusammenkunft (Kalenderzeichen ☌) eines Gestirns mit der Sonne ist dessen Stand gegen die Sonne in Beziehung auf den der Erde, alle 3 Weltkörper in einerlei Ebene gedacht, und von der Erde aus betrachtet in der Art, dafs das Gestirn mit der Sonne nach derselben Richtung steht; das Gestirn hat also mit der Sonne einerlei Länge, und wenn beide mit der Erde in wirklich einerlei Ebene sich befinden, auch einerlei Abweichung (s. Aspecten).

Der Gegensatz von C. ist O p p o s i t i o n, G e g e n s c h e i n (Kalenderzeichen ☍) eines Gestirns mit der Sonne, wenn nämlich beide Weltkörper von der Erde aus gesehen, nach entgegengesetzten Richtungen stehen; beider Länge ist dann um 180° verschieden. Liegen beide Weltkörper mit der Erde in wirklich einerlei Ebene, so haben beide gleiche aber entgegensetzte Abweichungen.

In Fig. 317 bedentet *S* die Sonne, *E* die Erde, *K* den Merkur, *V* die Venus, *M* den Mars; die Kreise stellen deren Bahnen vor. Merkur und Venus sind die einzigen **u n t e r e n P l a n e t e n** (deren Bahnen von der

Fig. 319.



der Erde eingeschlossen werden), und man ersieht, dafs diese keine Opposition sondern nur C. haben können. Stehen Merkur und Venus in K und V, also zwischen Sonne und Erde, der Erde am nächsten, so heifst deren C. **untere Conjunction**, stehen sie in K' und V', so dafs zwischen ihnen und der Erde die Sonne steht, sind sie der Erde am fernsten, so heifst deren C. **obere Conjunction.**

Mars, der nächste der oberen Planeten (von deren Bahnen die Erdbahn eingeschlossen wird), hat wie alle oberen Planeten C. und Opposition, in M' nämlich C., in M Opposition.

Die Beobachtungen der C. und Oppositionen der Gestirne giebt unmittelbar Auskunft über deren Umlaufszeiten um die Sonne. Merkur z. B. kommt alle 116 Tage mit der Sonne in untere C.; gesetzt in diesen 116 Tagen wäre die Erde von E nach E'' gekommen, so hat Merkur in derselben Zeit den ganzen Umlauf um die Sonne und dazu noch den Bogen KK'' beschrieben. Setzt man die Umlaufszeit der Erde 365 Tage, so hat die Erde in 116 Tagen $\frac{116}{365}\,360^\circ = 114\frac{1}{2}^\circ$ zurückgelegt; Merkur aber $360^\circ + 114\frac{1}{2}^\circ = 474\frac{1}{2}^\circ$; die Umlaufszeit des Merkur ist also

$$\frac{360^\circ}{474\frac{1}{2}^\circ} \times 116 \text{ Tagen} = 88 \text{ Tage.}$$

Steht der Mond in C., so ist **Neumond**, steht er in Opposition, so ist **Vollmond.**

Die Mitte des Bogens zwischen C. und Opposition (90° oder 270° von der Erde entfernt) heifst **Quadratur** (s. Aspecten) und zwar die, in welche das Gestirn aus der C. tritt, die **erste Quadratur**, und die, in welche das Gestirn von der Opposition her kommt, die **zweite Quadratur.**

Conservationsbrillen werden als solche in Brillen mit Plangläsern von Händlern angepriesen, angeblich indem sie durch Brechung der Lichtstrahlen dem Auge nützlich seien; sie gewähren aber höchstens Schutz vor dem Staub. Anders ist es mit dunkelfarbigen Gläsern, welche Aerzte leidenden Augen empfehlen, damit das Licht milder und weniger reizbar ins Auge trete.

Constans, Constante, eine **unveränderliche, eine beständige Gröfse**, spielt in der Integralrechnung eine wichtige Rolle, und wird in der Regel mit C, auch mit C', K, K' u. s. w. bezeichnet, wenn mehrere verschiedene Constanten in derselben Rechnung vorkommen, wie in dem Art.: „Bahn der Weltkörper" pag. 289.

Die beiden Functionen ax und $ax + b$ haben dasselbe Differenzial a, mithin ist $\int a = ax$ und auch $= ax + b$. Beide Integrale sind nur um eine beständige Gröfse (b), um eine C. verschieden, und der erste Satz in der Integralrechnung ist der Lehrsatz, dafs zu einem Differenzial unzählig viele Integrale gehören, dafs diese alle aber nur um ein constantes Glied verschieden sein können, oder wie der Lehrsatz auch wohl ausgedrückt wird: dafs 2 oder mehrere Functionen, welche dasselbe Differenzial haben, nur um eine constante Gröfse von einander verschieden sind.

Man hat demnach

$$\int (f'x) = fx + C$$

wo C auch = Null sein kann.

Die Bestimmung der C. geschieht in jedem besonderen Fall besonders und dadurch, dafs man der Urveränderlichen einen bestimmten Werth giebt, für welchen man aus ganz einfacher Betrachtung den zugehörigen Werth des Integrals entnehmen kann, aus welchem wieder die C. entwickelt wird. Beispiele hierfür sind unter Anderm in dem Art.: Ausflufs des Wassers, pag. 218 bis 226; Ausflufs der Luft, pag. 236 und 237. So ist pag. 218, No 5 gefunden die Wassermenge M_x aus einer Oeffnung von der Höhe x als das Integral:

$$M_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\; Bx\sqrt{x} + C$$

Nun zeigt Fig. 124, dafs wenn man die Höhe $x = h$ setzt, keine Oeffnung mehr stattfindet, also kein Wasser mehr ausfliefst d. h. $M_h = 0$ ist. Da nun das Integral M_x für **jeden** Werth von x, also auch für den $= h$ richtig bleiben mufs, so hat man

$$M_h = 0 = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\cdot B\cdot h\sqrt{h} + C$$

und entwickelt

$$C = -\tfrac{2}{3}\sqrt{g}\; B\, h\sqrt{h}$$

woher nun vollständig für jedes beliebige x

$$M_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B \cdot x\sqrt{x} - \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B\, h\sqrt{h} = \tfrac{2}{3}\sqrt{g} \cdot B[x\sqrt{x} = h\sqrt{h}]$$

Hätte man statt von der Horizontalen *AB*, von der *DE* herab die Höhe x bezeichnet, so würde man nach No. 3, pag. 217, die Wassermenge M_x gefunden haben als Integral

$$M_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{g} \cdot B \cdot (h + x)\sqrt{h + x} + C$$

Für die Höhe $x = 0$ verschwindet nun die Oeffnung *DELM* in die Linie *DE*, und es fliefst kein Wasser mehr aus. Setzt man daher in das Integral $x = 0$, so entsteht

$$M_0 = 0 = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B(h + 0)\sqrt{h + 0} + C$$

woraus

$$C = -\tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B\, h\sqrt{h}$$

und es ist nun vollständig für jedes beliebige x

$$M_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B\left[(h + x)\sqrt{h + x} - h\sqrt{h}\right]$$

Um nun die Wassermenge M''_H zu finden, wenn die Oeffnung von *DE* bis *FG* herabreicht, hat man jetzt nicht H, sondern $H - h$ für x zu setzen, und man erhält

$$M''_H = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B\left[(h + H - h)\sqrt{h + H - h} - h\sqrt{h}\right]$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B\left[H\sqrt{H} - h\sqrt{h}\right]$$

wie pag. 218 als hypothesische Wassermenge ermittelt ist.

Für den Jünger der Wissenschaft möchten vielleicht die Constantenbestimmungen von *C* und *k* in dem Art.: Bahn der Weltkörper, pag. 289 bis 294 einiges Interesse haben. In dem Art.: Bewegung, ungleichförmig veränderliche, pag. 356, Formel 3 ist ein einfaches, in dem Art: Bewegung in einem widerstehenden Mittel, pag. 363, Formel 8, ein zusammengesetzteres Integral, bei welchen beiden die $C = 0$ wird.

Constellationen s. Aspecten und Astrologie.

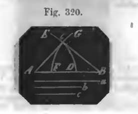
Construction in der Mathematik gehört allein der Geometrie an; sie ist die Ausführung einer Aufgabe der Geometrie durch Zeichnung. Die Elementargeometrie hat in den älteren und auch in mehreren neueren Lehrbüchern die Aufgaben als Sätze, die nur durch Construction zu lösen sind, inmitten ihrer Lehrsätze. Euklid fängt sein System mit 3 Aufgaben an: 1) Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie einen gleichseitigen Triangel zu errichten. 2) An einen gegebenen Punkt eine der gegebenen gleiche gerade Linie zu legen, und 3) Es sind 2 ungleiche gerade Linien gegeben, man soll von der gröfseren eine der kleineren gleiche Linie wegnehmen. Erst der 4te Satz ist der erste Lehrsatz, der 9., 10., 11. und 12. Satz sind wieder Aufgaben.

Constructionen sind aber zum Verständnifs der geometrischen Lehren durchaus nicht erforderlich, denn die Figuren sind nur Mittel, um der Phantasie möglichst zu Hülfe zu kommen; dafs sie richtig construirt werden, ist kein für die Wissenschaft nothwendiges Erfordernifs, es genügen Zeichnungen aus freier Hand nach dem Augenmaafs. Der Elementar-Geometrie, als reiner Wissenschaft, ist es entsprechender, wenn erst nach aufgestelltem vollständigen Lehrgebäude in Lehrsätzen die Constructionen als Anwendungen mit Berufung auf die einzelnen Lehrsätze, aus deren Wahrheiten sie hervorgehen, gelehrt werden.

Constructionen aus der Elementar-Geometrie:

1) Aus 3 gegebenen geraden Linien *a*, *b*, *c*, von denen je zwei gröfser sind, als die jedesmalige dritte, ein △ zu zeichnen, das diese Linien zu Seiten hat. Zeichne eine gerade Linie *AB* = einer der gegebenen, z. B. der *a*, beschreibe aus *A* mit einer der beiden anderen z. B. der *b* den Kreisbogen *DE*, und aus *B* mit der dritten *c* den Kreisbogen *FG*, verbinde den Durchschnittspunkt *C* beider Bogen mit den Punkten *A* und *B* durch gerade Linien, so ist △ *ABC* das Verlangte.

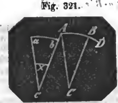
Fig. 320.



2) An einer geraden Linie *AC* von einem gegebenen Punkt *C* derselben aus einen gegebenen ∠ *x* abzutragen.

Zeichne aus dem Scheitelpunkt *c* des gegebenen ∠ *x* zwischen den Schenkeln mit beliebigem Halbmesser einen Bogen *ab*, zeichne aus *C* mit demselben Halbmesser einen Bogen *AD*, nimm das Stück *AB* desselben = dem Bogen *ab*, verbinde die Punkte *B* und *C* durch eine gerade Linie, so ist ∠ *ACB* = ∠ *x*.

Fig. 321.



3) Aus 2 gegebenen geraden Linien a, b und einem gegebenen $\angle x$ ein $\triangle$ zu zeichnen, das diese Linien zu Seiten hat, die den gegebenen $\angle$ einschliefsen.

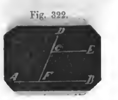
Zeichne eine gerade Linie AB = einer der beiden gegebenen, z. B. der a, trage an einen deren Endpunkte z. B. an A den $\angle x$, mache dessen zweiten Schenkel AC = der anderen gegebenen Linie b, verbinde die Punkte B und C durch eine gerade Linie, so ist $\triangle ABC$ das Verlangte.

4) Aus einer gegebenen geraden Linie a und zweien Winkeln x und y, die zusammengenommen kleiner als 2 Rechte sind, ein $\triangle$ zu zeichnen, das diese Linie zur Seite hat, und der die beiden Winkel anliegen.

Zeichne eine gerade Linie AB = der gegebenen a, trage an derselben in dem Endpunkt A den einen, in dem Endpunkt B den anderen der gegebenen Winkel, verlängere beide Schenkel bis zu ihrem Durchschnittspunkt C, so entsteht das verlangte $\triangle ABC$.

5) Durch einen gegebenen Punkt C mit einer gegebenen geraden Linie AB eine Parallele zu zeichnen.

Fig. 322.

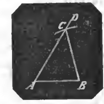


Zeichne durch C eine beliebig gelegene gerade Linie DF nach der Linie AB, trage an DC in C den $\angle DCE = \angle DFB$, so ist $CE \nparallel AB$.

6) Aus einer gegebenen geraden Linie a und zweien gegebenen Winkeln x und y, die zusammengenommen kleiner als 2 Rechte sind, ein Dreieck zu zeichnen, das die Linie zur Seite hat, und der der eine $\angle$ z. B. x anliegt, der andere y ihr gegenüber liegt.

Zeichne eine gerade Linie AB = der gegebenen a, trage an derselben in einem deren Endpunkte z. B. A den $\angle EAB = x$, und an EA in einem beliebigen Punkt D den $\angle FDA = y$. Trifft der Punkt F mit

Fig. 323.

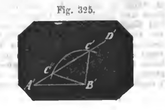


B nicht zusammen, so zeichne aus B mit DF eine Parallele BC bis in die Richtung AE, so ist $\triangle ABC$ das Verlangte.

7) Es sind zwei gerade Linien a, b und ein $\angle x$ gegeben, ein $\triangle$ zu zeichnen, welches die beiden Linien zu Seiten hat, deren einer der $\angle x$ gegenüber liegt.

I. Zeichne die gerade Linie AB = der gegebenen kleineren Linie a, trage an derselben in einem deren Endpunkte z. B. A den $\angle DAB = \angle x$, zeichne mit der gegebenen grösseren

Fig. 324.



Linie b als Halbmesser einen Kreisbogen durch AD, den Durchschnittspunkt C in AD verbinde mit B durch eine gerade Linie, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

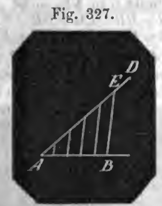
II. Zeichnet man $A'B'$ = der grösseren Linie b, den $\angle D'A'B' = x$, und schneidet die $A'D'$ durch einen mit der kleineren Linie a als Halbmesser beschriebenen Bogen, so entstehen 2 Durchschnittspunkte C' und C'' in $A'D'$ und 2 Dreiecke $A'C'B'$ und

Fig. 325.

$A'C''B'$, welche beide der Aufgabe genügen (vergl. Congruenz der Dreiecke mit Fig. 314).

8) Eine gerade Linie *AB* zu halbiren. Beschreibe aus den beiden Endpunkten *A* und *B* mit einerlei Halbmesser 2 zu beiden Seiten der Linie in *D* und *E* sich

Fig. 326.

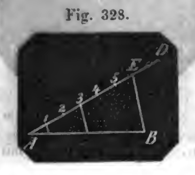


schneidende Bogen, verbinde *D* und *E* durch eine gerade Linie, so ist deren Durchschnittspunkt *C* mit *AB* die Mitte von *AB*.

9) Eine gerade Linie *AB* in eine beliebige Anzahl, z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen.

Ziehe aus einem der Endpunkte z. B. aus *A* eine beliebige gerade Linie *AD*, trage auf derselben von *A* aus 5 beliebige gleiche Theile ab, verbinde den letzten Theilpunkt *E* mit dem zweiten Endpunkt *B* der zu theilenden Linie *AB*, und aus

Fig. 327.



den übrigen Theilpunkten ziehe Parallelen mit *BE*, so schneiden diese auf *AB* gleich grofse Theile ab.

10) Eine gerade Linie in einem beliebigen Verhältnifs z. B. wie 1 : 2 : 3 zu theilen.

Fig. 328.

Auf der Linie *AB* trage von *A* aus so viele gleiche Theile ab, als die Summe der gegebenen Verhältnifszahlen beträgt, hier also $1 + 2 + 3 = 6$ Theile. Verbinde den letzten Theilpunkt *E* mit *B*, ziehe aus den der Aufgabe entsprechenden Zwischenpunkten, hier dem ersten und dem dritten Parallelen mit *BE*, so theilen diese die Linie *AB* in die verlangten Theile.

11) Einen Winkel *ACB* zu halbiren.

Zeichne aus dem Scheitelpunkt *C* einen beliebigen Kreisbogen, der die beiden Schenkel in *D*, *E* schneidet. Mit demselben oder einem anderen Halbmesser zeichne aus *D* und *E* zwei in *F* sich

Fig. 329.

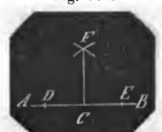


schneidende Bogen, verbinde *C* und *F* durch eine gerade Linie *CF*, so ist $\angle ACF = \angle BCF$

12) Auf einer geraden Linie *AB* in dem Punkt *C* derselben ein Loth zu errichten.

I. Trage von *C* aus auf *AB* zu beiden Seiten beliebige gleiche Stücke *CD* und *CE* ab, beschreibe aus *D* und *E* mit

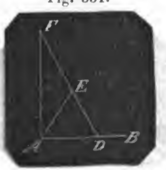
Fig. 330.



einerlei Halbmesser 2 Bogen, die sich in *F* schneiden, verbinde *F* mit *C* durch eine gerade Linie, so ist *CF* lothrecht auf *AB*.

II. Soll das Loth an dem Endpunkt *A* einer geraden Linie errichtet werden,

Fig. 331.



so beschreibe von *A* aus auf *AB* ein beliebiges gleichseitiges $\triangle AED$, verlängere die Seite *DE*, mache die Verlängerung $EF = DE$, so ist die gerade Linie *AF* lothrecht auf *AB*.

13) Von einem Punkt *C* auf eine gerade Linie *AB* ein Loth zu fällen.

I. Zeichne aus *C* einen beliebigen Bogen, der die *AB* in zwei Punkten *D* und *E* schneidet; aus den Punkten *D* und *E* zeichne wieder mit einerlei Halbmesser 2 sich in *F* schneidende Bogen, so ist die gerade Linie *CG* nach

Fig. 332.

der Richtung *CF* lothrecht auf *AB*. Hiermit und zugleich mit No. 8 ist die Aufgabe gelöst; einen Kreisbogen zu halbiren.

II. Verbinde *C* mit irgend einem Punkt *D* der Linie *AB*, beschreibe über *CD*

Fig. 333.

den Halbkreis, verbinde dessen Durchschnittspunkt *F* mit *C*, so ist die gerade Linie *CF* das Loth auf *AB*.

14) **In der unbegrenzten geraden Linie *XY* den Punkt durch Construction zu finden, der von den Punkten *A*, *B*, die mit *X*, *Y* in einerlei Ebene liegen, gleich weit entfernt ist.**

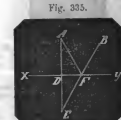
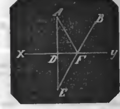
Fig. 334.

Ziehe *AB*, errichte in der Mitte *D* von *AB* das Loth *DE* bis *XY*, so ist *E* der verlangte Punkt, nämlich $AE = BE$.

15) In der unbegrenzten geraden Linie *XY* den Punkt zu finden, in dem die von den mit *XY* in einerlei Ebene liegenden Punkten *A* gezogenen geraden Linien mit *XY* gleiche Winkel bilden.

Fälle von einem der Punkte z. B. *A* das Loth *AD* mit Verlängerung $DE = AD$, ziehe *BE*, so ist deren Durchschnittspunkt *F* mit *XY* der verlangte; wenn man nämlich *AF* zieht, so ist $\angle AFX = \angle BFY$.

Fig. 335.

Hiermit ist zugleich auch durch Constr. **der Punkt gefunden, von dem aus die Summe der Wege nach *A* und *B* am kürzesten ist. Denn nimmt man irgend einen** anderen Punkt *G* in *XY*, so ist

$$AG + GB = EG + GB > EB$$
$$EB = EF + FB = AF + FB$$

folgt $\quad AG + GB > AF + FB$

16) Durch den zwischen den Schenkeln eines hohlen $\angle ACB$ gegebenen Punkt *D* nach beiden Schenkeln eine gerade Linie zu ziehen, deren beide Theile von *D* aus wie 2 gegebene Zahlen *m*, *n* sich verhalten.

Zeichne durch *D* mit einem der beiden Schenkel z. B. *AC* eine Parallele *DE*; nimm auf dem Schenkel *CB* die Linie *EF*, so dafs $CE : EF = m : n$, ziehe durch

Fig. 336.

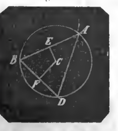
D die Linie *FG*, so ist diese die verlangte, und zwar ist $GD : DF = m : n$.

17) Es sind drei gerade Linien *a*, *b*, *c* gegeben, man soll dieselben mit ihren

Endpunkten so an einander legen, dafs ihre anderen Endpunkte unter gleichen Abständen in eine gerade Linie fallen.

Zeichne eine gerade Linie AB, welche der doppelten kleinsten gegebenen Linie a, also $= 2a$ ist, $AC = BC = a$. Beschreibe über AB mit den anderen beiden gegebenen Linien $AD = b$ und $BD = c$ ein $\triangle$,

Fig. 337.



ziehe DC, verlängere DC bis $CE = DC$, ziehe AE, so ist $AE = c$ und AD, AC, AE die verlangte Construction.

18) I. An einem in der Peripherie eines Kreises belegenen Punkt B eine Tangente zu zeichnen s. B. 1, pag. 339 mit Fig. 205.

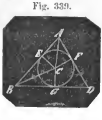
II. Von einem aufserhalb eines Kreises belegenen Punkt an den Kreis eine Tangente zu ziehen, s. pag. 339 mit Fig. 206.

19) An zweien gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente zu zeichnen, s. pag. 340 mit Fig 208.

20) **Um ein $\triangle$ ABD einen Kreis zu zeichnen.**

Halbire 2 beliebige Seiten, z. B AB und BD in E und F, errichte auf den

Fig. 338.



Seiten Normalen, so ist deren Durchschnittspunkt C der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

Hiermit ist zugleich die Construction gegeben: In einem vorhandenen Kreise den Mittelpunkt zu finden. Man nimmt nämlich in der Peripherie 3 beliebige Punkte A, B, D, verbindet je 2 derselben zu Sehnen AB und BD, und errichtet auf ihnen in deren Mitten Normalen bis zu ihrem Durchschnittspunkt C.

21) **In ein $\triangle$ ABD einen Kreis zu beschreiben.**

Halbire 2 beliebige $\angle$ des $\triangle$, z. B. A und B, der Durchschnittspunkt C der beiden Halbirungslinien ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises, die aus demselben

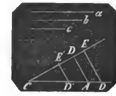
Fig. 339.

auf die Seiten gefällten Lethe CE, CF, CG sind einander gleich und Halbmesser.

22) Zu den 3 gegebenen geraden Linien a, b, c die 4te geometrische Proportionale zu zeichnen.

I. Zeichne einen beliebigen $\angle$, nimm vom Scheitelpunkt C aus auf dem einen Schenkel $CA = a$, auf dem anderen $CB = b$, ziehe AB, setze auf dem ersten Schenkel an A das Stück $AD = c$,

Fig. 340.



ziehe $DE = AB$, so ist BE die verlangte Linie, nämlich

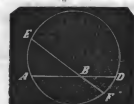
$$CA : CB = AD : BE$$

oder $$a : b = c : x$$

II. Man kann auch $CD' = c$ nehmen, $D'E' \parallel AB$ zeichnen; dann ist CE' die verlangte Linie.

III. Nimm auf einer geraden Linie die beiden mittleren Glieder $AB = b$, $BD = c$ neben einander, zeichne durch den Punkt B eine beliebig gelegene gerade Linie, nimm von B ab auf derselben BE = dem ersten Gliede a, beschreibe um die 3 Punkte A, D, E einen Kreis, so ist die Verlängerung BF von EB

Fig. 341.

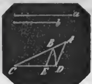


bis zur Peripherie die verlangte Linie, nämlich $AB \times BD = BE \times BF$
oder $b \times c = a \times x$
woher $a : b = c : x$

23) Zu den gegebenen beiden Linien a, b die dritte geometrische Proportionale zu zeichnen.

I. Zeichne einen beliebigen $\angle ACD$, nimm vom Scheitelpunkt C aus auf einem Schenkel CA = dem äufseren Gliede a, und auf beiden Schenkeln

Fig. 342.



$CB = CD$ = dem Mittelgliede b, ziehe AD und $BE \mp AD$, so ist CE die 3te Proportionale.
Es ist nämlich $CA : CB = CD : CE$
oder $a : b = b : CE$

II. Zeichne die gerade Linie AB = dem mittleren Gliede b, errichte in B auf AB ein Loth, schneide dieses aus A

Fig. 343.



mit dem äufseren Gliede a in C, ziehe AC und fälle von B das Loth BD aus AC, so ist AD die dritte Proportionale.

Es ist nämlich $AC : AB = AB : AD$
odar $a : b = b : AD$

III. Ist das Mittelglied die gröfsere Linie a, so kann man auch über $AB = a$ den Halbkreis beschreiben, von a aus das kleinere äufsere Glied b als Sehne AD eintragen, diese verlängern und in B auf AB ein Loth BC bis in die Richtung AD errichten, und es ist AC die dritte Proportionale
Denn es ist $AD : AB = AB : AC$
oder $b : a = a : AC$

IV. Ist das Mittelglied wieder die kleinere Linie b, so kann man auch über AB = dem äufseren Gliede a den Halbkreis beschreiban, von A aus das Mittelglied b als Sehne AD eintragen und das Loth DE auf AB fällen, so ist AE die dritte Proportionale
Denn es ist $AB : AD = AD : AE$
oder $a : b = b : AE$

V. Nimm (Fig. 341) in der geraden Linie $AB = BD$ = dem Mittelgliede b, zeichne nach beliebiger Richtung BE = dem äufseren Gliede a, beschreibe um die 3 Punkte A, D, E den Kreis, so ist die Verlängerung BF von EB bis zur Peripherie die 3te Proportionale,
denn es ist $BE : AB = BD : BF$
oder $a : b = b : BF$

24) Zu den gegebanen beidan Linien a, b die mittlere geometrische Proportionale au zeichnen.

I. Setze (Fig. 343) beide Linien zu einer geraden Linie $AE = a + BE = b$ zusammen, beschreibe über AB den Halbkreis, errichte in E die lothrechte Ordinata ED, so ist diese die verlangte Linie. Es ist nämlich
$AE : ED = ED : BE$
oder $a : ED = ED : b$

II. Beschreibe über der gröfseren $AB = a$ der beiden Glieder den Halbkreis, trage von einem Endpunkt, z. B. von A ab, die zweite Linie $b = AE$ auf derselben, errichte in E die lothrechte Ordinata ED, ziehe AD, so ist diese die verlangte Linie.
Es ist nämlich
$AB : AD = AD : AE$
oder $a : AD = AD : b$

III. Nimm AB (Fig. 344) = der grösseren a, BD auf der AB = der kleineren b, halbire die Differenz AD beider gegebenen Linien in E, beschreibe über AD und EB Halbkreise, verbinde B mit dem Durchschnittspunkt F beider Peripherien durch eine gerade Linie BF, so ist diese die verlangte mittlere Proportionale, nämlich BF die Tangenta an den Kreis AFD

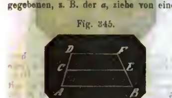
Fig. 344.

also $BF^2 = AB \times BD$
oder $AB : BF = BF : BD$
oder $a : BF = BF : b$

25) Zu 2 gegebenen geraden Linien a, b die mittlere arithmetische Proportionale zu zeichnen.

Nimm eine gerade Linie AB = der einen gegebenen, z. B. der a, ziehe von einem

Fig. 345.



Endpunkt derselben, z. B. A, eine beliebige gerade Linie AD, nimm beliebig $AC = CD$, ziehe aus C und D Parallelen mit AB, nimm DF = der anderen gegebenen b, ziehe BF, so ist CE die verlangte Linie.

Es ist nämlich

$$AB - CE = CE - DF$$
oder $a - CE = CE - b$
oder $2\,CE = a + b$

26) Es sind 2 wenig mit einander convergirende Linien AB und CD gegeben, zwischen beiden eine gerade Linie (XY) zu zeichnen, welche beide gegebenen, alle drei Linien gehörig verlängert, in einerlei Durchschnittspunkt und unter gleichen Winkeln trifft.

Fig. 346.

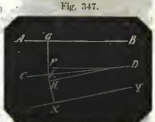


Aus einem beliebigen Punkt E einer der gegebenen, z. B. AB, ziehe eine Parallele EG mit der anderen CD, nimm von E aus ein Stück EF auf $AB = EG$, ziehe durch F und G eine gerade Linie FH bis an die Linie CD, halbire FH in J, ziehe durch J eine Normale XY auf FH, so ist diese die verlangte Linie. Es ist nämlich, wenn man den Durchschnittspunkt beider Linien AB und CD mit Z bezeichnet ZFH ein gleichschenkliges △ und XY eine Normale in der Mitte auf dessen Grundlinie, welche also die Spitze des △ unter gleichen Winkeln mit den Schenkeln trifft.

27) Zwischen den Linien AB und CD außerhalb derselben eine gerade Linie XY zu zeichnen, so daſs die 3 Linien, gehörig verlängert, unter gleichen Winkeln in einem Punkt zusammentreffen.

Soll CD die mittlere Linie sein, so ziehe von irgend einem Punkt D in CD DF ‡ AB, nimm in CD ein Stück $DE = DF$, ziehe EF verlängert bis G, zeichne an DE △ DEH ∾ △ DEF, verlängere EH bis X, so daſs $EX = EG$, ziehe XY ‡ HD,

Fig. 347.



so ist XY die verlangte Linie. Es ist nämlich, wenn man GX gezogen denkt, und den Durchschnittspunkt zwischen AB und XY mit Z bezeichnet, ZGX ein gleichschenkliges △ und ED eine Normale in der Mitte auf der Grundlinie GX.

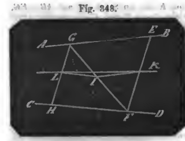
28) Durch einen gegebenen Punkt K eine gerade Linie zu zeichnen, welche mit 2 wenig convergirenden Linien AB und CD bei gehöriger Verlängerung in einerlei Punkt zusammentrifft.

I. Wenn der Punkt K innerhalb beider gegebenen Linien liegt.

Zeichne durch K eine beliebige Linie EF bis an die Linien AB und CD und in beliebiger Entfernung eine Linie GH ‡ EF, verbinde zwei Endpunkte der beiden Parallelen, z. B. F und G, zeichne aus K die KJ ‡ der Seite EG des △ FEG und durch J die JL ‡ der Seite FH des △ GFH, verbinde L mit K, so ist KL die verlangte Linie.

Es ist nämlich

Fig. 348.



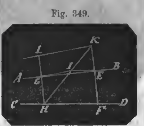
$EK : KF = GJ : JF = GL : LH.$

Bezeichnet man nämlich den Durchschnittspunkt zwischen AB und CD mit Z, so ist in dem $\triangle EFZ$ EF Grundlinie, $GH \mp EF$, beide proportional getheilt, folglich trifft die Verbindungslinie der Theilpunkte verlängert die Spitze Z des $\triangle EFZ$.

II. Wenn der Punkt K aufserhalb beider gegebenen Linien liegt.

Ziehe beliebig KF, welche die AB in E schneidet, und aus dem beliebigen Punkt H an KF eine Parallele

Fig. 349.



HG mit Verlängerung, ziehe $EJ \mp FH$, verbinde G mit J, ziehe $KL \mp GJ$, so ist KL die verlangte Linie.

Es ist nämlich

$KE : EF = KJ : JH = LG : GH.$

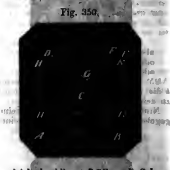
29) In einem gegebenen Kreise eine Sehne von gegebener Länge einzutragen, die einen gegebenen Punkt schneidet oder nach demselben hin gerichtet ist (s. Chorde No. 2 mit Fig. 286).

30) Durch einen in der Ebene eines Kreises gegebenen Punkt eine gerade Linie zu verzeichnen, welche in dem Kreise eine Sehne bildet, die einem gegebenen Peripheriewinkel zugehört (s. Chorde No. 5 mit Fig. 286).

31) In den gegebenen Kreis vom Mittelpunkt C eine gerade Linie AB, die kleiner als der Durchmesser ist, als Sehne einzutragen, die mit einer gegebenen Sehne $DE \mp$ läuft.

Zeichne von einem Endpunkt D der Sehne aus in derselben die Länge DF = der gegebenen AB, zeichne über DF

Fig. 350.

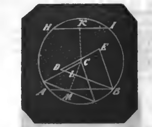


das gleichschenklige $\triangle DGF$, wo die Schenkel $DG = FG$ = dem Halbmesser sind, ziehe aus dem Mittelpunkt C parallele Halbmesser CH, CK oder CH' und CK' mit DG und FG, so ist HK oder $H'K'$ die verlangte Sehne.

32) Zwei gerade Linien von gegebenen Längen a, b sollen in einen gegebenen Kreis von gröfserem Durchmesser als die gröfsere von a und b unter einem gegebenen $\angle$ als Sehnen eingetragen werden.

Zeichne von einem beliebigen Punkt A der Peripherie aus die Sehne AB = einer der gegebenen Linien, z. B. a, zeichne

Fig. 351.



in B den $\angle DBA$ = dem gegebenen $\angle$, mache $BD = b$, zeichne über BD mit dem Halbmesser als Schenkel das gleichschenklige $\triangle BDE$, ziehe aus dem Mittelpunkt C die Parallelen CF, CG mit DE, BE, ziehe FG, so ist diese die verlangte Sehne.

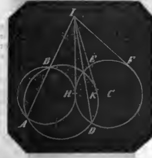
Oder trage an einer anderen Stelle HJ $= b$ als Sehne ein, fälle die Lothe CK auf HJ und CL mit etwa nöthiger Ver-

längerung auf BD, nimm in dem letzten Loth $CM = CK$, ziehe durch M die Parallele FG mit BD.

33) Es ist ein Kreis DEF mit dem Mittelpunkt C gegeben, und eine gerade Linie AB in derselben Ebene mit dem Kreise, man soll einen Kreis construiren, der den gegebenen Kreis berührt und die Linie AB als Sehne enthält.

Nimm in der Peripherie des Kreises einen beliebigen Punkt D, zeichne durch die Punkte A, B, D einen Kreis, ziehe

Fig. 352.



DE durch den Durchschnittspunkt E beider Kreise, verlängere DE und AB bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt J, zeichne die Tangente JH an den Kreis FED, so ist der Kreis durch A, B, H der verlangte, und JH die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise.

Denn es ist, da JH die Tangente an dem Kreise DEF,

$$JH^2 = JE \times JD$$

Da aber AJ und DJ zugleich zu demselben Kreise $ABED$ gehören, so ist auch $JE \times JD = JB \times JA =$ dem Quadrat einer Tangente JK an dem Kreis $ABED$.

Nun ist aber $JE \times JD$
also auch $JB \times JA = JH^2$
folglich ist JH eine Tangente in H in dem Kreise durch die Punkte A, B, H.

Zeichnet man die zweite Tangente JF an den Kreis DEF, so genügt auch ein Kreis durch die Punkte A, B, F der Aufgabe, und der Kreis ABF tangirt den gegebenen Kreis DEF innerhalb.

Ist AB so gelegen, daſs das auf deren Mitte errichtete Loth den Mittelpunkt C des gegebenen Kreises trifft, dann sind die Durchschnittspunkte dieses Loths mit der Peripherie des gegebenen Kreises die Punkte, welche wie H und F mit A, B die Peripherien der verlangten Kreise bestimmen. Jede Linie, wie DE durch einen willkührlich angenommenen Punkt liegt dann $\mp$ mit AB.

34) Es ist ein Kreis DGJ mit dem Mittelpunkt C, und in dessen Ebene eine gerade Linie AB gegeben, man soll den Punkt (H) in der Peripherie des Kreises finden, von dem aus die geraden Linien HA und HB in der Peripherie einen Bogen GJ abschneiden, dessen Sehne GJ der gegebenen Linie $AB \mp$ läuft.

Ziehe von einem Endpunkt z. B. A der Linie AB durch den Mittelpunkt C die Linie AD, welche die Peripherie in dem zweiten Punkt E schneidet, lege durch die drei Punkte DEB einen Kreis; aus

Fig. 353.



dessen Durchschnittspunkt F mit AB zeichne die nach A hin gelegene Tangente FG an den Kreis, indem über CF der Halbkreis CGF den Punkt G ergiebt, ziehe durch G die Linie AH, so ist H der verlangte Punkt, und wenn man BH und die Sehne GJ zieht, so ist $GJ \mp AB$.

Denn da die vier Punkte D, H, E, G in einerlei Kreisumfang liegen, so ist

$$AG \times AH = AE \times AD$$

und da die 4 Punkte D, E, F, B sich ebenfalls in einerlei Kreisumfang befinden, so ist auch

$$AE \times AD = AF \times AB$$

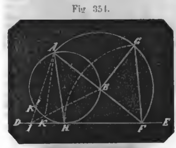
daher $AG \times AH = AF \times AB$
oder $AG : AF = AB : AH$
folglich $\triangle AGF \sim \triangle ABH$
daher $\angle AFG = \angle AHB$
da nun $\angle AHB = \angle FGJ$
auch $\angle AFG = \angle FGJ$
und $GJ \mp AB$

35) Es sind 2 Punkte A, B und eine in derselben Ebene liegende gerade Linie DE gegeben, einen Kreis zu zeichnen, der durch die Punkte A, B trifft und DE tangirt.

Ziehe AB, und verlängere diese bis

zum Durchschnittspunkt F mit DE, zeichne über AF den Halbkreis, errichte in B die rechtwinklige Ordinate BG, mache FH

Fig. 354.



in $CD = FG$, so ist der durch die Punkte A, B, H gelegte Kreis der verlangte.

Denn es ist

$$AF \times BF = FG^2 = FH^2$$

folglich FH Tangente und AB Sehne in demselben Kreise, der also durch A, B und H gehen mufs.

Hiermit ist zugleich durch Construction in DE der Punkt (H) gefunden, in welchem die beiden Linien von A und B den gröfsten Winkel einschliefsen. Denn zieht man nach irgend einem anderen Punkt z. B. J die Linien AJ und BJ, so hat man, wenn man noch von A nach dem Durchschnittspunkt K des anderen Schenkels mit der Peripherie oder von B nach K' eine Linie zieht:

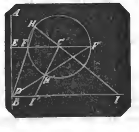
$$\angle AKB = \angle AHB$$
$$\angle AKB > \angle AJB$$

folglich $\angle AHB > \angle AJB$

36) Es ist eine gerade Linie AB und ein Kreis $FHF'H'$ gegeben, einen Kreis zu zeichnen, der den gegebenen Kreis und die gerade Linie in dem gegebenen Punkt D berührt.

Es existiren 2 solcher Kreise. Wenn man nämlich die Normale $F'E$ durch den

Fig. 355.



Mittelpunkt C des Kreises auf AB fällt, und durch beide Durchschnittspunkte F, F' dieses Loths mit der Peripherie die geraden Linien HD und $F'D$ zieht, den Mittelpunkt C mit den Durchschnittspunkten H, H' dieser Linien verbindet, und sie bis an die in D auf AB errichtete Normale DJ verlängert, so entstehen 2 Punkte J, J'.

Der Kreis aus dem Mittelpunkt J berührt den gegebenen Kreis in H, der aus J' berührt ihn in H'.

Denn da $EF' \mp DJ$

so ist $\triangle CH'F' \sim \triangle J'H'D$

folglich $J'H' = J'D$

ebenso $\triangle CHF \sim \triangle JHD$

folglich $JH = JD$

37) Einen Kreis zu construiren, der den einen Schenkel AC eines gegebenen Winkels ACB tangirt, und den anderen Schenkel BC in dem gegebenen Punkt D so

Fig. 356.



trifft, dafs die Tangente an D mit BC einen gegebenen $\angle CDG = \alpha$ bildet.

Nimm $GF = GD$, errichte in D auf DG und in F auf AC Lothe, der Durch-

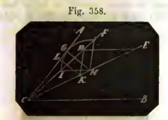
Fig. 357.

schnittspunkt E beider ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

38) Es ist ein $\angle ACB$ und innerhalb desselben ein Punkt D gegeben, einen Kreis zu zeichnen, der die Schenkel des $\angle$ und den Punkt D berührt. Halbire $\angle ACB$ durch CE, ziehe durch D die Linien CF errichte in einen beliebigen Punkt G des an D

näheren Schenkels eine Normale GH bis in die Halbirungslinie, beschreibe aus H mit HG den Bogen FGJ, ziehe HF, HJ, aus D die Parallelen DE mit HJ und DK mit HF bis in die Halbirungslinie, so sind E und K Mittelpunkte zweier Kreise, von welchen jeder der verlangte ist.

Fig. 358.



Denn fällt man die Normale KL auf AC
so ist $\triangle CGH \sim \triangle CLK$
und $\triangle CFH \sim \triangle CDK$
daher $CH : CK = HG : KL$
und $CH : CK = HF : KD$
da nun $HG = HF$
so ist auch $KL = KD$
für den Punkt E gilt derselbe Beweis.

Hiermit ist zugleich die Constr. enthalten: Einen Kreis zu zeichnen, der die Schenkel eines Winkels und zugleich einen zwischen ihnen liegenden Kreis berührt. Denn denkt man sich D als den Mittelpunkt eines Kreises vom Halbmesser r, so würden aus E mit dem Halbmesser $ED - r$ der Kreis und 2 Schenkel eines $\angle$ berührt werden, die in der Entfernung $= r$ mit den Schenkeln der $\angle ACB$ innerhalb $\neq$ sind, und mit dem Halbmesser $ED + r$ der Kreis und 2 Schenkel, die von AC und BC um r außerhalb entfernt sind. Dasselbe findet aus K mit $KD \pm r$ statt.

Die Constr. geschieht also offenbar, indem man mit den Schenkeln des gegebenen $\angle$ innerhalb und außerhalb in der Entfernung r parallele $\angle$ zeichnet und für jeden der beiden die Mittelpunkte der Kreise findet, die den Mittelpunkt des gegebenen Kreises zugleich mit den Schenkeln berühren; man erhält sodann 4 Kreise, zwei, welche den gegebenen Kreis außerhalb und zwei, welche ihn innerhalb und zugleich die Schenkel des gegebenen Winkels berühren.

39) In einen Kreis ein $\triangle$ zu beschreiben, welches einem gegebenen $\triangle GHJ$ gleichwinklig sei (Euklid IV, 2.)

Zeichne an einen beliebigen Punkt A der Peripherie die Tangente DE, nimm $\angle DAB =$ dem einen z. B. J und $\angle EAF$

Fig. 359.

einem zweiten z. B. H der $\angle$ des gegebenen Dreiecks, ziehe BF, so ist $\triangle ABF$ das verlangte: $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle H$, $\angle F = \angle J$.

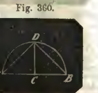
40) Um einen Kreis ein $\triangle$ zu beschreiben, welches einem gegebenen $\triangle GHJ$ gleichwinklig sei (Euklid IV, 3).

Verlängere eine Seite HJ nach K und L, ziehe einen beliebigen Halbmesser CA, nimm $\angle ACB =$ einem der Außenwinkel, z. B. J, $\angle ACD$ dem andern H, ziehe an A, B, D Tangenten bis zu ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten, so ist $\triangle EFM$ das verlangte: $\angle E = \angle H$, $\angle F = J$, $\angle M = \angle G$.

41) Ueber einer geraden Linie AB ein gleichschenkliges und rechtwinkliges $\triangle$ zu zeichnen.

Halbire AB in C, beschreibe über AB

Fig. 360.



den Halbkreis, errichte in C den lothrechten Halbmesser CD, ziehe AD und BD, so ist $\triangle ABD$ das verlangte.

42) Ueber einer geraden Linie AB ein gleichschenkliges $\triangle$ mit einem gegebenen $\angle a$ an der Spitze zu zeichnen.

Zeichne an einem der Endpunkte von AB, z. B. an A eine beliebige gerade Linie AE, an einen beliebigen Punkt D derselben trage den $\angle ADF = \alpha$, ziehe $BE \# DF$,

Fig. 361.



beschreibe einen durch die Punkte A, B und E gehenden Kreis, errichte in der Mitte G von AB das Loth GH bis in die Peripherie, ziehe AH, BH, so ist $\angle AHB = \alpha$, $AH = BH$ und $\triangle ABH$ das verlangte.

43) Aus der gegebenen Grundlinie a, der Höhe h und dem $\angle \alpha$ an der Spitze das Dreieck zu zeichnen.

Zeichne die Linie $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$, halbire AB in E, errichte das Loth EF

Fig. 362.



$= h$ auf AB, zeichne $\angle DAC = R$, beschreibe aus C in EF mit $AC = BC$ einen Kreis, ziehe durch F die Sehne $GH \# AB$, so ist $\triangle GAB$ wie $\triangle HAB$ das verlangte.

44) Zur Verzeichnung eines Dreiecks sind gegeben eine Seite und die Höhen auf die beiden anderen Seiten.

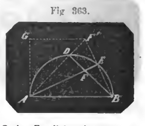
Zeichne über der gegebenen Seite AB den Halbkreis, trage von A aus die eine, und von B aus die andere Höhe als Sehnen AD und BE in den Halbkreis, ziehe AE und BD, so giebt deren Durchschnittspunkt F das verlangte $\triangle ABF$.

Sind AE und BD die Höhen, so überkreuzen sie sich, und der in den Verlängerungen von AD und BE liegende Punkt F' ergiebt das verlangte $\triangle ABF'$.

45) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben eine Seite, die Höhe H auf derselben und eine der beiden anderen Höhen H'.

Zeichne über der gegebenen Seite AB einen Halbkreis, errichte in einem Endpunkt A auf AB das Loth $AG = H$, ziehe

Fig. 363.

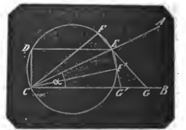


aus G eine Parallele mit AB, trage von A aus die zweite Höhe H' als Sehne AE ein, ziehe durch E die Linie BE, bis sie die Parallele in F' trifft, ziehe AF', so ist $\triangle ABF'$ das verlangte.

46) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben ein $\angle \alpha$, die Höhe H auf die gegenüberliegende Seite und die Höhe H' auf eine der dem $\angle$ anliegenden Seiten.

Zeichne $\angle ACB =$ dem gegebenen $\angle \alpha$, errichte in C die Normale $CD = H'$, ziehe $DE \# BC$ bis in den Schenkel CA, beschreibe über CE den Halbkreis CFE, welcher auch den Punkt D berührt, trage

Fig. 364.



von C aus die Höhe H als Sehne CF ein, ziehe durch E die Linie FG, so ist $\triangle CEG$ das verlangte.

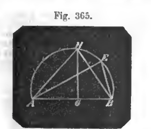
Zeichnet man den zweiten Halbkreis CFE, trägt H als Sehne CF' ein, zieht durch F' die Linie EG', so erhält man ein zweites $\triangle CEG'$ als das verlangte.

47) Zur Verzeichnung eines Dreiecks

sind gegeben die beiden Abschnitte, in welche eine Seite durch eine Höhe auf derselben getheilt wird, und der Winkel an der Spitze.

Lege beide Abschnitte AG, GB in einer geraden Linie zusammen, construire wie

Fig. 365.

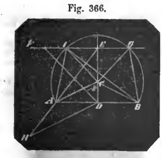


No. 42 mit Fig. 361 $\angle AEB =$ dem gegebenen $\angle$, beschreibe um A, B, E den Kreis, errichte das Loth GH, ziehe AH und BH, so ist $\triangle AHB$ das verlangte.

48) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ sind gegeben die Grundlinie a, die Höhe h und die Differenz δ der der Grundlinie anliegenden Winkel.

Zeichne $AB = a$, errichte in der Mitte D auf derselben ein Loth $DE = h$, ziehe durch E die $FG \mp AB$, mache $\angle EDF = \delta$,

Fig. 366.



ziehe EA mit Verlängerung, und schneide diese aus D mit DF in H, ziehe HD, $AC \mp$ damit, und beschreibe aus C mit $CA = CB$ einen Kreis, der die FG in G und J schneidet, ziehe JA und JB oder GA und GB, so ist $\triangle AJB$ oder $\triangle AGB$ das verlangte.

Denn es ist

$$\angle JBG = \angle ABG - \angle ABJ$$
$$= \angle BAJ - \angle ABJ$$
$$\angle JBG = \tfrac{1}{2} \angle JCG - \angle JCE$$

daher $\angle BAJ - \angle ABJ = \angle JCE$

Nun ist $JC = AC$
$FD = DH$

da nun $DH \mp AC$

so ist auch $FD \mp JC$

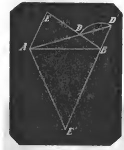
und $\angle JCE = \angle FDE = \delta$

daher $\angle BAJ - \angle ABJ = \delta$

49) Zur Verzeichnung eines Dreiecks ist gegeben eine Seite a, die Differenz δ der beiden anliegenden $\angle$ und die Differenz d der beiden anderen Seiten.

Zeichne $AB = a$, an einem Endpunkt, z. B. A, den $\angle DAB = \frac{1}{2}\delta$, schneide aus B die Linie AD mit dem Halbmesser d

Fig. 367.



in D, ziehe BD mit Verlängerung, nimm $\angle DAE = \angle ADE$, so ist $\triangle ABE$ das verlangte.

Denn da $AE = DE$

so ist $BE - AE = BD = d$

ferner ist $\angle EAB = \angle EAD + \frac{\delta}{2}$

$$\angle EBA = \angle EDA - \angle BAD = \angle EAD - \frac{\delta}{2}$$

folglich $\angle BAE - \angle ABE = \delta$

Man erhält noch ein zweites $\triangle AD'E'$, wenn man AD durch d aus B in dem zweiten Punkt D' schneidet, das Dreieck $AD'E'$ durch $D'B$ mit Verlängerung und $AE' = BE'$ bildet. Denn es ist auch hier $D'E' - AE' = BD' = d$

$$\angle D'AE' = \angle BAE' + \frac{\delta}{2}$$

$$\angle AD'E' = \angle ABE' - \frac{\delta}{2} = \angle BAE' - \frac{\delta}{2}$$

Die gröfseren und die kleineren $\angle$ in beiden Dreiecken sind um $\frac{1}{2}\delta$ unterschieden. Tangirt der Bogen aus B mit d die Linie AD, oder trifft sie nicht, so ist die Constr. unmöglich.

50) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s der 3 Seiten und 2 Winkel.

Zeichne die Linie $AB = s$, an deren

Fig. 368.

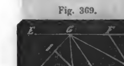


Endpunkten die $\angle DAB$, EBA = den gegebenen, halbire diese durch AC und BC, von dem Durchschnittspunkt C beider ziehe die $CF \mp AD$, $CG \mp BE$, so ist $\triangle CFG$ das verlangte.

51) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s der 3 Seiten, ein $\angle$ und eine diesem $\angle$ gegenüberstehende Höhe h.

Zeichne die Linie $AB = s$, errichte in einem Endpunkt z. B. B das Loth $BD = h$, ziehe $DE \mp AB$, zeichne $\angle ABF$ = dem gegebenen, halbire diesen durch BG, ziehe $GH \mp BF$, ziehe AG, errichte in der

Fig. 369.

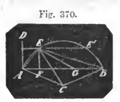


Mitte auf AG die Normale JK bis in AB, so ist $\triangle GHK$ das verlangte.

52) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s der drei Seiten, ein Winkel und die durch die Spitze dieses Winkels gerichtete Höhe.

Es sei $AB = s$, zeichne $\angle CAB = \angle CBA$ = dem halben gegebenen Winkel, beschreibe aus C durch A und B den Kreisbogen, errichte in einem Punkt A auf

Fig. 370.



AB das Loth $AD = h$, ziehe DE oder $DE' \mp AB$, so sind E, E' die Punkte zur Wahl der Spitze des $\triangle$; wählt man E, so ziehe CE, zeichne $\angle CEF = \angle CEG$ = dem halben gegebenen $\angle$, so ist $\triangle EFG$ das verlangte.

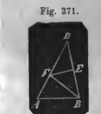
Denn da $CA = CE$

so ist $\angle CAE = \angle CEA$
und da $\angle CAF = \angle CEF$
so ist $\angle EAF = \angle AEF$
woraus $EF = AF$
ebenso findet man $EG = BG$
folglich ist $EF + EG + FG = AB$

53) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s zweier Seiten, die dritte a und ein dieser anliegender Winkel.

Zeichne $AB = a$, $\angle DAB$ = dem ihr anliegenden $\angle$, $AD = s$, ziehe BD, halbire BD in E, errichte das Loth EF auf BD, ziehe BF, so ist $\triangle ABF$ das verlangte.

Fig. 371.



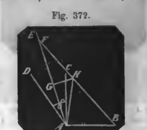
54) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s zweier Seiten, die dritte a und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel.

Zeichne $\angle ADB$ = dem halben gegebenen $\angle$, nimm $AD = s$, schneide aus A mit $AB = a$ den zweiten Schenkel DB in B, halbire BD in E, errichte die Normale EF, ziehe BF, so ist $\triangle ABF$ das verlangte.

55) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s zweier Seiten, die dritte a und die Differenz δ der beiden dieser Seite anliegenden Winkel.

Zeichne $AB = a$, errichte in A auf AB ein Loth AC, zeichne $CAD = \delta$, halbire

Fig. 372.



$\angle CAD$ durch AE, schneide AE in F aus B mit $BF = s$, ziehe BF, errichte in der Mitte von AF auf dieser eine Normale GH bis in die Richtung BF, ziehe AH, so ist $\triangle ABH$ das verlangte.

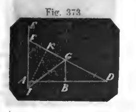
Denn $AH = FH$, folglich $AH + BH = BF = s$

Ferner ist	$\angle HAB + \angle HAF = R + \frac{1}{2}\angle CAD$
daher	$2\angle HAB + 2\angle HAF = 2R + \angle CAD$
Es ist aber	$2\angle HAF = \angle AHB$
daher	$2\angle HAB + \angle AHB = 2R + \angle CAD$
Nun ist	$\angle HAB + \angle AHB + \angle ABH = 2R$
folglich	$\angle HAB - \angle ABH = \angle CAD = \delta$

56. Zur Verzeichnung eines △ ist gegeben die Summe s zweier Seiten und die Höhen H, H' auf beide Seiten.

Nimm in einer graden Linie AB = der einen Höhe H und BD = der anderen H', errichte in einem der Endpunkte z. B. A das Loth AE, schneide dieses aus D

Fig. 373

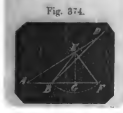


mit der gegebenen Summe s in F, ziehe DF, errichte in B auf AD das Loth BG bis in DF, mache von F nach A hin $FJ = DG$, ziehe JG so ist △ FGJ das verlangte.

Denn $FJ + FG$ ist = der gegebenen Summe s, $AB = H$ die Höhe auf FJ, und wenn man die Normale JK auf DF fällt, so ist △ FJK ≅ △ GDB, also $JK = BD$ = der Höhe H' auf die Seite FG.

57. Zur Verzeichnung eines △ sind gegeben die Summe s zweier Seiten, der von beiden eingeschlossene $\angle\,\alpha$ und die Differenz d der beiden Abschnitte, welche die Höhe auf der dritten Seite bildet.

Fig. 374.



Zeichne $AB = d$, verlängere AB nach F, zeichne $\angle DBF$ = dem halben Nebenwinkel von $\alpha = 90° - \alpha$, schneide BD aus A mit s in D, ziehe AB, zeichne $\angle DBE = \angle BDE$, beschreibe aus E mit EB einen Bogen BF, ziehe EF so ist △ EAF das verlangte.

Denn 1. da $EF = EB = ED$ so ist $AE + EF = AD = s$

2. Fällt man das Loth EG auf AF, so ist $AG = BG + AB = BG + d$ und $FG = BG$

daher $AG - FG = AB = d$

3. $\angle DEF$ (als Centriwinkel) $= 2 \times \angle DBF$ (Peripheriewinkel)

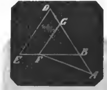
oder $\angle DEF = 2\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 180° - \alpha$

folglich ist $\angle AEF = \alpha$.

58. Zur Verzeichnung eines △ ist gegeben die Differenz d zweier Seiten, die dritte a und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel.

Nimm $AB = d$, verlängere AB um ein beliebiges BD, zeichne $\angle BDE$ = dem gegebenen $\angle$, nimm $DE = DB$, ziehe BE,

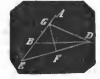

Fig. 375.



schneide BE aus A mit der gegebenen dritten Seite $AF = a$ in F, ziehe AF und $FG \mp DE$ bis in die Richtung AD, so ist △ AFG das verlangte.

59. Zur Verzeichnung eines △ ist gegeben die Differenz d zweier Seiten; der der größeren von beiden gegenüberliegende $\angle$ und die dritte Seite a.

Fig. 376.



Nimm $BD = a$, zeichne $\angle DBA$ = dem gegebenen $\angle$, verlängere AB durch B um $BE = d$, ziehe DE, errichte in der Mitte auf DE eine Normale FG bis in die Richtung BA, ziehe GD, so ist $\triangle BDG$ das verlangte.

60. Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Differenz d zweier Seiten, der der kleineren von beiden gegenüberliegende $\angle$ und die dritte Seite a.

Zeichne $\angle ABD$ = dem gegebenen, nimm $BD = a$, $BE = d$, ziehe DE, errichte in

Fig. 377.



der Mitte auf DE die Normale FG bis in die Richtung von AB, ziehe DG, so ist $\triangle BDG$ das verlangte.

61. Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben ein Winkel, die Differenz der ihn einschliefsenden Seiten und die Höhe h auf einer dieser Seiten.

Zeichne $\angle ACB$ = dem gegebenen, errichte in dem Scheitelpunkt C auf einem

Fig. 378.

der Schenkel z. B. CB das Loth $CD = h$, ziehe $DE \mp CB$ bis in den zweiten Schenkel, nimm den ersten Schenkel $CF = CE$. Soll nun die Höhe auf der gröſseren der beiden einschlieſsenden Seiten sein, so nimm FG nach B hin = der gegebenen Differenz, so ist $\triangle ECG$ das verlangte. Soll die Höhe auf der kleineren Seite stehen so nimm FG' = der Differenz nach C hin und es ist $\triangle ECG'$ das verlangte.

62. Zur Verzeichnung eines Vierecks sind gegeben 2 Seiten AB, AD und der von ihnen eingeschlossene $\angle BAD$, ferner die beiden $\angle$, welche durch die Diagonale aus A mit den beiden anderen Seiten des Vierecks gebildet werden.

Zeichne $\angle ADE$ = dem einen, $\angle ABF$ = dem anderen der gegebenen $\angle$ an der Diagonale, errichte in B auf BF in der Mitte auf AB Lothe, aus deren Durchschnittspunkt H zeichne den Kreis durch A und B, so ist BF eine Tangente; eben

Fig. 379.

so errichte in D auf DE und in der Mitte auf AD Lothe, aus deren Durchschnittspunkt J zeichne den Kreis durch A, D, so ist DE eine Tangente. Nach dem Durchschnittspunkt G beider Kreise ziehe die Linie AG, so ist AG die Diagonale und $ABGD$ das verlangte Viereck; denn $\angle AGB$ ist $= \angle ABF$ und $\angle AGD$ ist $= \angle ADE$.

63. Um einen gegebenen Kreis ein Viereck zu zeichnen, um welches wieder ein Kreis sich beschreiben läſst.

1. Zeichne in dem Kreis beliebig 2 rechtwinklig sich schneidende Sehnen AB und DE, zeichne an den vier Endpunkten Tangenten, so bilden diese mit ihren Durchschnittspunkten das verlangte Viereck $FGHJ$.

Fig. 380.



Denn wenn C der Mittelpunkt des Kreises ist, so hat man

$\angle CEJ = \angle CBJ = R$

folglich $\angle BCE + \angle BJE = 2R$

eben so $\angle DCA + AGD = 2R$

da nun AB und DE normal sind, so ist (s. Chorde No. 7)

$\angle ACD + \angle BCE = 2R$

folglich $\angle BJE + \angle AGD = 2R$

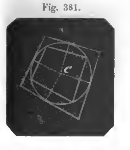
eben so $\angle GHJ + \angle GFJ = 2R$

mithin liegen die 4 Punkte F, G, H, J in einem Kreise.

Errichtet man daher auf zweien Seiten des Vierecks in deren Mitten Normalen, so erhält man in deren Durchschnittspunkt den Mittelpunkt zu dem nun das Viereck punktirt gezeichneten Kreis.

II. Zeichne in dem gegebenen Kreise ein beliebiges Viereck, fälle vom Mittelpunkt C des Kreises Normalen auf die

Fig. 381.

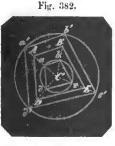


Seiten, verlängere diese bis zur Peripherie und zeichne an diese Halbmesser Tangenten, so bilden diese mit ihren Durchschnitts-Punkten das verlangte Viereck.

64. In einem gegebenen Kreise ein Viereck zu beschreiben, in dem wieder ein Kreis zu beschreiben ist.

Zeichne um einen beliebigen Kreis das Viereck No. 63. Gesetzt es sei dies das Viereck $ABDE$, so liegt dies also in und

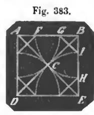
Fig. 382.



um einen Kreis, construire nun den Mittelpunkt C, so dafs $CA = CB = CD = CE$; beschreibe um C mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis; fällt dieser innerhalb des Vierecks, so erhält man aus der Verbindung der Durchschnittspunkte der Radien mit der Peripherie das verlangte Viereck $abde$; fällt er ausserhalb des Vierecks, so verlängere die Radien bis zur Peripherie und man erhält das verlangte Viereck a' b' d' e'.

65. Ein Quadrat zu einem regulären Achteck abzustumpfen. Zeichne in dem Quadrat $ABDE$ beide Diagonalen und

Fig. 383.



beschreibe aus jeder Ecke mit der halben Diagonale Quadranten, so schneiden diese die Seiten in Punkten, die mit einander durch gerade Linien verbunden das reguläre Achteck geben.

Denn aus $AC = BC = BF = BH$

und $AC^2 + BC^2 = AB^2$

folgt $BF^2 + BH^2 = AB^2$

woraus $FH = AB$

Nun ist $FH : BF = GJ : BG$

oder $AB : BF = GJ : BG$

oder $FG + 2BG : FG + BG = GJ : BG$

woraus $BG : FG + BG = GJ - BG : BG$

oder $BG^2 = (FG + BG)(GJ - BG)$

noch ist $BG^2 = GJ^2 - BJ^2 = GJ^2 - BG^2$

$= (GJ + BG)(GJ - BG)$

hieraus

$(FG + BG)(GJ - BG) = (GJ + BG)(GJ - BG)$

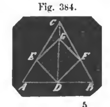
oder $FG + BG = GJ + BG$

woraus $FG = GJ$

dasselbe gilt von allen übrigen abgestumpften Seiten.

66. In ein gleichseitiges $\triangle$ CAB ein Quadrat zu zeichnen, welches mit 3 Ecken die 3 Seiten und eine derselben in der Mitte berührt.

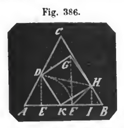
Fig. 384.



Fälle aus einer Ecke z. B. C des $\triangle$ die Höhe CD, halbire beide rechte Winkel CDA und CDB durch DE und DF und vollende das Quadrat $DEFG$.

67. In ein gleichseitiges $\triangle$ CAB ein Quzdrat zu zeichnen, welches mit einer Seite in eine Seite des $\triangle$ z. B. in AB fällt und mit den gegenüberliegen Ecken die beiden anderen Seiten des $\triangle$ berührt.

Fig. 385.

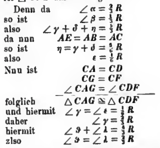


Fälle die Höhe CD, nimm beliebig DI, errichte in I ein Loth $IK = 2DI$ auf AB, ziehe KD so ist der Durchschnittspunkt H derselben mit CB die eine Ecke des Quadrats, ziehe zlso $HG \# AB$, fälle die Lothe GF und HE, so ist $EFGH$ dzs verlangte Quadrat.

Denn da $DE : EH = DI : IK = 1 : 2$
so ist $2DE = EF = GH = EH = FG$.

68. Von einem beliebigen in einer Seite AC des gleichseitigen $\triangle$ ABC liegenden Punkt D in das $\triangle$ ein Quzdrat zu zeichnen, welches mit noch zweien Ecken die beiden anderen Seiten des $\triangle$ berührt.

Fig. 386.



Fälle das Loth DE, beschreibe aus E den Bogen DF, errichte dae Loth FG zuf AB, hzlbire den $R\angle$ GFB durch FH so ist DH die Diagonzle des verlangten Quadrats; demnach fälle dzs Loth HI, nimm $EK = HI$, ziehe DK, KH und $\#$ mit denselben HG und DG, so ist $DGHK$ das verlangte Quzdrat.

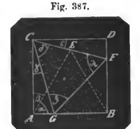
Denn es ist $DE = EF$
$HI = FI$

daher $\overline{DE + HI = EF + FI = EK + KI}$

Da nun $HI = EK$
so ist $\overline{DE = KI}$
folglich $\triangle DEK \cong \triangle FIH$
folglich $DK = HK$
ferner $\angle DKE = \angle KHI$
aber $\angle KHI + \angle HKI = R$
folglich $\angle DKE + \angle HKI = R$
folglich $\angle DKH = R$.

69. In ein Quadrat $ABCD$ ein gleichseitiges $\triangle$ zu zeichnen, welches mit einer Ecke eine Ecke C des Quadrats und mit den anderen beiden Ecken die ihr gegenüberliegenden Seiten berührt.

Fig. 387.



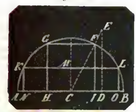
Zeichne über einer der Ecke C gegenüberliegenden Seiten z. B. AB das gleichseitige $\triangle$ AEB, ziehe aus C durch E die Linie CF, nimm $CG = CF$, ziehe FG, so ist $\triangle$ CFG das verlangte.

Denn da $\angle \alpha = \frac{2}{3} R$
so ist $\angle \beta = \frac{1}{3} R$
also $\angle \gamma + \delta + \eta = \frac{5}{3} R$
da nun $AE = AB = AC$
so ist $\eta = \gamma + \delta = \frac{5}{6} R$
also $\varepsilon = \frac{1}{6} R$
Nun ist $CA = CD$
$CG = CF$
$\overline{\angle CAG = \angle CDF}$
folglich $\triangle CAG \cong \triangle CDF$
und biermit $\angle \gamma = \angle \varepsilon = \frac{1}{6} R$
daher $\angle \gamma = \frac{2}{3} R$
biermit $\angle \vartheta + \angle \lambda = \frac{4}{3} R$
zlso $\angle \vartheta = \angle \lambda = \frac{2}{3} R$

70. In einem Halbkreis ein Quzdrat zu zeichnen, dessen eine Seite mit dem Durchmesser zusammenfällt.

Nimm vom Mittelpunkt C auf dem Halbmesser eine beliebige Länge CD, errichte in D ein Loth auf dem Durchmesser, nimm dasselbe $DE = 2CD$, ziehe CE, so ist der Durchschnittspunkt F in der Peripherie eine Ecke des Quadrats, ziehe daher $FG \# AB$, fälle die Lothe FI, GH, so ist $FGHI$ das verlangte Quadrat.

Fig. 388.



71. Dasselbe Quadrat im Halbkreise in ein Rectangel im Halbkreise zu verwandeln.

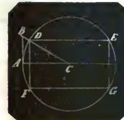
Halbire eine lothrechte Seite in M, ziehe durch den Theilpunkt M die Parallele KL mit dem Durchmesser, fälle die Lothe KN, LO so ist Rechteck $KLON$ das verlangte. Nämlich die beiden Quadrate FM, GM sind nach KH, IL verlegt worden.

Mit dieser Construction ist zugleich die Aufgabe gelöst, in den Halbkreis 6 gleiche Quadrate oder in den Kreis 12 gleiche Quadrate zu beschreiben.

72. In einen Kreis ein Rectangel zu beschreiben, dessen anliegende Seiten wie $n : m$ sich verhalten.

Theile den Halbmesser AC in n gleiche Theile, errichte in A die Tangente, nimm

Fig. 389.



in derselben $AB = m$ der gleichen Theile ziehe BC, aus dem Durchschnittspunkt D in der Peripherie ziehe $DE \parallel AC$, fälle die Lothe DF, EG, ziehe FG, so ist $DEFG$ das verlangte Rectangel.

73. In einen Quadrant ein Quadrat zu zeichnen, welches mit einer Ecke in dem Mittelpunkt und mit beiden anliegenden Seiten in den Halbmessern liegt.

Halbire den Quadrant durch den Halbmesser CD, ziehe $DE \parallel AC$, $DF \parallel BC$, so ist $CEDF$ das verlangte Quadrat.

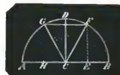
Fig. 390.

74. In einen Halbkreis ein gleichseitiges $\triangle$ zu zeichnen, dessen eine Ecke in dem Mittelpunkt liegt.

Halbire den Halbmesser BC in E, errichte die Ordinate EF, ziehe $FG \parallel AB$, CF und CG, so ist $\triangle\, CFG$ das verlangte.

Aus dieser Construction entspringt unmittelbar die des regulären Sechsecks im Kreise: Man halbirt 2 in einem Durch-

Fig. 391.



messer liegende Halbmesser in E und H und zieht durch diese Punkte normal auf AB die Sehnen, welche außer A und B die übrigen 4 Punkte bestimmen.

75. In einem Quadrant ein gleichseitiges $\triangle$ zu zeichnen, dessen eine Ecke den Bogen halbirt.

Nimm vom Mittelpunkt C aus zwei beliebig gleiche Stücke CD, CE auf beiden

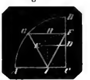
Fig. 392.

Halbmessern, zeichne über DE das gleichseitige $\triangle\, GDE$, ziehe von F, dem Halbirungspunkt des Quadrant Parallelen FH, FI mit GD und GE, verbinde HI, so ist $\triangle\, FHI$ das verlangte $\triangle$.

76. In einen Quadrant ein gleichseitiges $\triangle$ zu zeichnen, dessen eine Seite mit einem Halbmesser $\parallel$ läuft.

Theile den anderen Halbmesser BC in 7 gleiche Theile, beschreibe über BC den Halbkreis, errichte in dem 3ten Theilpunkt D vom Mittelpunkt C aus auf BC

Fig. 393.




die rechtwinklige Ordinate DE, zeichne aus C den Bogen EF, so ist $FG \parallel AC$ die eine Seite des verlangten Dreiecks; halbire nun FG in H, errichte das Loth HI bis in AC, ziehe GI, FI, so ist $\triangle FGI$ das verlangte $\triangle$.

Denn es ist

$$CF^2 = CE^2 = CD \cdot BC = \tfrac{3}{7}BC \cdot BC = \tfrac{3}{7}BC^2$$

$$\begin{aligned} FG^2 &= BF(BC + CF) \\ &= (BC - CF)(BC + CF) = BC^2 - CF^2 \\ &= BC^2 - \tfrac{3}{7}BC^2 = \tfrac{4}{7}BC^2 \end{aligned}$$

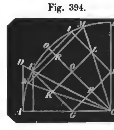
Nun ist $GI^2 = FI^2 = FH^2 + HI^2$

$$= \left(\frac{FG}{2}\right)^2 + CF^2 = \tfrac{1}{7}BC^2 + \tfrac{3}{7}BC^2 = \tfrac{4}{7}BC^2$$

folglich $FG = GI = FI$.

77. In einen Quadrant ein Quadrat zu zeichnen, welches mit 2 Ecken die Halbmesser und mit den beiden anderen den Bogen berührt.

Fig. 394.



Errichte in A eine Tangente $AD = \tfrac{1}{2}AC$, ziehe CD, fälle aus dem Durchschnittspunkt E in der Peripherie das Loth EF, nimm $FG = EF$, ziehe EG, nimm $CH = CG$, ziehe GH, ziehe $EI \parallel GH$, $HI \parallel EG$, so ist $EGHI$ das verlangte Quadrat.

Denn da $AD = \tfrac{1}{2}AC$

so ist auch $EF = \tfrac{1}{2}FC = FG = GC$

und da $HC = GC = FG = EF$

so ist $GH = EG$

$HI \parallel EG$ auch $= EG$

und $EI \parallel$ und $= GH$

Setzt man 4 Quadranten zu einem Kreise zusammen, so hat man die Aufgabe gelöst: in einen Kreis 5 gleiche Quadrate zu zeichnen, von dem mittleren 5ten ist GH die eine Seite, HC und GC sind dessen halbe Diagonalen.

78. Das Quadrat im Quadrant in ein gleichschenkliges $\triangle$ im Quadrant zu verwandeln.

Halbire beide Seiten EG, HI in K, L, ziehe KL, aus C durch K, L die Halbmesser CN, CM, ziehe NM, so ist $\triangle CMN$ das verlangte.

Denn halbirt man den Quadrant durch CO so ist

da $CP = HP = HL$

auch $LQ = \tfrac{1}{2}CQ$

ebenso $MR = \tfrac{1}{2}CR$

Nun ist $CM^2 (= r^2) = MR^2 + CR^2 = \tfrac{5}{4}CR^2$

mithin $CR^2 = \tfrac{4}{5}r^2$

aber $\triangle CMN = MR \cdot CR = \tfrac{1}{2}CR^2 = \tfrac{2}{5}r^2$

Nun ist $CE^2 (= r^2) = EF^2 + CF^2$

$$= EF^2 + (2EF)^2 = 5EF^2$$

mithin $EF^2 = \tfrac{1}{5}r^2$

Da nun $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 2EF^2$

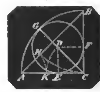
so ist EG^2 d. h. $\square\, EGHI = \tfrac{2}{5}r^2$

und $\square\, EGHI = \triangle CMN$.

79. In einen Quadrant ABC den berührenden Kreis zu zeichnen.

Ziehe die Sehne AB, halbire den Quadrant in G, zeichne aus B den Bogen CH, aus A den Bogen HK, endlich aus C den Bogen KD, so ist D der Mittelpunkt

Fig. 395.



des verlangten Kreises. Fällt man nämlich die Lothe DE, DF auf AC, BC, so ist $DE = DF = DG$.

Denn es ist in Folge der Construction:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2$$

und $AB^2 = BH^2 + AH^2 + 2BH \times AH$

$$= AC^2 + AK^2 + 2AC \times AK$$

hieraus $2AC^2 = AC^2 + AK^2 + 2AC \times AK$

oder $AC^2 = AK^2 + 2AC \times AK$

oder $AC^2 - 2AC \times AK + AK^2 = 2AK^2$

oder $(AC - AK)^2 = CK^2 = CD^2 = 2AK^2$

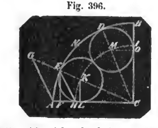
Nun ist auch $CD^2 = DF^2 + DE^2 = 2DE^2$

folglich $AK = DE = DF$
zugleich auch
$$AK = AC - CK = CG - CD = DG$$
folglich $DE = DF = DG$

80. In einen Quadrant 2 gleiche einander berührende Kreise zu zeichnen.

Theile den Quadrant in 4 gleiche Theile, ziehe durch die beiden äußeren Theilpunkte D, E die Halbmesser CD, CE, fälle das Loth EF auf AC, verlängere CE, so daſs $EG = EF$, ziehe AG und

Fig. 396.



$EH \parallel AG$, zeichne durch H den Quadrant $HKMI$, so sind K, M die Mittelpunkte der verlangten Kreise.

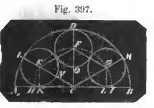
Denn es ist $CE : CH = EG : HA$
$$CE : CK = EF : KL$$
Nun ist $CH = CK$ und $EG = EF$
folglich $AH = EK = KL$

Der Kreis aus K berührt also den Bogen in E und den Halbmesser in L, der Kreis aus M desgleichen berührt den Bogen in D, den Halbmesser in O, beide Kreise berühren einander in dem mittleren Halbmesser CN.

81. In einem Halbkreise 3 gleiche einander berührende Kreise zu zeichnen.

Zeichne mit $\frac{1}{3}$ des Halbmessers $AC = CH$ den Halbkreis $HEFGI$, so liegen in diesem die Mittelpunkte der verlangten Kreise

Fig. 397.



und zwar der mittelste F in dem lothrechten Halbmesser CD und die zur Seite E und G in Entfernung $EF = GF = CF$.

Denn fällt man die Lothe EK, GL, zeichnet die Centralen $EF = FG$ so muſs sein

$$AH = EL = DF = GM = IB = EK = GL = \tfrac{1}{2}EF = \tfrac{1}{2}FG$$

Es sind also offenbar EF und FG die ganzen, EK und GL die halben Seiten des regulären Sechsecks im Kreise vom Halbmesser CH.

Also $CE = EF = 2EL$
$$CL = CE + EL = 3EL$$
folglich $EL = \frac{1}{3}CL$ und $CE = \frac{2}{3}CL$.

Da $CF = 2OF$, so ist $OF = CO = CN$, mithin wird aus C mit CN noch ein tangirender Halbkreis beschrieben, und es ist mit der vorstehenden Construction auch die Aufgabe gelöst, in einen Kreis 7 gleiche einander berührende Kreise zu zeichnen.

82. Durch Kreisbogen die Punkte x und y zu finden, welche mit den Punkten a und b ein Quadrat bilden.

Fig. 398.



Beschreibe aus a und b mit ab Kreisbogen. Aus deren Durchschnittspunkt e trage die Längen ab auf beiden Bogen noch zweimal ab, $ef = fg = eh = hk = ab$; zeichne aus g den Bogen el, aus k den Bogen em, schneide diese aus b mit bf in n und aus a mit ah in o, zeichne nun aus a mit an den Bogen ny und aus b mit bo den Bogen ox, so sind x und y die verlangten Punkte.

Denn es ist zuerst $gabk$ eine gerade Linie.

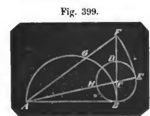
Ferner $ge = gn = bf = bn$
folglich $\angle nag = \angle nab = R$
Nun ist $bf^2 = bg^2 - fg^2 = 4ab^2 - ab^2 = 3ab^2$
folglich auch $gn^2 = bn^2 = 3ab^2$
hieraus $an^2 = bn^2 - ab^2 = 2ab^2$
da nun $ay = an$
so ist auch $ay^2 = 2ab^2$
nun ist $by = ab$
folglich $ay^2 = ab^2 + by^2$
mithin $\angle aby = R$

Eben so folgt $\angle bax = R$
also $abxy$ ist ein Quadrat.

83. Auf dem Durchmesser AB eines Halbkreises an dessen einem Endpunkt B ist ein Loth errichtet; man soll in demselben den Punkt finden, daſs von diesem aus nach dem anderen Endpunkt

A des Durchmessers eine gerade Linie gezogen, der aufserhalb des Kreises liegende Theil derselben einer gegebenen geraden Linie a gleich werde.

Fig. 399.



Nimm auf dem Loth $BD = a$, beschreibe um BD den Kreis, ziehe aus A durch dessen Mittelpunkt C die gerade Linie AE, zeichne aus A mit AE den Bogen EF bis in die Richtung des Loths, so ist F der verlangte Punkt und in AF das Stück $FG = BD = a$.

Denn es ist $AB^2 = AE \times AE$

$BF^2 = AF \times FG$

daher $AF^2 = AB^2 + BF^2$

$= AE \times AH + AF \times FG$

hieraus $AF^2 - AF \times FG = AE \times AH$

oder $AF(AF - FG) = AE \times AH$

$AF \times AG = AE \times AH$

oder da $AF = AE$

$AG = AH$

also auch $AF - AG = AE - AH$

oder $FG = HE = BD = a$

84. Eine gegebene gerade Linie AB so zu theilen, dafs das Rechteck zwischen den beiden Theilen einem gegebenen Quadrat gleich werde.

Fig. 400.

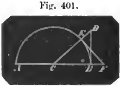


Zeichne über AB den Halbkreis, errichte in einem Punkt, z. B. A auf AB das Loth AD = der Seite des gegebenen Quadrats, ziehe DE bis zur Peripherie $\mp AB$, fälle das Loth EF auf AB, so ist F der verlangte Theilpunkt, nämlich $AF \times BF = AD^2$.

85. Eine gegebene gerade Linie AB um ein Stück zu verlängern, dafs das Rechteck zwischen der ganzen verlängerten Linie und dem Verlängerungsstück einem gegebenen Quadrat gleich werde.

Zeichne über AB den Halbkreis, errichte in einem Endpunkt z. B. B das Loth BD = der Seite des gegebenen Quadrats, ziehe aus dem Mittelpunkt C die gerade Linie

Fig. 401.



CD, errichte in deren Durchschnittspunkt E mit der Peripherie auf CD die Normale EF bis in die Richtung von AB, so ist BF die verlangte Verlängerung, nämlich $AF \times BF = BD^2$

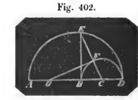
Denn $\triangle DCB \cong \triangle FCE$

daher $BD = EF$

und $AF \times BF = EF^2 = BD^2$

86. Eine gegebene gerade Linie AB in zwei Theile zu theilen, so dafs das Quadrat des einen Theils = wird dem Rectangel zwischen dem anderen Theil und einer zweiten gegebenen geraden Linie BD.

Fig. 402.



Setze beide gerade Linien zu einer AD zusammen, beschreibe über AD und über BD Halbkreise, errichte in B die lothrechte Ordinate BE, ziehe aus der Mitte C von BD die gerade Linie CE, in deren Durchschnittspunkt F mit der Peripherie, errichte auf CE die Normale FG bis in die Richtung AB, so ist G der Theilpunkt, nämlich

$AG \times BD = BG^2$

Denn es ist

$BE^2 = AB \times BD$

$FG^2 = GB \times GD$

Nun ist $\triangle BEC \cong \triangle FGC$

daher $BE = FG$

folglich $AB \times BD = GB \times GD$

oder $(AG + BG) \times BD = GB \times (GB + BD)$

also $AG \times BD = GB^2$

87. Eine gerade Linie AB so zu schneiden, dafs das unter der Ganzen und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rectangel dem Quadrat des übrigen Abschnitts gleich sei (Euklid II, 11).

Halbire AB in C, errichte in A auf AB das Loth $AD = AC$, verlängere DA bis E, so daſs $DE = DB$, nimm $AF = AE$, so ist F der verlangte Theilpunkt und zwar

$$AB \times BF = \square AF$$

Fig. 403.

Denn es ist

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

auch $BD^2 = (AD + AE)^2 = \left(\frac{AB}{2} + AE\right)^2$

$$= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AE^2 + AB \times AE$$

folglich $AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

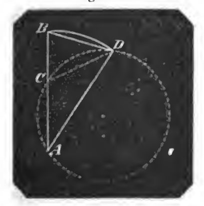
$$= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AE^2 + AB \cdot AE$$

oder $AB^2 = AB \cdot AE = AE^2$

oder $AB(AB - AE) = AE^2$

oder $AB \times BF = AF^2$

Fig. 404.



88. Ein gleichschenkliges $\triangle$ zu zeichnen, in welchem jeder der Winkel an der Grundlinie das Doppelte des Winkels an der Spitze ist. Schneide eine beliebige gerade Linie AB in C, so daſs $AB \times BC = AC^2$ (No 87), zeichne aus A mit AB einen Kreisbogen, nimm BD als Sehne $= AC$, ziehe AD, so ist $\triangle ABD$ das verlangte und $\angle ABD = \angle ADB = 2 \angle BAD$.

Denn zieht man CD, beschreibt um die Punkte A, C, D einen Kreis, so ist da $AC^2 = BD^2 = AB \times BC$ BD die Tangente des Kreises ACD in D

folglich $\angle BDC = \angle CAD$

hierzu $\angle ADC = \angle ADC$

$\angle ADB = \angle CAD + \angle ADC = \angle BCD$

also auch $\angle ABD = \angle BCD$

daraus $BD = CD$

also auch $AC = CD$

daraus $\angle CAD = CDA$

und $\angle ADB = \angle ABD = 2 \angle BAD$.

88. In und um einen Kreis das reguläre Sechseck zu zeichnen. Trage den Halbmesser in der Peripherie 6 Mal herum. Für den ersten Fall verbinde die Theilpunkte durch Sehnen, für den zweiten Fall ziehe an denselben Tangenten bis zu ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten.

89. In und um einen Kreis das reguläre Dreieck zu zeichnen. Von den Theilpunkten des Sechsecks verbinde für den ersten Fall den ersten mit dem dritten, diesen mit dem fünften, diesen mit dem ersten durch Sehnen; für den zweiten Fall ziehe an den genannten Theilpunkten Tangenten bis zu ihren Durchschnittspunkten.

90. In und um einen Kreis das reguläre Zwölfeck zu zeichnen. Halbire jeden der 6 Bogen, die dem regulären Sechseck angehören und verfahre mit den 12 Theilpunkten wie beim Sechseck.

91. In und um einen Kreis das reguläre Viereck zu zeichnen. Zeichne zwei normal auf einander befindliche Durchmesser und verfahre mit den 4 Theilpunkten in der Peripherie wie beim Sechseck.

92. In und um einen Kreis das reguläre Achteck zu zeichnen. Halbire die Quadranten des Kreises und verfahre mit den 8 Theilpunkten wie vorher.

93. In einen Kreis ein reguläres Fünfeck zu zeichnen. (Euklid IV, 11.)

Fig. 405.



Zeichne ein gleichschenkliges $\triangle$ wie No. 88, trage in den gegebenen Kreis nach No. 39 das diesem ähnliche $\triangle ABD$, in

dem also $\angle ABD = \angle ADB = 2 \angle BAD$, halbire die beiden $\angle ABD$ und ADB durch BE nnd EF, verbinde die Pnnkte A, F, B, D, E, A, so entsteht das verlangte reguläre Fünfeck. Denn da die Peripheriewinkel der Bogen BD, BF, AF, AE, DE einander gleich sind, so sind auch diese Bogen selbst und deren Sehnen einander gleich.

94. In einen Kreis ein reguläres Zehneck zu zeichnen.

Nach der Construction des Euklid No. 93 hat man nur noch die Bogen des regu-

Fig. 406.



lären Fünfecks zu halbiren um das reguläre Zehneck zu erhalten. Allein man wendet die Euklidische Construction einfacher sogleich auf das Zehneck an, indem man den $\angle BAD$, Fig. 405, als Centriwinkel statt als Peripheriewinkel construirt:

Man construirt nämlich einen Quadrant ACB, halbirt einen Halbmesser in D, zieht BD, zeichnet aus D den Bogen CE, aus B den Bogen EF, so ist Sehne BF die Seite des regulären Zehnecks.

Denn es ist hier $BD^2 = BC^2 + CD^2$

oder $(BE + CD)^2 = BC^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

oder $\left(BE + \frac{BC}{2}\right)^2 = BC^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

oder da $BF = BE$

$BF^2 + BC \cdot BF = BC^2$

oder $BF^2 = BC \times (BC - BF)$

wie in Fig. 403 (zu No 87), wo

$AF^2 = AB(AB - AF)$

folglich wenn man CF zieht, nach No. 88

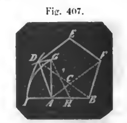
$\angle CBF = \angle BFC = \frac{1}{2} \angle BCF$

95. Um einen Kreis ein reguläres Fünfeck zu zeichnen ist im Euklid der folgende Satz 12. Man construirt die 5 Punkte in der Peripherie für das reguläre Fünfeck im Kreise und zieht an denselben 5 Tangenten. Eben so verfährt man für das reguläre Zehneck um den Kreis.

96. Ueber einer geraden Linie AB als Seite das reguläre Fünfeck zu beschreiben.

Errichte in beiden Endpunkten A, B Lothe, wie $AG = AB$, halbire AB in H, zeichne aus H den Bogen GI bis in die Verlängerung von BA. Beschreibe nun aus A und B mit AB und mit BI Bogen, welche sich in D und F schneiden

Fig. 407.



und 2 Punkte für die Ecken des Fünfecks sind. Die 5te Ecke E erhält man durch Bogen aus D und F mit AB.

Diese Construction gründet sich auf die Eigenschaft des Fünfecks, dafs 2 Diagonalen, wie AF, BD, sich so schneiden, dafs jeder gröfsere Abschnitt CD und CF = der Seite AB und zugleich die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Diagonale und dem kleineren Abschnitt BC und AC wird, dafs also

$BD : DC = DC : BC$

oder $BD : AB = AB : BC$

Nun ist construirt:

$HI^2 = HG^2 = AG^2 + AH^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

hieraus $HI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AB^2$

oder $\left(HI + \frac{AB}{2}\right)\left(HI - \frac{AB}{2}\right) = AB^2$

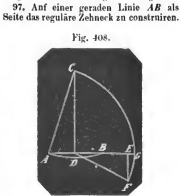
oder $BI \times AI = AB^2$

Da nun $BI = AB + AI$

so ist AI = dem kleineren Abschnitt der Diagonale und BI = der ganzen Diagonale.

97. Auf einer geraden Linie AB als Seite das reguläre Zehneck zu construiren.

Fig. 408.



Halbire AB in D, verlängere AB, nimm $BE = \frac{1}{2}AB = DB$, errichte in E auf AE das Loth $EF = BE$, zeichne aus D den Bogen FG, errichte in D ein Loth auf AB und schneide dieses aus A mit AG in C, so ist C der Mittelpunkt des Kreises, in welchem AB die Seite des regulären Zehnecks ist.

Denn wie in Fig. 403 zu No. 87 ist hier

$(DF - EF)^2 = (DE - BG)DE$

oder $BG^2 = DE^2 - DE \times BG$

oder $(DE + BG) \times BG = DE^2$

oder $AG \times BG = AB^2$

oder $AG(AG - AB) = AB^2$

oder $AC(AC - AB) = AB^2$

mithin AB die Seite des Zehnecks im Kreise vom Halbmesser AC.

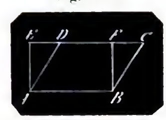
98. In einen Kreis ein reguläres Funfzehneck zu beschreiben.

Beschreibe an einem beliebigen Punkt der Peripherie die Seite des regulären Dreiecks und an demselben Punkt nach derselben Richtung die Seite des regulären Fünfecks, der Bogen zwischen beiden Seiten $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15}$ der Peripherie halbirt, giebt $\frac{1}{15}$ der Peripherie und die Sehne desselben die Seite des regulären Funfzehnecks.

99. Ein # $ABCD$ in ein Rechteck zu verwandeln.

Verlängere eine Seite z. B. CD des # da wo die Verlängerung mit der anliegenden Seite einen spitzen ∠ bildet, fälle von den Ecken der gegenüber liegenden

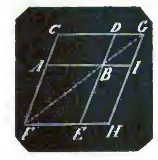
Fig. 409.



Seite A und B Lothe AE, BF auf die verlängerte, so ist $ABEF$ das verlangte Rechteck.

100) Ein # CB in ein anderes # mit denselben Winkeln und einer gegebenen Seite a zu verwandeln.

Fig. 410.



Verlängere eine Seite DB bis E, so dafs $BE = a$, vollende das # $ABEF$, ziehe die Diagonale FB bis in die Richtung von CD, ziehe GH ∦ DE, vollende die # DI und BH, so ist # BH das verlangte.

101) Ein # $ABCD$ in ein △ zu verwandeln.

Verlängere eine Seite z. B. AB um eine gleiche Länge $BE = AB$, ziehe von E nach D, so ist △ AED das verlangte.

Fig. 411.

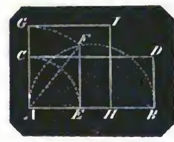


Errichtet man in B das Loth BF, zieht AF und EF, so erhält man ein verlangtes gleichschenkliges △ AFE. Eben so kann man ein # in ein △ mit gegebenem Winkel, und ein △ in ein # verwandeln.

102) Ein Rechteck CB in ein Quadrat zu verwandeln.

Beschreibe über einer der beiden längeren Seiten z. B. AB den Halbkreis, aus

Fig. 412.

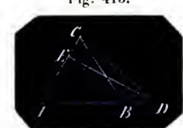


A den Quadrant CE, errichte in E die lothrechte Ordinate EF, zeichne aus A mit AF den Quadrant GFH, vollende das Quadrat $AGIH$, so ist dieses das verlangte. Hiernach ist mit Hülfe von No. 99 jedes #, und mit Hülfe von No. 101 jedes △ in ein Quadrat zu verwandeln.

103. Ein △ ABC in ein anderes △ mit gegebener Grundlinie a zu verwandeln.

Nimm auf einer Seite z. B. AB die Länge $AD = a$, ziehe CD und aus B die

Fig. 413.



Linie $BE \ddagger CD$, ziehe DE, so ist ADE das verlangte $\triangle$.

Denn es ist $\triangle CDB = \triangle CDE$
hierzu $\triangle ACD = \triangle ACD$

giebt $\triangle ACD \pm \triangle CDB = \triangle ACD \pm \triangle CDE$
oder $\triangle ABC = \triangle ADE$

Fig. 414.



104) Ein $\triangle ABC$ in ein anderes mit gegebener Höhe h zu verwandeln.

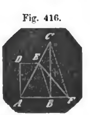
Trage auf einer Seite z. B. AB des $\triangle$ die Höhe $AD = h$ auf, ziehe aus D eine

Fig. 415.



Parallele DE mit AB bis zu einer Seite z. B. AC oder in deren Richtung, ziehe EB und aus C die Parallele CF damit bis in die Richtung von AB, ziehe EF, so ist $\triangle EAF$ das verlangte. Beweis wie No. 103.

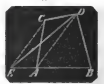
Fig. 416.



105) Ein Viereck $ABCD$ in ein Dreieck zu verwandeln.

Zeichne eine beliebige Diagonale z. B. AD, aus einer der anderen beiden Ecken, z. B. C die Parallele CE damit bis in die Richtung der gegenüber liegenden Seite AB, ziehe DE, so ist $\triangle DEB$ das verlangte. Beweis wie No. 103.

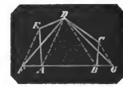
Fig. 417.



106) Ein Fünfeck $ABCDE$ in ein Dreieck zu verwandeln.

Ziehe von einer Ecke z. B. D die beiden Diagonalen DA, DB. Verlängere AB zu beiden Seiten, ziehe von den benachbarten Ecken C, E Parallelen CG, EF mit der nächsten Diagonale bis in die Richtung von AB, ziehe die Linien DF

Fig. 418.



und DG, so ist $\triangle DFG$ das verlangte. Es ist hiermit jede beliebige geradlinig vielseitige Figur in ein $\triangle$ und nach No. 101 in ein Quadrat zu verwandeln.

107) Eine gegebene vielseitige Figur in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Grundlinie in eine deren Seiten und dessen Spitze in einen gegebenen Punkt fällt, der in einer Seite oder innerhalb oder aufserhalb der Figur liegen mag.

Verwandle die Figur nach No. 106 in ein Dreieck, dessen Spitze in einer Ecke der Figur liegt, dieses dann nach No. 104 in ein $\triangle$ von derjenigen Höhe, die den Abstand der gegebenen Spitze von der Grundlinie FG angiebt, und von diesem verlege dann die Spitze an den gegebenen Ort wie No. 101 D nach F oder C.

108) Ein $\triangle ABD$ in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Beschreibe über AB das gleichseitige $\triangle EAB$. Ist die Höhe EL desselben gröfser als die Höhe des gegebenen $\triangle$, beschreibe über EL den Halbkreis, errichte auf EL durch D die rechtwinklige Ordinate GF, beschreibe aus L mit FL den Bogen FH bis in EL, zeichne durch H die Linien $HI \ddagger AE$ und $HK \ddagger BE$, so ist $\triangle HIK$ das verlangte.

Ist die Höhe HL kleiner als die des gegebenen Dreiecks, so verlängere dieselbe, fälle

Fig. 419.

von D das Loth DG auf EL, beschreibe über GL den Halbkreis, errichte in E auf EL die rechtwinklige Ordinate, zeichne aus L mit FL den Bogen FH, ziehe $HI \parallel AE$, $HK \parallel BE$, so ist $\triangle HIK$ das verlangte. Denn es ist in beiden Fällen

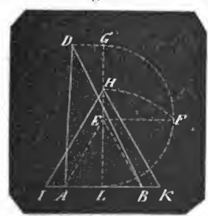
$$\triangle ABD : \triangle ABE = GL : EL$$
$$\triangle ABE : \triangle HIK = EL^2 : HL^2$$

hieraus $\triangle ABD : \triangle HIK = GL \cdot EL : HL^2$ oder FL^2

mithin $\triangle ABD = \triangle HIK$



Fig. 420.



109) Ein gegebenes $\triangle ABD$ in ein einem zweiten gegebenen $\triangle x$ ähnliches Dreieck zu verwandeln.

Lege (wie in Fig. 419 u. 420 das gleichseitige $\triangle AEB$) über eine Seite AB das Dreieck x, und zeichne durch Parallelen mit dessen über AB befindlichen Seiten das ihm ähnliche $\triangle AEB$, dessen Grundlinie AB ist, fälle aus E die Höhe EL, und construire weiter wie No. 108, so erhält man $\triangle HIK \cong \triangle ABD$ und $\sim \triangle x$.

110) Jedes beliebige Vieleck in ein $\triangle$ zu verwandeln, das einem gegebenen $\triangle x$ $\sim$ ist.

Verwandle das Vieleck nach No. 106 in ein $\triangle$, und verfahre dann nach No. 109.

111) Ein gegebenes Vieleck in ein Vieleck zu verwandeln, welches einem anderen gegebenen Vieleck N ähnlich ist.

Verwandle das gegebene Vieleck in ein Quadrat, dessen Seite sei a, verwandle ebenso das Vieleck N in ein Quadrat, dessen Seite sei b; nun nimm eine beliebige Seite c des Vielecks N, so findet man die derselben homologe Seite x, wenn man zu den Längen b, a, c die vierte geometr. Proportionale construirt (No. 22).

Denn bezeichnet man den Inhalt des zu verwandelnden Vielecks mit F, so hat man

$$F : N = a^2 : b^2$$

Soll nun das Vieleck von der Seite $x = F$ werden, so hat man ebenfalls

$$N : F = c^2 : x^2$$

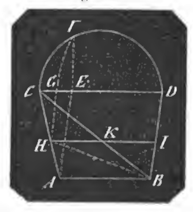
hieraus $a^2 \times c^2 = b^2 \times x^2$

oder $a \times c = b \times x$

oder $b : a = c : x$

112) Ein $\triangle ABC$ in ein Trapez zu verwandeln, welches zu einer der parallelen Grundlinien eine der Dreiecksseiten AB hat, und von deren anliegenden Winkeln

Fig. 421.



der eine der $\angle ABC$ des $\triangle$, der andere aber gleich einem gegebenen $\angle x$ ist.

Zeichne $\angle ABD = x$, ziehe $CD \parallel AB$, zeichne über CD den Halbkreis, $AE \parallel BD$, errichte in E die lothrechte Ordinate EF, zeichne aus D mit DF den Bogen FG, ziehe $GH \parallel AE$, $HI \parallel AB$, so ist Trapez $ABHI$ das verlangte.

Es ist zu zeigen, dafs

$$\triangle BKI = \triangle CKH$$

oder dafs $\triangle BHI = \triangle HBC$

Nun ist

$$\triangle BHI : \triangle HAB = HI : AB$$
$$\triangle CHB : \triangle HAB = CH : AH$$
$$= CG : GE$$
$$= CD - DG : DG - DE$$

Da nun

$$CD : DG = DG : DE$$

so ist

$$CD - DG : DG - DE = DG : DE$$
$$= HI : AB$$

oder $\triangle CHB : \triangle HAB = HI : AB$

folglich $\triangle BHI = \triangle CHB$

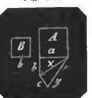
113) Ein Trapez in ein anderes Trapez zu

verwandeln, welches mit ihm eine parallele Grundlinie nnd einen daran liegenden ∠ gemeinschaftlich hat, dessen zweiter anliegender ∠ aber einem gegebenen ∠ *x* gleich ist.

Verwandle das Trapez in ein Dreieck mit der beizubehalten Grundlinie nnd dem beizubehaltenden ∠, nnd dieses nach No. 112 in das verlangte Trapez.

114) Zwei oder mehrere gegebene Quadrate *A*, *B*, *C*..., deren Seiten *a*, *b*, *c*..., also ebenfalls gegeben sind in ein einziges Qnadrat zu verwandeln.

Fig. 422.



Verlängere eine Seite des einen Quadrats *A* um die Seite *b* des zweiten Qua drats, ziehe die Hypothenuse *x*, so ist das Qnadrat über $x = A + B$; setzt man an *x* unter einem *B*∠ die Seite *c* des dritten Qnadrats, so erhält man in der Hypothenuse *y* die Seite des Quadrats $= A + B + C$ n. s w.

115) Ein Qnadrat zu zeichnen, welches gleich dem Quadrat *A* weniger dem Quadrat *B*.

Fig. 423.



Beschreibe über einer Seite des Quadrats *A* einen Halbkreis, trage die Seite des Quadrats *B* als Sehne *ab* ein, so ist die andre Sehne *bd* die Seite des verlangten Qnadrats; zeichnet man also ans *d* mit *db* den Bogen, so ist das über *de* beschriebene Quadrat *C* das verlangte $A - B$.

116) Ein Qnadrat zu zeichnen, welches *n*mal einem gegebenan Quadrat $A =$ ist.

Die Seite *ab* des gegebenen Quadrats verlängere bis *d*, so dafs $ad = n \cdot ab$, beschreibe über *ad* den Halbkreis, verlängere *bg* bis znr Peripherie in *f*, zeichne aus *a* den Bogen *fe*, so ist *ae* die Seite des verlangten Quadrats *eh*.

Fig. 424.



Denn

$A : \square eh = ab^2 : ae^2 = ab^2 : af^2 = ab^2 : ab \cdot ad = ab : ad = 1 : n$

117) Ein Quadrat zu zeichnen, welches $\frac{1}{n}$ eines gegebenen Quadrats $B =$ ist.

Es sei *ad* die Seite des gegebenen Quadrats, so beschreibe über *ad* den Halbkreis, nimm $ab = \frac{1}{n}\ ad$, errichte die rechtwinklige Ordinate *bf*, beschreibe aus *a* den Bogen *fe*, so ist *ae* die Seite des verlangten Quadrats. Denn es ist

$\square ad : \square ae = ad^2 : ae^2 = ad^2 : af^2 = ad^2 : ab \cdot ad = ad : ab = n : 1.$

118) Ein Quadrat zn zeichnen, welches $\frac{m}{n}$ eines gegebenen Quadrats $A =$ ist.

Ist $m > n$, so sei *ab* die Seite des gegebenen Qnadrats, theile *ab* in *n* gleiche Theile, verlängere *ab* bis *d*, so dafs *ad* $= m$ solchen Theilen ist, die übrigen Constructionen wie No. 117; dann ist *ae* die Seite des verlangten Quadrats. Denn

$\square ab : \square ae = ab^2 : ae^2 = ab^2 : af^2 = ab^2 : ad \cdot ab = ab : ad = n : m$

woraus $\square ae = \frac{m}{n} \square ab$

Ist $m < n$; *ad* die Seite des gegebenen Qnadrats, so theile *ad* in *n* gleiche Theile, nimm $ab = m$ derselben, construire wie vorher, so ist *ae* die Seite des verlangten Qnadrats. Denn

$\square ad : \square ae = ad^2 : ae^2 = ad : ab = n : m$

woraus $\square ae = \frac{m}{n} \square ad$

119) Aehnliche Figuren nnd Kreise werden summirt, subtrahirt, vervielfacht und getheilt, wenn man mit ähnlich liegenden Seiten oder Diagonalen nnd mit Halbmessern oder Dnrchmessern so operirt, wie in den vorigen 5 Constructionen No. 114 bis No. 118 mit den Quadratseiten.

120) Ein Quadrat zn zeichnen, welches 313 □Fnfs enthält.

Da 313 eine Primzahl ist, so dividire

mit 10, und man erhält $313 = 31,3 \times 10$. Nimm nun $ad = 31,3$ Fuſs, $ab = 10$ Fuſs, construire wie vorher, so hat man ae als die Seite des verlangten Quadrats. Denn es ist
$ae^2 = ab \times ad = 10' \times 3,13' = 313$ □Fuſs.

121) Von einem △ ABD ein △ abzuschneiden, welches sich zu dem ganzen △ verhält wie zwei gegebene Zahlen m, n.

Fig. 425.



Beschreibe über einer Seite z. B. DB den Halbkreis, theile DB in n gleiche Theile, errichte in dem $m$ten Theilpunkt von D ab, in E die rechtwinklige Ordinate EF, beschreibe aus D mit DF den Bogen FG, ziehe $GH \mathbin{+\!\!\!\!\!\;\mathord{\parallel}} AB$, so ist △ DGH : △ $DAB = m : n$. Denn es ist
△ $DGH : DAB = DG^2 : DB^2 = DF^2 : DB^2$
$= DE \cdot DB : DB^2 = DE : DB = m : n$

122) Auf dieselbe Weise theilt man auch andere gradlinige Figuren. Z. B. Von dem Fünfeck $ABCDE$ ein ähnliches abzuschneiden, welches die Hälfte des Ganzen beträgt.

Fig. 426.

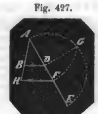


Zeichne über einer Seite z B. AE den Halbkreis, halbire AE in F, errichte die rechtwinklige Ordinate FG auf AE, beschreibe aus A mit AG den Bogen Ae, ziehe aus A die Diagonalen AD, AC, ed ⫲ ED, dc ⫲ DC, cb ⫲ CB, so ist das Fünfeck $Abcde$ das verlangte.

123) Ein △ zu zeichnen, welches dem gegebenen △ ABD ∾ ist und ein beliebig Vielfaches, z. B. das $\frac{n}{m}$ fache desselben beträgt.

Theile eine beliebige Seite z. B. AD

Fig. 427.



in m gleiche Theile, verlängere sie und trage noch $(n - m)$ derselben Theile hinzu, so daſs die Länge AE n gleiche Theile enthält, beschreibe über AE den Halbkreis, errichte in D auf AE die rechtwinklige Ordinate DG, zeichne aus A den Bogen GF, ziehe FH ⫲ BD bis in die Richtung von AB, so ist △ AFH das verlangte.

124) Ein Dreieck, Viereck, Vieleck kann in eine beliebige Anzahl (n) gleicher Theile getheilt werden, so daſs die homologen Seiten mit einander ⫲ laufen, wenn man nach No. 121 und 122 verfährt, indem man die Seite, über welcher man den Halbkreis zeichnet, in n gleiche Theile theilt, in den Theilpunkten rechtwinklige Ordinaten errichtet und für die Parallelen aus der gemeinschaftlichen Spitze (A Fig. 426) die Bogen beschreibt.

125) Innerhalb eines △ den Punkt zu bestimmen, von dem aus 3 gerade Linien, eine nach einer Ecke, die beiden anderen ⫲ den der Ecke anliegenden Seiten das △ in drei gleiche Theile theilen.

Fig. 428.



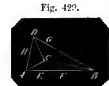
Theile eine Seite z. B. AD in 3 gleiche Theile DE, EF, FA, beschreibe über AD den Halbkreis, errichte in einem Theilpunkt E die rechtwinklige Ordinate EG, zeichne aus D den Bogen GH, ziehe HI ⫲ BD, balbire HI in K, ziehe AK, KL ⫲ AB und KM ⫲ AD, so sind die Trapeze $ABLK$, $ADMK$ und das △ LKM die 3 gleichen Theile.

Denn es ist
$MK^2 = DH^2 = DG^2 = DE \times AD = \frac{1}{3} AD^2$

daher $\triangle LKM = \frac{1}{3}\triangle ABD$
und Trapez
$ABLK =$ Trap. $ADMK = \frac{1}{3}\triangle ABD$

126) Es ist ein Dreieck ABD gegeben, man soll den innerhalb desselben liegenden Punkt C durch Construction finden, von welchem aus nach den 3 Ecken gerade Linien gezogen das $\triangle$ in 3 Dreiecke getheilt wird, die sich wie gegebene Zahlen $a:b:c$ z. B. $4:5:7$ verhalten.

Fig. 429.



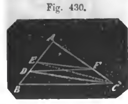
Theile eine Seite des Dreiecks in dem Verhältniſs der gegebenen Zahlen, ziehe aus den Theilpunkten mit den ihnen zunächst liegenden Seiten Parallelen, so giebt deren Durchschnittspunkt den verlangten Punkt.

Ist nämlich
$AE : EF : FB = a : b : c = 4 : 5 : 7$
$EG \nparallel AD$, $FH \nparallel BD$, und man zieht von deren Durchschnittspunkt C die Linien CA, CB, CD so ist auch
$\triangle ACD : \triangle ACB : \triangle BCD = a : b : c = 4 : 5 : 7$

Es erhellt dies sogleich, wenn man DE und DF zieht, denn man hat $\triangle ADE = ACD$ u. s. w.
Ferner $\triangle ADE : \triangle EDF : \triangle FDB = a : b : c = 4 : 5 : 7$

127) Ein $\triangle ABC$ von einem in einer Seite z. B. AB belegenen Punkt D aus in 2 gleiche Theile zu theilen.

Fig. 430.



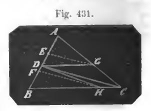
Ziehe DC nach der gegenüberliegenden Ecke, halbire AB in E, ziehe $EF \nparallel DC$ und DF, so ist $\triangle ADF =$ Viereck $BCDF = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

Denn zieht man EC so ist
$\triangle EFC = \triangle EFD$
hierzu $\triangle EFA = \triangle EFA$
giebt $\triangle AEC = \triangle ADF$

Da nun $\triangle AEC = \frac{1}{2}\triangle ABC$
so ist $\triangle ADF = \frac{1}{2}\triangle ABC$, folglich Viereck $BCDF$ ebenfalls $= \frac{1}{2}\triangle ABC$.

128) Das $\triangle ABC$ von demselben Punkt D aus in 3 gleiche Theile zu theilen.

Fig. 431.

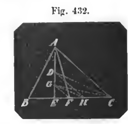


Ziehe DC, theile AB in 3 gleiche Theile, ziehe aus den Theilpunkten E, F Parallelen EG, FH mit DC, ziehe DG, DH so ist $\triangle ADG = \triangle BDH =$ Fünfeck $EGCHD = \frac{1}{3}\triangle ABC$. Beweis wie No. 127.

129) Jedes $\triangle ABC$ ist von demselben Punkt D aus in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile zu theilen. Man zieht DC, theilt AB in n gleiche Theile, zieht aus sämmtlichen Theilpunkten Parallelen mit DC und von D aus nach den in AC und BC erhaltenen Durchschnittspunkten gerade Linien.

130) Ein $\triangle ABC$ von einem innerhalb desselben beliebig gelegenen Punkt D in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 432.

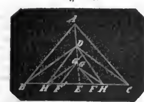


Ziehe durch eine beliebige Ecke z. B. A durch D die gerade Linie AE bis zur gegenüberliegenden Seite BC, halbire BC in F, ziehe $FG \nparallel AC$ bis in AE, ziehe DC und aus G die $GH \nparallel DC$, ziehe DH, so ist Viereck $ACHD =$ Figur $ADHBA = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

Denn wenn man noch CG zieht, so ist
$\frac{1}{2}\triangle ABC = \triangle AFC = \triangle ACG$
$= \triangle ACD + \triangle DCG = \triangle ACD + \triangle DCH$
$=$ Viereck $ACDH$

131) Ein $\triangle ABC$ von dem Punkt D innerhalb in 3 gleiche Theile zu theilen.
Ziehe von A durch D die AE, ferner

Fig. 433.

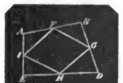


DB und *DC*, theile *BC* durch *F* und *F'* in 3 gleiche Theile, ziehe (wie Fig. 429) $FG \# AC$, $F'G' \# AB$, aus *G* die Linie $GH \# DC$, aus *G'* die $G'H' \# DB$, ziehe *DH* und *DH'*, so ist Viereck *ADHC* = Viereck $ADH'B = \triangle DHH' = \frac{1}{3} \triangle ABC$.

132) Jedes $\triangle$ *ABC* läfst sich von einem innerhalb beliebig gelegenen Punkt *D* aus in eine beliebige Anzahl (*n*) gleiche Theile theilen, wenn man wiederholend construirt wie No. 131.

133) **Ein Parallelogramm gleich der Hälfte eines gegebenen Vierecks *ABDE* zu zeichnen.**

Fig. 434.



Halbire die 4 Seiten in *F*, *G*, *H*, *I*, verbinde die Halbirungspunkte, so erhält man das verlangte #.

Denn denkt man sich die Diagonalen, so hat man

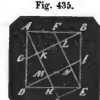
1) aus $BF : FA = BG : GD$
$FG \# AD$
aus $EI : IA = EH : HD$
$\underline{HI \# AD}$
also $FG \# HI$
ebenso $FI \# GH$

2) $\triangle DGH = \frac{1}{4} \triangle DBE$
$\triangle AFI = \frac{1}{4} \triangle ABE$

hieraus
$\triangle DGH + \triangle AFI = \frac{1}{4}$ Viereck *ABDE*
ebenso
$\triangle BFG + \triangle EHI = \frac{1}{4}$ Viereck *ABDE*
$\# FGHI = \frac{1}{2}$ Viereck *ABDE*

134) **Ein Quadrat durch 4 gerade Linien so zu zerschneiden, dafs die Stücke geeignet zusammengesetzt, 5 gleiche Quadrate geben.**

Fig. 435.



Halbire die 4 Seiten und ziehe von den Ecken nach den Halbirungspunkten, so dafs je 2 und 2 mit einander # werden, so ist die mittlere Figur ein Quadrat und jedes der kleinen Dreiecke wie *EIN* setzt sich mit dem nebenliegenden Trapez wie *EHO* mit *EHMN* zu einem Quadrat *EOMN* zusammen.

Denn	$\triangle ABG \cong \triangle DAH$
daher	$\angle ABG = \angle DAH$
und	$\angle AGB = \angle DHA$
hieraus	$\triangle AGK \sim \triangle AHD$
folglich	$\angle AKG = \angle ADH = R$

so sind auch $\angle L, M, N$ rechte $\angle$.

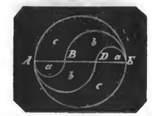
Aus	$\triangle AGK \sim \triangle ADM$
und	$AG = \frac{1}{2} AD$
folgt	$AK = \frac{1}{2} AM = KM = KL$
	$= LN = MN$

so dafs *KLMN* ein Quadrat ist.

Dafs bei Verlängerung von *MH* bis *O*, wo die Normale *EO* aus *E* trifft, $\triangle EIN \sim \triangle EHO$ folgt leicht und eben so dafs *NO* ein dem mittleren gleiches Quadrat ist.

135) **Einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile der Art zu theilen, dafs der Umfang jedes Theils dem Umfang des Kreises gleich ist.**

Fig. 436.



Soll der Kreis in *n* gleiche Theile getheilt werden, so theile einen Durchmesser *AE* in *n* gleiche Theile, hier beispielsweise in 3 Theile $AB = BD = DE$. Beschreibe über *AB*, *AD* oberhalb, über *ED*, *EB* unterhalb Halbkreise, so entstehen 6 Flächenräume, von denen je 2 und 2 einander $\cong$ sind; *a* mit *a*, *b* mit *b*,

c mit c. Die drei gleichen Theile sind in den beiden äufseren $(a+c)$ in dem mittleren $2b$. Dafs diese einander gleich sind, erhellt aus dem Folgenden.

Bezeichnet man den Inhalt des Kreises mit $2I$, den des Halbkreises also mit I, so ist jeder Halbkreis über AB und DE $= a = (\frac{1}{3})^2 I = \frac{1}{9} I$; jeder Halbkreis über AD und $EB = a + b = (\frac{2}{3})^2 I = \frac{4}{9} I$; also $c = (\frac{9}{9} - \frac{4}{9}) I = \frac{5}{9} I$ und $b = (\frac{4}{9} - \frac{1}{9}) I = \frac{3}{9} I$. Mithin sind die Theile $a + c = (\frac{1}{9} + \frac{5}{9}) I = \frac{6}{9} I$ und der mittlere Theil $2 \cdot b = 2 \cdot \frac{3}{9} I = \frac{6}{9} I$; die 3 Flächenräume also einander gleich.

Die Umfänge der Halbkreise verhalten sich aber wie deren Durchmesser, der ganze Halbkreis, also der um $c = P$ gesetzt, ist der Halbkreis um $a = \frac{1}{3} P$; der um $b = \frac{2}{3} P$.

Der Raum $a + c$ hat also den Umfang $P + \frac{1}{3} P + \frac{2}{3} P = 2P$; der mittlere Raum $2b$ hat den Umfang $2 \times \frac{1}{3} P + 2 \times \frac{2}{3} P = 2P$ = dem Umfang des ganzen Kreises.

Theilt man den Kreis allgemein in n Theile, so ist der erste Theil $\frac{1}{n^2} I$; der zweite $= \frac{4-1}{n^2} I = \frac{3}{n^2} I$; der 3te $= \frac{9-4}{n^2} I$ $\frac{5}{n^2} I$; der letzte $= \frac{n^2 - (n-1)^2}{n} I = \frac{2n-1}{n^2} I$

Von diesen setzt sich der obere erste mit dem unteren letzten, der obere zweite mit dem unteren vorletzten u. s. w. zusammen; die n Theile sind also

$$\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2n-1}{n^2}\right) I = \frac{2}{n} I; \left(\frac{3}{n^2} + \frac{2n-3}{n^2}\right) I$$
$$= \frac{2}{n} I \text{ u. s. w.}$$

und man ersieht, dafs die Construction allgemein gültig ist, da auch die Umfänge sich als gleich grofs und gleich dem Kreisumfang sich ergeben.

Constructionen, trigonometrische. In den Fig. 437 bis 440 sind die Kreise mit gleichem Halbmesser AC beschrieben, in 4 Quadranten getheilt, die wie Fig. 437 mit I. dem ersten bis IV. dem 4ten Quadrant bezeichnet sind. Es ist also $\angle ACB = 90°$. Der $\angle ACD = \alpha$ wird von dem festen Schenkel AC aus construirt; der bewegliche Schenkel CD liegt Fig. 437 im ersten, Fig. 438 im zweiten, Fig. 439 im dritten und Fig. 440 im vierten Quadrant. Der Complementswinkel zu α ist in Fig. 437 $= + \angle BCD$ in Fig 438, 439 und 440 $= - \angle BCD$.

Alle Linien wie DE, AG u. s. w. stehen mit dem Halbmesser AC in geradem Verhältnifs, so dafs mit dem $n$fachen von AC auch DE, AG u. s. w. $n$fach so grofs werden. Für den Fall, dafs $AC = 1$ ist, heifst DE der Sinus (sin) von α, DF der Cosinus (cos) von α, AG die Tangente (tg) von α, BH die Cotangente (cot) von α, CG die Secante (sec) von α, CH die Cosecante ($cosec$) von α, und die Linien DE, DF u. s. w. mit der Linie AC verglichen, geben bildlich Verhältnifszahlen zu der Zahl 1. Setzt man $AC = r$ so ist offenbar $DE = r \cdot sin\ \alpha$; $DF = r \cdot cos\ \alpha$ u. s. w. d. h. sie sind wirkliche Längen, die mit der Länge r in gewissen Verhältnissen stehen, und diese zunächst sollen hier für die vier Figuren, welche sämmtliche Fälle enthalten, construirt werden.

I. Fälle von dem Endpunkt D des beweglichen Schenkels CD ein Loth DE auf den festen Schenkel AC, so ist $DE = r \cdot sin\ \alpha$.

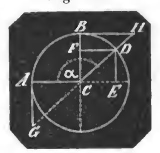
Fig. 437.



II. Fälle von dem Endpunkt D des beweglichen Schenkels CD auf den festen Schenkel BC des Complements-Winkels BCD ein Loth DF, so ist $DF = r \cdot cos\ \alpha$.

Für DF kann auch die ihr gleiche Linie CE gesetzt werden.

Fig. 438.

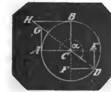


III. Errichte auf dem festen Schenkel AC in dessen Endpunkt A ein Loth AG bis in die Richtung des beweglichen Schenkels CD, so ist $AG = r \cdot tg\ \alpha$.

IV. Errichte auf dem festen Schenkel BC den Complementswinkel BCD in dessen Endpunkt B ein Loth BH bis in die Richtung des beweglichen Schenkels CD, so ist $BH = r \cdot cot\ \alpha$.

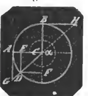


Fig. 439.



V. Die Länge *CG* des beweglichen Schenkels *CD* zwischen dem Scheitelpunkt *C* des Winkels α und dem Endpunkt *G* der Tangente von α ist $r \cdot sec\ \alpha$

Fig. 440.



VI. Die Länge *CH* des beweglichen Schenkels *CD* zwischen dem Scheitelpunkt *C* des Winkels α und dem Endpunkt *H* der Cotangente von α ist $r \cdot cosec\ \alpha$

2) Die Figuren sind absichtlich so gezeichnet, dafs die Linien *AC* und *CD* einerlei Neigung haben, also denselben spitzen Winkel (α) mit einander bilden, so dafs wenn die Winkel in den 4 Quadranten mit α_1; α_2; α_3; α_4 bezeichnet werden:

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$$
$$\alpha_3 = 180^\circ + \alpha_1$$
$$\alpha_4 = 360^\circ - \alpha_1$$

Sämmtliche gleichnamige trigonometrische Linien sind einander gleich, und da nun zu jedesmal vier verschiedenen Winkeln dieselben trigonometrischen Linien gehören, so hat man auf deren Lage zu achten, und diese mit positiv und negativ zu bezeichnen. Man setzt fest, dafs sämmtliche trigonometrische Linien für alle Winkel im 1sten Quadrant positiv sind.

Die Lage des Sinus (*DE*) kann nur entweder über dem Schenkel *AC* oder unter demselben sich befinden, folglich ist *sin* α in Fig. 437 und 438 positiv, in Fig. 439 und 440 negativ.

Die Lage des Cosinus (*DF*) kann nur entweder links von *BC* oder rechts von *BC* sein, folglich ist *cos* α in Fig. 437 und 440 positiv, in Fig. 438 u. 439 negativ.

Die Lage der Tangente (*AG*) kann nur entweder über dem Schenkel *AC* oder unter demselben sein, folglich ist *tg* α in Fig. 437 u. 439 positiv, in Fig. 438 u. 440 negativ.

Die Lage der Cotangente (*BH*) kann nur entweder links von *BC* oder rechts von *BC* sein, folglich ist *cot* α in Fig. 437 u. 439 positiv, in Fig. 438 u. 440 negativ.

Die Secante (*CG*) kann nur entweder der Schenkel des Winkels α oder dessen Verlängerung sein, folglich ist *sec* α in Fig. 437 u. 440 positiv, in Fig. 438 und 439 negativ.

Die Cosecante (*CH*) kann nur entweder der Schenkel des Winkels α oder dessen Verlängerung sein, folglich ist *cosec* α in Fig. 437 und 438 positiv, in Fig. 439 und 440 negativ.

Man hat also

	Quadranten.			
	I	II	III	IV
sinus	+	+	−	−
cosinus	+	−	−	+
tangente . . .	+	−	+	−
cotangente . . .	+	−	+	−
secante	+	−	−	+
cosecante . . .	+	+	−	−

3. Aus dem Vorstehenden ist klar, dafs man nur nöthig hat, fernere trigonometrische C. für Winkel des ersten Quadranten (für spitze Winkel) zu zeigen.

Eben so können C. für Winkel von $90^\circ - \alpha$; $90^\circ + \alpha$; $270^\circ - \alpha$; $270^\circ + \alpha$ übergangen werden, α gehöre gleichviel welchem Quadranten an. Denn

sin, *tg*, *sec* von $(90^\circ - \alpha)$ sind *cos*, *cot*, *cosec* von α

cos, *cot*, *cosec* von $(90^\circ - \alpha)$ sind *sin*, *tg*, *sec* von α

sin, *tg*, *sec* von $(90^\circ + \alpha)$ sind $+$ *cos*, $-$ *cot*, $-$ *cosec* von α

cos, *cot*, *cosec* von $(90^\circ + \alpha)$ sind $-$ *sin*, $-$ *tg*, $+$ *sec* von α

sin, *tg*, *sec* von $(270^\circ - \alpha)$ sind $-$ *cos*, $+$ *cot*, $-$ *cosec* von α

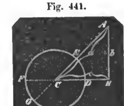
cos, *cot*, *cosec* von $(270^\circ - \alpha)$ sind $-$ *sin*, $+$ *tg*, $-$ *sec* von α

sin, *tg*, *sec* von $(270^\circ + \alpha)$ sind $-\cos$, $-\cot$, $+\operatorname{cosec}$ von α

cos, *cot*, *cosec* von $(270^\circ + \alpha)$ sind $+\sin\alpha$ $-tg\,\alpha$, $-\sec$ von α

4) Soll man die zu trigonometrischen Linien gehörenden Arcus auftragen, so hat man für diese, da sie als abstracte Zahlen erscheinen, immer in der Form $\pm\frac{a}{b}$ wenn *a* und *b* Linien sind.

Fig. 441.



I. $Arc\left(\sin = \pm\frac{b}{a}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel AB = dem Zähler *b*, schneide von *A* aus den anderen Schenkel mit dem Nenner $AC = a$ in *C*, ziehe *AC*, beschreibe aus *C* mit dem Halbmesser $CD = 1$ einen Kreis so ist

Bogen *DE* und Bogen *EF*

$$= Arc\left(\sin = +\frac{b}{a}\right)$$

Bogen *EDGF* und Bogen *DGFE*

$$= Arc\left(\sin = -\frac{b}{a}\right)$$

II. $Arc\left(\cos = \pm\frac{c}{a}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel BC = dem Zähler *c* und schneide von *C* aus den andren Schenkel mit dem Nenner $= CA = a$ in *A*, ziehe *CA*, beschreibe aus *C* mit dem Halbmesser $CD = 1$ einen Kreis, so ist

Bogen *DE* und Bogen *DGFE*

$$= Arc\left(\cos = +\frac{c}{a}\right)$$

Bogen *EF* und Bogen *EDGF*

$$= Arc\left(\cos = -\frac{c}{a}\right)$$

III. $Arc\left(tg = \pm\frac{b}{c}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel $AB = b$, den anderen $BC = c$, ziehe *CA*; in *C*, dem Endpunkt des Nenners, beschreibe den Kreis vom Halbmesser = 1, so ist

Bogen *DE* und Bogen *EDGF*

$$Arc = \left(tg = +\frac{b}{c}\right)$$

Bogen *EF* und Bogen *DGFE*

$$= Arc\left(tg = -\frac{b}{c}\right)$$

IV. $Arc\left(\cot = \pm\frac{c}{b}\right)$ zu finden.

Man verfahre wie ad III, nur dafs man den Kreis aus dem Endpunkt des Zählers *c* beschreibt; dann ist

Bogen *DE* und Bogen *EDGF*

$$= Arc\left(\cot = +\frac{c}{b}\right)$$

Bogen *EF* und Bogen *DGFE*

$$= Arc\left(\cot = -\frac{c}{b}\right)$$

V. $Arc\left(\sec = \pm\frac{a}{c}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel BC = dem Nenner *c* und schneide aus *C* mit dem Zähler = *a* den anderen Schenkel in *A*, ziehe *AC*, beschreibe aus dem Durchschnittspunkt *C* von Zähler und Nenner den Kreis mit dem Halbmesser = 1 so ist

Bogen *DE* und Bogen *DGFE*

$$= Arc\left(\sec = +\frac{a}{c}\right)$$

Bogen *EF* und Bogen *EDGF*

$$= Arc\left(\sec = -\frac{a}{c}\right)$$

VI. $Arc\left(\operatorname{cosec} = \pm\frac{a}{b}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel AB = dem Nenner *b* und schneide aus *A* mit dem Zähler = *a* den anderen Schenkel in *C*, aus diesem Punkt *C* beschreibe den Kreis mit dem Halbmesser = 1, ziehe *AC* so ist

Bogen *DE* und Bogen *EF*

$$= Arc\left(\operatorname{cosec} = +\frac{a}{b}\right)$$

Bogen *EDGF* und Bogen *DGFE*

$$= Arc\left(\operatorname{cosec} = -\frac{a}{b}\right)$$

5) Die Linien $r\sin^2\alpha$, $r\cos^2\alpha$, $r\,tg^2\alpha$, $r\cot^2\alpha$, $r\sec^2\alpha$, $r\operatorname{cosec}^2\alpha$ zu zeichnen.

I. Nimm Fig. 442 den einen Schenkel von α, z. B. $AC = r$, fälle das Loth *AB* von *A* auf den zweiten Schenkel *CB*, aus *B* wieder das Loth *BD* auf den ersten Schenkel *CA*, so ist $AD = r\sin^2\alpha$

Denn es ist

$$AD = AB \cdot \sin ABD = AB.\sin\alpha$$

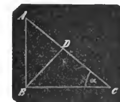
Da nun $AB = AC.\sin\alpha = r.\sin\alpha$

so ist $AD = r.\sin\alpha \cdot \sin\alpha = r.\sin^2\alpha$

II. Verfahre wie ad I so ist

$CD = r \cdot \cos^2 \alpha$
denn $CD = BC \cdot \cos \alpha$
$BC = AC \cdot \cos \alpha = r \cdot \cos \alpha$
folglich $CD = r.\cos \alpha \cdot \cos \alpha = r.\cos^2 \alpha$

Fig. 442.



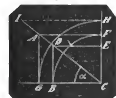
III. Trage auf einen Schenkel von α z. B. auf CA das Stück $CD = r$, fälle in D auf CA das Loth DB bis in die Richtung des anderen Schenkels CB, errichte in B auf diesem zweiten Schenkel CB das Loth BA bis in die Richtung des ersten Schenkels CA, so ist $AD = r\ tg^2 \alpha$

Denn es ist
$AD = BD \cdot tg\ ABD = BD.tg\ \alpha$
ferner $BD = DC \cdot tg\ \alpha = r \cdot tg\ \alpha$
daher $AD = r.tg\ \alpha \cdot tg\ \alpha = r.tg^2 \alpha$

IV. Verfahre wie ad 3, so ist
$AC = r.\sec^2 \alpha$
denn es ist $AC = BC.\sec \alpha$
$BC = CD.\sec \alpha = r.\sec \alpha$
daher $AC = r \cdot \sec \alpha \cdot \sec \alpha = r \sec^2 \alpha$

V. Errichte Fig. 443 im Scheitelpunkt C von α auf einem Schenkel z. B. CB ein Loth CF, nimm auf demselben $CE = r$, ziehe $ED \nparallel CB$ bis in die Richtung CA des zweiten Schenkels, fälle das Loth DB auf den ersten Schenkel CB, zeichne aus C den Quadrant BF, ziehe aus F bis in die Richtung CA die Linie $FA \nparallel CB$ so ist $AF = r\ \cot^2 \alpha$

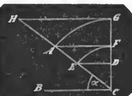
Fig. 443.



Denn es ist $AF = CF.\cot\ CAF$
$= CF\ \cot \alpha = CB.\cot \alpha = DE \cdot \cot \alpha$
da nun $DE = CE \cdot \cot\ CDE = CE \cdot \cot \alpha$
$= r\ \cot \alpha$
so ist $AF = r.\cot \alpha \cdot \cot \alpha = r \cdot \cot^2 \alpha$

VI. Errichte Fig. 444 in C auf einem Schenkel CB von α ein Loth CF, nimm auf demselben das Stück $CD = r$, ziehe aus D bis in die Richtung CA des zweiten Schenkels von α $DE \nparallel CB$, zeichne aus C den Bogen EF, ziehe $FA \nparallel CB$, so ist $CA = r\ \operatorname{cosec}^2 \alpha$

Fig. 444.

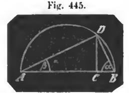


Denn es ist
$CA = CF \cdot \operatorname{cosec}\ CAF = CF.\operatorname{cosec} \alpha$
$= CE.\operatorname{cosec} \alpha$
aber $CE = CD\ \operatorname{cosec}\ CED = CD.\operatorname{cosec} \alpha$
$= r.\operatorname{cosec} \alpha$
folglich $CA = r.\operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = r.\operatorname{cosec}^2 \alpha$

6) Die Bogen: $Arc\left(\sin^2 = \frac{a}{b}\right)$; $Arc\left(\cos^2 = \frac{a}{b}\right)$; $Arc\left(tg^2 = \frac{a}{b}\right)$; $Arc\left(\cot^2 = \frac{a}{b}\right)$ $Arc\left(\sec^2 = \frac{a}{b}\right)$; $Arc\left(\operatorname{cosec}^2 = \frac{a}{b}\right)$ zu zeichnen. (Vergl. No. 4.)

1. Für $Arc\left(\sin^2 = \frac{a}{b}\right)$ zeichne Fig. 445 über AB = dem grösseren Nenner b den Halbkreis, nimm von einem Endpunkt A aus auf dem Durchmesser den kleineren Zähler $AC = a$, errichte in C das Loth CD bis in die Peripherie, ziehe von D nach dem anderen Endpunkt B des Durchmessers DB, so ist der aus B mit dem Halbmesser = 1 zu beschreibende Bogen zu dem $\angle ABD = (\alpha) = arc\left(\sin^2 = \frac{a}{b}\right)$

Fig. 445.



Denn es ist, wenn man AD zieht,
$a = AC = AD \cdot \sin\ ADC = AD\ \sin \alpha$
und $AD = AB \cdot \sin \alpha = b.\sin \alpha$

 Constructionen, trigonom.

daher $a = b . \sin \alpha \cdot \sin \alpha = b . \sin^2 \alpha$

woraus $\sin^2 \alpha = \frac{a}{b}$

II. Für $Arc\left(\cos^2 = \frac{a}{b}\right)$ construire wie ad 1, so ist der Bogen zu dem $\angle BAD = \beta = arc\left(\cos^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist

$$a = AC = AD \cdot \cos \beta$$

aber $AD = AB . \cos \beta = b . \cos \beta$
daher $a = b \cos \beta \cdot \cos \beta = b . \cos^2 \beta$

und $\cos^2 \beta = \frac{a}{b}$

III. Für $Arc\left(tg^2 = \frac{a}{b}\right)$ setze eine grade Linie AB aus $AC = a$ und $BC = b$ zusammen, beschreibe über AB den Halbkreis, errichte in C die Ordinate CD und zeichne die über BC = dem Nenner b liegende Sehne BD, so ist der Bogen zu dem

$\angle DBA = \alpha = arc\left(tg^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist, wenn man noch AD zieht,

$$a = AC = CD \cdot tg\, ADC = CD . tg\, \alpha$$

und $CD = BC\, tg\, \alpha = b . tg\, \alpha$
daher $a = b . tg\, \alpha \cdot tg\, \alpha = b \cdot tg^2 \alpha$

woraus $tg^2 \alpha = \frac{a}{b}$

IV. Für $Arc\left(\cot^2 = \frac{a}{b}\right)$ construire wie ad 3, ziehe die über AC = dem Zähler a liegende Sehne AD, so ist der Bogen zu dem $\angle DAB = \beta = arc\left(\cot^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist, wenn man noch BD zieht,

$$a = AC = DC . \cot \beta$$

$DC = BC \cot CDB = b \cot CDB = b \cos \beta$
woraus $a = b \cdot \cot \beta \cdot \cot \beta = b \cot^2 \beta$

und $\cot^2 \beta = \frac{a}{b}$

V. Für $Arc\left(\sec^2 = \frac{a}{b}\right)$ nimm AB = dem größeren Zähler a, trage auf demselben ein Stück AC = dem kleineren Nenner b ab, errichte in C die Ordinate CD, ziehe die über dem Nenner b liegende Sehne AD, so ist der Bogen zu $\angle BAD = \beta = arc\left(\sec^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist

$$a = AB = AD \sec \beta$$
$$AD = AC \sec \beta = b \sec \beta$$

daher $a = b . \sec \beta . \sec \beta = b . \sec^2 \beta$

woraus $\sec^2 \beta = \frac{a}{b}$

VI. Für $Arc\left(cosec^2 = \frac{a}{b}\right)$ construire wie ad 5, ziehe die Sehne BD, so ist der Bogen zu $\angle ABD = \alpha = arc\left(cosec^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist

$$a = AB = AD . cosec\, \alpha$$

$AD = AC \cdot cosec\, ADC = AC . cosec\, \alpha$
$= b\, cosec\, \alpha$
woraus $a = b\, cosec\, \alpha \cdot cosec\, \alpha = b . cosec^2 \alpha$

also $cosec^2 \alpha = \frac{a}{b}$

7) Die Linien $r \sin^3 \alpha$, $r \cos^3 \alpha$, $r\, tg^3 \alpha$, $r \cot^3 \alpha$, $r \sec^3 \alpha$, $r\, cosec^3 \alpha$ zu zeichnen.

I. Für $r \sin^3 \alpha$ zeichne $\angle ACB = \alpha$, nimm den einen Schenkel $BC = r$, fälle das Loth BA auf den anderen Schenkel, von A das Loth AD auf den ersten Schenkel und endlich das Loth DE auf das Loth AB, so ist $BE = r \sin^3 \alpha$

Fig. 446.

Denn es ist

$$DE \mathrel{+\!\!\!=} AC, \text{ daher } \angle BDE = \alpha$$

also $BE = BD . \sin \alpha$
aber auch $\angle BAD = \alpha$
daher $BD = AB . \sin \alpha$
folglich $BE = AB \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha = AB . \sin^2 \alpha$
Nun ist $AB = BC . \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha$
also $BE = r . \sin \alpha . \sin^2 \alpha = r . \sin^3 \alpha$

II. Für $r \cdot \cos^3 \alpha$ construire wie ad 1, nur fälle (statt DE) das Loth DF auf den zweiten Schenkel AC, so ist $CF = r \cdot \cos^3 \alpha$

Denn es ist

$$AC = BC . \cos \alpha = r \cdot \cos \alpha$$
$$CD = AC \cdot \cos \alpha = r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = r \cos^2 \alpha$$

endlich $CF = CD \cos \alpha = r \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha = r \cos^3 \alpha$

III. Für $r\, tg^3 \alpha$ zeichne $\angle ACD = \alpha$, nimm den einen Schenkel $CD = r$, errichte in D auf demselben das Loth DA bis in die Richtung des anderen Schenkels CA, in A auf demselben Schenkel CA das Loth AB bis in die Richtung des ersten Schenkels CD, in B ein Loth BG auf dem Loth AB, verlängere AD bis in die Richtung dieses Loths, so ist

$$DG = r \cdot tg^3 \alpha$$

Denn es ist

$$AD = CD . tg\, \alpha = r . tg\, \alpha$$
$$BD = AD\, tg\, BAD = AD . tg\, \alpha$$

folgt $BD = r . tg\, \alpha \cdot tg\, \alpha = r\, tg^2 \alpha$

ferner $DG = BD\ tg\ GBD = BD\ tg\ \alpha$
also $DG = r\ tg^2\alpha \cdot tg\ \alpha = r\ tg^3\alpha$

IV. Für $r\ cot^3\alpha$ hat man (Fig 443) $AF = r \cdot cot^2\alpha$. Fälle nun das Loth AG, zeichne den Quadrant GH, ziehe $HJ \parallel CB$ bis in die Richtung von CA, so ist

$$HJ = r\ cot^3\alpha$$

Denn es ist

$$HJ = CH\ cot\ \alpha = CG \cdot cot\ \alpha = AF\ cot\ \alpha$$
$$= r\ cot^2\alpha \cdot cot\ \alpha = r\ cot^3\alpha$$

V. Für $r\ sec^3\alpha$ nimm (Fig. 446) das Stück CF eines Schenkels von $\alpha = r$, errichte in F auf diesen Schenkel das Loth FD bis in die Richtung des anderen Schenkels CB; errichte in D auf demselben Schenkel das Loth DA bis in die Richtung des ersten Schenkels CF und errichte in A auf diesem Schenkel das Loth AB bis in die Richtung des 2ten Schenkels, so ist

$$BC = r\ sec^3\alpha$$

Denn es ist

$BC = AC \cdot sec\ \alpha$
$AC = DC \cdot sec\ \alpha$
folglich $BC = DC . sec\ \alpha \cdot sec\ \alpha = DC \cdot sec^2\alpha$
$DC = CF . sec\ \alpha$
daher $BC = CF . sec\ \alpha \cdot sec^2\alpha$
$= CF \cdot sec^3\alpha = r . sec^3\alpha$

VI. Für $r\ cosec^3\alpha$ hat man (Fig. 444) $CA = r\ cosec^2\alpha$, zeichnet man nun aus C den Bogen AG bis in die Richtung von CF, zieht $GH \parallel BC$ bis in die Richtung von CA, so ist $CH = r . cosec^3\alpha$

Denn es ist

$$CH = CG\ cosec\ \alpha = CA\ cosec\ \alpha$$
$$= r\ cosec^2\alpha . cosec\ \alpha = r\ cosec^3\alpha$$

8) Die Linien $r\ sin\ \alpha \cdot sin\ \beta$
$r\ sin\ \alpha \cdot cos\ \beta$
$r\ sin\ \alpha \cdot tg\ \beta$
$r . sin\ \alpha \cdot cot\ \beta$
$r\ sin\ \alpha \cdot sec\ \beta$
$r\ sin\ \alpha . cosec\ \beta$
zu zeichnen.

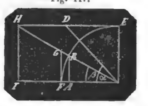
I. Für $r\ sin\ \alpha . sin\ \beta$ zeichne an der Linie AC als gemeinschaftlichem Schenkel $\angle ACB = \beta$ und $\angle ACD = \alpha$ nach einerlei Richtung, errichte im Scheitel C auf AC ein Loth CE, nimm den zweiten Schenkel CD des $\angle \alpha = r$, fälle das Loth DE auf CE, zeichne aus C den Bogen EB bis in die Richtung des zweiten Schenkels CB von β und fälle das Loth BA auf den Schenkel AC so ist

$$AB = r\ sin\ \alpha . sin\ \beta$$

Denn denkt man sich von D ein Loth auf AC so ist dies $= CD . sin\ \alpha = r \cdot sin\ \alpha = CE$
daher auch $BC = r . sin\ \alpha$
aber $AB = BC . sin\ \beta$
folglich $AB = r \cdot sin\ \alpha . sin\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r . \frac{sin\ \alpha}{cosec\ \beta}$ construirt.

Fig. 447.



II. Für $r\ sin\ \alpha . cos\ \beta$ construire wie ad 1, so ist $AC = r . sin\ \alpha . cos\ \beta$.

Denn es ist $BC = CE = r \cdot sin\ \alpha$
folglich $AC = BC \cdot cos\ \beta = r . sin\ \alpha . cos\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r . \frac{sin\ \alpha}{sec\ \beta}$ construirt.

III. Für $r . sin\ \alpha . tg\ \beta$ construire wie ad 1 und 2, aber zeichne statt des Bogens EB den Quadrant EBF, errichte nun das Loth FG bis in die Richtung CB des zweiten Schenkels von β, so ist

$$FG = r . sin\ \alpha . tg\ \beta$$

Denn CE, also auch CF ist $= r\ sin\ \alpha$
folglich $FG = CF \cdot tg\ \beta = r . sin\ \alpha . tg\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r . \frac{sin\ \alpha}{cot\ \beta}$ construirt.

IV. Für $r \cdot sin\ \alpha\ cot\ \beta$ nimm wieder $CD = r$ und ziehe aus D die Linie $DH \parallel AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels CB von β; fälle das Loth HJ auf den gemeinschaftlichen Schenkel CA so ist $JC = r \cdot sin\ \alpha \cdot cot\ \beta$

Denn es ist $HJ = CD\ sin\ \alpha = r \cdot sin\ \alpha$
folglich $JC = HJ . cot\ \beta = r \cdot sin\ \alpha . cot\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r . \frac{sin\ \alpha}{tg\ \beta}$ construirt.

V. Für $r\ sin\ \alpha . sec\ \beta$ construire wie ad 3, so ist $CG = r\ sin\ \alpha . sec\ \beta$

Denn es ist

$CF = CE = CD . sin\ \alpha = r . sin\ \alpha$
und $CG = CF\ sec\ \beta = r . sin\ \alpha \cdot sec\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{sin\ \alpha}{cos\ \beta}$ construirt.

VI. Für $r\ sin\ \alpha . cosec\ \beta$ construire wie ad 4, so ist $CH = r \cdot sin\ \alpha . cosec\ \beta$

Denn es ist

$HJ = r . sin\ \alpha$ und $CH = HJ . cosec\ \beta$
folglich ist $CH = r \cdot sin\ \alpha \cdot cosec\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{sin\ \alpha}{sin\ \beta}$ construirt.

9) Die Linien $r \cdot cos\ \alpha \cdot cos\ \beta$
$r \cdot cos\ \alpha \cdot tg\ \beta$
$r \cdot cos\ \alpha\ cot\ \beta$

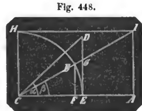
$r \cdot \cos\alpha \cdot \sec\beta$
$r \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta$

zu zeichnen.

I. Für $r \cdot \cos\alpha . \cos\beta$ zeichne $\angle ACD = \alpha$, $ACB = \beta$, nimm den zweiten Schenkel CD von $\alpha = r$, fälle das Loth DE auf den gemeinschaftlichen Schenkel AC, zeichne aus C den Bogen EB bis in die Richtung CB des zweiten Schenkels von β, fälle das Loth BF auf den gemeinschaftlichen Schenkel AC, so ist

$$CF = r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

Fig. 448.



Denn es ist $CE = CD \cos\alpha = r \cdot \cos\alpha$
daher $BC = CE = r . \cos\alpha$
Da nun $CF = BC . \cos\beta$
so ist auch $CF = r \cdot \cos\alpha . \cos\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\sec\beta}$ construirt.

II. Für $r \cdot \cos\alpha . \mathrm{tg}\,\beta$ zeichne die beiden $\angle\alpha$ und β, nimm $CD = r$, fälle auf den gemeinschaftlichen Schenkel AC das Loth DE, so ist das zwischen beiden Schenkeln von β liegende Stück desselben $= r . \cos\alpha . \mathrm{tg}\,\beta$

Denn es ist $CE = CD . \cos\alpha = r . \cos\alpha$
also $EG = CE \cdot \mathrm{tg}\,\beta = r \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\cot\beta}$ construirt.

III. Für $r \cdot \cos\alpha . \cot\beta$ construire wie ad 2, errichte im Scheitel C auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC das Loth CH, zeichne aus C den Quadrant EBH, ziehe aus H die Parallele HJ mit AC bis in die Richtung des zweiten Schenkels CB von β, fälle aus J das Loth JA auf AC, so ist $AC = r . \cos\alpha . \cot\beta$

Denn es ist

$$CH = CE = CD . \cos\alpha = r . \cos\alpha$$

Nun ist $AC = HJ = CH . \cot\beta$
woraus $AC = r \cos\alpha \cdot \cot\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}$ construirt.

IV. Für $r \cdot \cos\alpha . \sec\beta$ construire wie ad 2, so ist der durch das Loth DE auf dem zweiten Schenkel von β abgeschnittene Theil $CG = r \cos\alpha . \sec\beta$

Denn es ist $CE = CD \cos\alpha = r . \cos\alpha$
und $CG = CE \sec\beta = r . \cos\alpha \cdot \sec\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ construirt.

V. Für $r . \cos\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta$ construire wie ad 3, so ist das von der Parallele HJ auf dem zweiten Schenkel von β abgeschnittene Stück $CJ = r \cos\alpha . \mathrm{cosec}\,\beta$

Denn es ist

$$CJ = CH \,\mathrm{cosec}\, HJC = CH . \mathrm{cosec}\,\beta$$
$$CH = CE = CD \cos\alpha = r . \cos\alpha$$

folglich $CJ = r . \cos\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta$

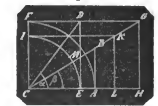
Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ construirt.

10) Die Linien $r \,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta$
$r \,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cot\beta$
$r . \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \sec\beta$
$r . \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta$

zu zeichnen.

I. Für $r \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta$ zeichne $\angle ACD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, nimm auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC das Stück $CE = r$, errichte in E auf AC das Loth ED bis in die Richtung des zweiten Schenkels

Fig. 449.



von α, errichte in C auf AC das Loth CF, ziehe DF bis in die Richtung von CF die mit AC parallele DF, zeichne aus C den Quadrant FA, errichte in A auf AC ein Loth AB bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, so ist

$$AB = r \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta$$

Denn es ist $AB = AC . \mathrm{tg}\,\beta$
$AC = CF = DE = CE . \mathrm{tg}\,\alpha = r \,\mathrm{tg}\,\alpha$
folglich $AB = r \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cot\beta}$ construirt.

II. Für $r . \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cot\beta$ nimm wieder $CE = r$, errichte auf AC das Loth ED bis in den 2ten Schenkel von α, ziehe $DG \mp AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, fälle das Loth GH auf AC, so ist $CH = r \cdot \cos\alpha . \cot\beta$

Dann ez ist $CH = GH \cdot cot\, \beta$
$GH = DE = CE \cdot tg\, \alpha = r \cdot tg\, \alpha$
folglich $CH = r \cdot tg\, \alpha \cdot cot\, \beta$

Hiermit ist zngleich die Linie $r \cdot \frac{tg\, \alpha}{tg\, \beta}$ construirt.

III. Für $r \cdot tg\, \alpha \cdot sec\, \beta$ construire wie ad 1, so izt das von dem Loth AB auf dem zweiten Schenkel von β abgeschnittene Stück $CB = r \cdot tg\, \alpha \cdot sec\, \beta$.

Denn es ist $BC = AC \cdot sec\, \beta$
$AC = CF = DE = CE \cdot tg\, \alpha = r \cdot tg\, \alpha$
folglich $BC = r \cdot tg\, \alpha \cdot sec\, \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{tg\, \alpha}{cos\, \beta}$ construirt.

IV. Für $r \cdot tg\, \alpha \cdot cosec\, \beta$ construire wie ad 2, so ist das von der Parallelen DG auf dem zweiten Schenkel von β abgeschnittene Stück $CG = r \cdot tg\, \alpha \cdot cosec\, \beta$.

Denn es ist $CG = GH \cdot cosec\, \beta$
$GH = DE = CE\; tg\, \alpha = r \cdot tg\, \alpha$
folglich $CG = r\; tg\, \alpha\; cosec\, \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{tg\, \alpha}{sin\, \beta}$ construirt.

11) Die Linien $r \cdot cot\, \alpha \cdot cot\, \beta$
$r\; cot\, \alpha \cdot sec\, \beta$
$r\; cot\, \alpha \cdot cosec\, \beta$
zu zeichnen.

I. Für $r \cdot cot\, \alpha \cdot cot\, \beta$ errichte im Scheitel C auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC ein Loth CF, nimm $CF = r$, ziehe $FD \mathrel{\#} AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkelz von α, fälle daz Loth DE anf AC, zeichne aus C den Quadrant EJ, ziehe $JK \mathrel{\#} AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, fälle das Loth KL auf AC, so ist das von AC dadurch abgeschnittene Stück $CL = r \cdot cot\, \alpha \cdot cot\, \beta$

Denn es ist
$CL = KL \cdot cot\, \beta = CJ \cdot cot\, \beta = CE \cdot cot\, \beta$
aber $CE = DE \cdot cot\, \alpha = CF\; cot\, \alpha = r\; cot\, \alpha$
folglich $CL = r \cdot cot\, \alpha \cdot cot\, \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{cot\, \alpha}{tg\, \beta}$ construirt.

II. Für $r = cot\, \alpha \cdot sec\, \beta$ nimm wieder $CF = r$, ziehe $FD \mathrel{\#} AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α, fälle das Loth DE znf AC, so ist das dadurch von dem zweiten Schenkel BC von β abgeschnittene Stück $CM = r \cdot cot\, \alpha \cdot sec\, \beta$

Denn es ist $CM = CE \cdot sec\, \beta$
$CE = DE\; cot\, \alpha = CF \cdot cot\, \alpha = r \cdot cot\, \alpha$
folglich $CM = r\; cot\, \alpha \cdot sec\, \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{cot\, \alpha}{cos\, \beta}$ constrnirt.

III. Für $r \cdot cot\, \alpha \cdot cosec\, \beta$ construire wie ad 1, so ist das von JK auf dem zweiten Schenkel BC von β abgeschnittene Stück $CK = r \cdot cot\, \alpha \cdot cosec\, \beta$

Denn es ist $CK = KL \cdot cosec\, \beta$
$KL = CJ = CE = DE \cdot cot\, \alpha = CF \cdot cot\, \alpha$
$= r \cdot cot\, \alpha$
folglich $CK = r \cdot cot\, \alpha \cdot cosec\, \beta$.

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{cot\, \alpha}{sin\, \beta}$ construirt

12) Die Linien $r \cdot sec\, \alpha \cdot sec\, \beta$
$r \cdot sec\, \alpha \cdot cosec\, \beta$
$r \cdot cosec\, \alpha \cdot cosec\, \beta$
zu zeichnen.

I. Für $r\, sec\, \alpha \cdot sec\, \beta$ zeichne $\angle ACD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, nimm auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC ein Stück $CE = r$, errichte in E auf AC ein Loth ED

Fig. 450.

bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α, zeichne ans C den Bogen DA, errichte in A auf AC das Loth AB bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, so ist das von demselben abgeschnittene Stück CB dieses Schenkels $= r \cdot sec\, \alpha \cdot sec\, \beta$

Denn es ist $CB = CA \cdot sec\, \beta$
$CA = CD = CE \cdot sec\, \alpha = r \cdot sec\, \alpha$
folglich $CB = r \cdot sec\, \alpha \cdot sec\, \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{sec\, \alpha}{cos\, \beta}$ conztrnirt.

II. Für $r \cdot sec\, \alpha \cdot cosec\, \beta$ nimm wieder $CE = r$, errichte dzs Loth ED bis in dia Richtnng des zweiten Schenkels von α, errichte ferner im Scheitel C auf demselben Schenkel AC ein Loth CF, zeichne ans C den Bogen DF und ziehe ans F die mit AC parallele Linie FG bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, so ist das dadurch auf dem Schenkal abgeschnittene Stück $CG = r\; sec\, \alpha \cdot cosec\, \beta$.

Denn es ist
$CG = CF\; cosec\; CGF = CF\; cosec\, \beta$
$CF = CD = CE\; sec\, \alpha = r \cdot sec\, \alpha$
folglich $CG = r \cdot sec\, \alpha \cdot cosec\, \beta$.

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{sec\ \alpha}{sin\ \beta}$ construirt.

III. Für $r \cdot cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta$ errichte im Scheitel C auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC ein Loth CF, nimm auf demselben vom Scheitel C aus ein Stück $CH = r$, ziehe aus H eine mit AC parallele HD bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α, zeichne aus C den Bogen DF, ziehe aus F eine mit AC parallele FG bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, so ist das von demselben abgeschnittene Stück $CG = r \cdot cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta$

Denn es ist

$$CG = CF\ cosec\ CGF = CF \cdot cosec\ \beta$$
$$CF = CD = DE\ cosec\ \alpha = CH \cdot cosec\ \alpha = r\ cosec\ \alpha$$

folglich $CG = r\ cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{cosec\ \alpha}{sin\ \beta}$ construirt.

13) In D und F werden die Bogen construirt, wenn deren trigonometrische Functionen durch den Quotient zweier Linien gegeben werden. Aus G und L entspringen Aufgaben für die Constructionen von Bogen, deren trigonometrische Functionen durch trigonom. Functionen zweier bekannten Winkel gegeben sind. Als zu zeichnen:

$$arc\left(sin = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta = \frac{sin\ \alpha}{cosec\ \beta} = \frac{1}{cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta}\right)$$
$$arc\ (cos = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta = \text{u. s. w.})$$
$$arc\ (tg\ = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta = \text{u. s. w.})$$

u. s. w. bis

$$arc\left(cosec = cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta = \frac{cosec\ \alpha}{sin\ \beta} = \frac{1}{sin\ \alpha \cdot sin\ \beta}\right)$$

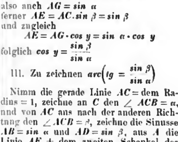
Im Ganzen $6 \times 21 = 126$ Aufgaben.

Von diesen sollen hier beispielsweise einige gelöst werden.

I. Zu zeichnen $arc\left(sin = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}\right)$

Die Auflösung ist möglich wenn $\beta < \alpha$, weil sin immer ein ächter Bruch ist. Zeichne $\angle ACB = \beta$, $\angle ACD = \alpha$, nimm den gemeinschaftlichen Schenkel AC beider $\angle$ = dem Radius = 1, fälle das Loth AD auf den zweiten Schenkel von α, zeichne aus A den Bogen DB bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β,

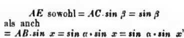
Fig. 451.



ziehe AB, so sind die $\angle ABC\ (x)$ und $ABF (x')$ die $\angle$ der verlangten Bogen.

Denn es ist AD, also auch $AB = AC \cdot sin\ \alpha = sin\ \alpha$

Ferner ist das von A auf den zweiten Schenkel von β zu denkende Loth



AE sowohl $= AC \cdot sin\ \beta = sin\ \beta$ als auch $= AB \cdot sin\ x = sin\ \alpha \cdot sin\ x = sin\ \alpha \cdot sin\ x'$

daher ist

$$sin\ \beta = sin\ \alpha \cdot sin\ x = sin\ \alpha \cdot sin\ x'$$

folglich $sin\ x$ und $sin\ x' = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}$

II. Zu zeichnen $arc\left(cos = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}\right)$

Auch hier muſs wie in I, $\beta < \alpha$ sein. Nimm α, β und AC wie in I, fälle die Lothe AD, AE, beschreibe aus A den Bogen DG, ziehe GA, so sind die $\angle GAE = y$ und dessen Ergänzung zu 4 Rechten die Centriwinkel der verlangten Bogen.

Denn es ist

$$AD = AC \cdot sin\ \alpha = sin\ \alpha$$

also auch $AG = sin\ \alpha$

ferner $AE = AC \cdot sin\ \beta = sin\ \beta$

und zugleich

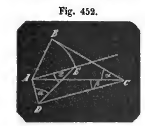
$$AE = AG \cdot cos\ y = sin\ \alpha \cdot cos\ y$$

folglich $cos\ y = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}$

III. Zu zeichnen $arc\left(tg = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}\right)$

Nimm die gerade Linie AC = dem Radius = 1, zeichne an C den $\angle ACB = \alpha$, und von AC aus nach der anderen Richtung den $\angle ACB = \beta$, zeichne die Sinusse $AB = sin\ \alpha$ und $AD = sin\ \beta$, aus A die Linie $AE \#$ dem zweiten Schenkel des Winkels β im Zähler, aus A den Bogen BE, ziehe DE, so ist $\angle AED = s$ der Centriwinkel des verlangten Bogens.

Fig. 452.



Denn es ist $AE = AB = \sin\ \alpha$

$AE \cdot tg\ s = AD = \sin\ \beta$

folglich $tg\ s = \frac{\sin\ \beta}{\sin\ \alpha}$

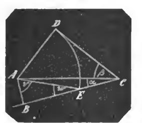
IV. Zu zeichnen $arc\left(cot = \frac{\sin\ \beta}{\sin\ \alpha}\right)$

Bei derselben Construction (Fig. 452) ist $\angle\ ADE = u$ der verlangte Centriwinkel.

V. Zu zeichnen $arc\left(sec = \frac{\sin\ \beta}{\sin\ \alpha}\right)$

Nimm $CA = 1$, zeichne an C von CA ab zu beiden Seiten die $\angle\ ACB = \alpha$ und $ACD = \beta$, fälle die Sinus $AB = \sin\ \alpha$ und $AD = \sin\ \beta$, zeichne aus A den Bogen DE bis in die Richtung von CB, ziehe AE so ist $\angle\ BAE = v$ der verlangte Centriwinkel.

Fig. 453.



Denn es ist

$AB \cdot sec\ v = AE = AD = \sin\ \beta$

$AB = \sin\ \alpha$

folglich $sec\ v = \frac{\sin\ \beta}{\sin\ \alpha}$

Wenn $AD < AB$ so schneidet der Bogen DE innerhalb AB und die Anfgabe ist unmöglich, denn $sec\ v$ ist immer > 1.

VI. Zu zeichnen $arc\left(cosec = \frac{\sin\ \beta}{\sin\ \alpha}\right)$

Bei derselben Construction (Fig. 453) ist $\angle\ AEB = w$ der verlangte Centriwinkel.

14) Die Construction folgender Bogen führt zu interessanten und för die ganze Trigonometrie höchst wichtigen Gesetzen, nämlich die Constrnction von

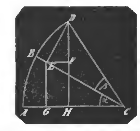
I. $arc(\sin = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos\ \alpha \cdot \sin\ \beta)$

II. $arc(\cos = \cos\ \alpha \cdot \cos\ \beta - \sin\ \alpha \cdot \sin\ \beta)$

Man findet für alle möglichen Werthe von α und β, dafs der verlangte Bogen für beide Aufgaben derselbe ist, und zwar $= arc\ (\alpha + \beta)$, wie nachgewiesen werden soll.

I. Wenn die Schenkel von β beide im ersten Quadrant liegen.

Fig. 454.



Zeichne $\angle\ ACB = \alpha$ und $\angle\ BCD = \beta$, beschreibe mit $AC = 1$ den Bogen ABD, so ist dieser Bogen, also $arc\ (\alpha + \beta)$ der verlangte.

Denn fällt man die Lothe DE auf BC, EG und DH auf AC, EF auf DH, so ist erstens: $\angle\ EDF = \alpha$

$FH = EG = CE\ \sin\ \alpha = \cos\ \beta \cdot \sin\ \alpha$

$DF = DE \cdot \cos\ EDF = \sin\ \beta \cdot \cos\ \alpha$

$DH = \sin\ (\alpha + \beta) = FH + DF$

oder I. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\ \alpha \cdot \cos\ \beta + \cos\ \alpha \cdot \sin\ \beta$

Zweitens ist:

$CG = CE \cdot \cos\ \alpha = \cos\ \beta \cdot \cos\ \alpha$

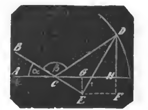
$GH = EF = DE \cdot \sin\ EDF = \sin\ \beta \cdot \sin\ \alpha$

$CH = \cos\ (\alpha + \beta) = CG - GH$

oder II. $\cos\ (\alpha + \beta) = \cos\ \beta - \sin\ \alpha \cdot \sin\ \beta$

II. Wenn der eine Schenkel von β im ersten, der andere im zweiten Quadrant liegt.

Fig. 455.



Es ist wieder der Bogen zu dem Centriwinkel $(\alpha + \beta)$ der verlangte. Denn bei derselben Construction wie in Fig. 454, wobei die Lothe DE, EG und EF auf die Verlängerungen von BC, AC und DH fallen, hat man:

Erstens $\angle EDF = \angle DEG = \angle ECG = \alpha$

$FH = EG = CE \cdot \sin ECG = CE \cdot \sin \alpha$

$CE = \cos DCE = \cos(180^\circ - \beta)$
$= -\cos \beta$

folglich $FH = -\sin \alpha \cdot \cos \beta$

Noch ist $DF = DF \cdot \cos EDF = DE \cdot \cos \alpha$

$DE = \sin DCE = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$

folglich $DF = \sin \beta \cdot \cos \alpha$

Nun ist $\sin(\alpha + \beta) = DH = -FH + DF$

folglich

I. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Zweitens ist

$CG = CE \cdot \cos ECG = -\cos \beta \cdot \cos \alpha$

und $GH = EF = DE \cdot \sin EDF = \sin \beta \cdot \sin \alpha$

und $CH = -\cos(\alpha + \beta) = CG + GH$

oder $-\cos(\alpha + \beta)$
$= -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$

oder II. $\cos(\alpha + \beta)$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

III. Wenn der eine Schenkel von β im ersten, der andere im dritten Quadrant liegt.

Der Bogen zu dem Centriwinkel $= (\alpha + \beta)$ ist der verlangte. Denn bei derselben Construction wie in Fig. 455 hat man

Erstens: $DH = \sin DCH$
$= \sin(\alpha + \beta - 180^\circ) = -\sin(\alpha + \beta)$

oder $\sin(\alpha + \beta) = -DH = -(DF + FH)$

Nun ist $FH = EG = CE \cdot \sin ECG$
$= \cos DCE \cdot \sin ECG$

oder $FH = \cos(\beta - 180^\circ) \sin \alpha$
$= -\cos \beta \cdot \sin \alpha$

ferner ist $DF = DE \cdot \cos EDF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) \cdot \cos EDF = -\sin \beta \cdot \cos EDF$

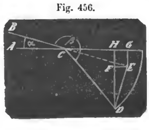
aber $\angle EDF = \angle ECG = \alpha$

also $DF = -\sin \beta \cdot \cos \alpha$

folglich

$FH + DF = -\cos \beta \cdot \sin \alpha - \sin \beta \cdot \cos \alpha$

Fig. 456.



oder I. $\sin(\alpha + \beta) = -(FH + DF)$
$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Zweitens ist $CH = \cos DCH$
$= \cos(\alpha + \beta - 180^\circ) = -\cos(\alpha + \beta)$

oder $\cos(\alpha + \beta) = -CH = -(CG - GH)$

aber $CG = CE \cdot \cos ECG$
$= \cos(\beta - 180^\circ) \cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \alpha$

ferner ist $GH = EF = DE \cdot \sin EDF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) \cdot \sin \alpha = -\sin \beta \cdot \sin \alpha$

folglich

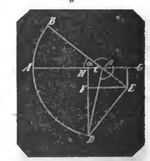
$CG - GH = -\cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha$

und II. $\cos(\alpha + \beta) = -(CG - GH)$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

IV. Wenn ein Schenkel von β im ersten, der andere im vierten Qnadrant liegt, $arc(\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen.

Denn construirt man wie in Fig. 456, so hat man

Fig. 457.



Erstens $DH = \sin DCH$
$= \sin[360^\circ - (\alpha + \beta)] = -\sin(\alpha + \beta)$

Nun ist $DH = DF + FH$

ferner ist $FH = EG = CE \cdot \sin ECG$
$= \cos(\beta - 180^\circ) \cdot \sin \alpha = -\cos \beta \cdot \sin \alpha$

und $DF = DE \cdot \cos EDF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) \cdot \cos EDG = -\sin \beta \cdot \cos EDF$
$= -\sin \beta \cdot \cos ECG = -\sin \beta \cdot \cos \alpha$

folglich I. $-DH = \sin(\alpha + \beta)$
$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Zweitens ist $CH = -CG + HG$

aber $CG = CE \cdot \cos ECG$
$= \cos(\beta - 180^\circ) \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha$

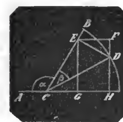
und $HG = EF = DE \cdot \sin EDF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) \cdot \sin \alpha = -\sin \beta \cdot \sin \alpha$

folglich

II. $CH = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

V. Wenn beide Schenkel von β im zweiten Quadrant liegen. Construirt man wie in Fig. 454, so ist wieder $arc(\alpha + \beta)$ der verlangte Bogen; denn man hat


Fig. 458.



Erstens $DH = FH - DF$

aber $FH = EG = CE . \sin ECG$
$= CE \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \cos\beta . \sin(180^\circ - \alpha)$
$= \cos\beta . \sin\alpha$

und $DF = DE . \cos EDF = \sin\beta \cdot \cos EDF$
$= \sin\beta \cdot \cos ECG = \sin\beta \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$
$= -\sin\beta \cdot \cos\alpha$

folglich
I. $DH = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Zweitens ist $CH = \cos DCH$
$= \cos\,[180^\circ - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta)$

und zugleich $CH = CG + GH$

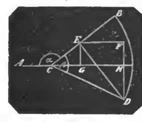
aber $CG = CE \cdot \cos ECG$
$= \cos\beta \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha . \cos\beta$

und $GH = EF = DE \cdot \sin EDF$
$= \sin\beta \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\beta \cdot \sin\alpha$

folglich
II. $-CH = \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

VI. Wenn ein Schenkel von β im zweiten, der andere im dritten Quadrant liegt. $arc(\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie in Fig. 458, so hat man

Fig. 459.



Erstens $DH = \sin DCH = \sin(\alpha + \beta - 180^\circ)$
$= -\sin(\alpha + \beta)$

zugleich $DH = DF - FH = -FH + DF$

aber $FH = EG = CE \sin ECG$
$= \cos\beta \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \cos\beta \cdot \sin\alpha$

und $DF = DE \cdot \cos EDF = \sin\beta \cdot \cos EDF$
$= \sin\beta \cdot \cos ECG = \sin\beta \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$
$= -\sin\beta \cdot \cos\alpha$

also $DH = -\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

folglich
I. $-DH = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Zweitens ist $CH = \cos DCH$
$= \cos(\alpha + \beta - 180^\circ) = -\cos(\alpha + \beta)$

zugleich $CH = CG + GH$

aber $CG = CE \cos ECG$
$= \cos\beta \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\beta \cdot \cos\alpha$

und $GH = EF = DE . \sin EDF$
$= \sin\beta \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\beta \cdot \sin\alpha$

daher $CH = \sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta$

folglich II. $-CH = \cos(\alpha + \beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

VII. Wenn ein Schenkel von β im zweiten und der andere im vierten Quadrant liegt. $arc(\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen, denn construirt man wie Fig. 459, so hat man

Erstens $DH = \sin DCH = [360^\circ - (\alpha + \beta)]$
$= -\sin(\alpha + \beta)$

zugleich ist $DH = DF + FH$

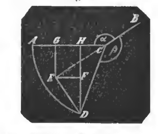
aber $FH = EG = CE . \sin GCE$
$= \cos(180^\circ - \beta) \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$
$= -\cos\beta \cdot \sin\alpha$

und $DF = DE . \cos EDF$
$= \sin(180^\circ - \beta) \cdot \cos GCE$
$= \sin\beta \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -\sin\beta \cdot \cos\alpha$

also $DH = -(\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta)$

folglich I. $-DH = \sin(\alpha + \beta)$
$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Fig. 460.



Zweitens ist $CH = \cos ACD$
$= \cos\,[360^\circ - (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha + \beta)$

zugleich ist $CH = CG - GH$

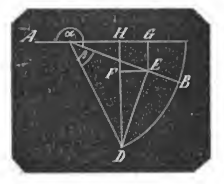
aber $CG = CE . \cos ECG$
$= \cos(180^\circ - \beta) \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$
$= (-\cos\beta)(-\cos\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\beta$

und $GH = EF = DE \cdot \sin EDF$
$= \sin(180^\circ - \beta)\ \sin(180^\circ - \alpha)$
$= \sin\beta \cdot \sin\alpha$

folglich II. $CH = \cos(\alpha + \beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

VIII. Wenn beide Schenkel von β im dritten Quadrant liegen. $arc(\alpha+\beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie in Fig. 460, so hat man

Fig. 461.



Erstens $DH = \sin DCH = \sin(\alpha+\beta-180^\circ)$
$= -\sin(\alpha+\beta)$
zugleich ist $DH = DF + FH$
aber $FH = EG = CE \cdot \sin ECG$
$= CE \cdot \sin(\alpha - 180^\circ) = - CE \cdot \sin \alpha$
$= -\cos\beta \cdot \sin\alpha$
und $DF = DE.\cos EDF = DE \cdot \cos ECG$
$= DE \cdot \cos(\alpha - 180^\circ) = - DE \cdot \cos\alpha$
$= -\sin\beta \cdot \cos\alpha$

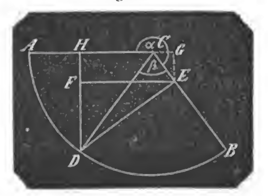
folglich I. $-DH = \sin(\alpha+\beta)$
$= \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Zweitens ist $CH = \cos DCH$
$= \cos(\alpha+\beta-180^\circ) = -\cos(\alpha+\beta)$
zugleich ist $CH = CG - GH$
aber $CG = CE \cdot \cos ECG$
$= \cos\beta \cdot \cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos\alpha \cdot \cos\beta$
und $GH = EF = DE \cdot \sin EDF$
$= \sin\beta \cdot \sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin\alpha \cdot \sin\beta$

also $CH = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
folglich II. $-CH = \cos(\alpha+\beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

IX. Wenn ein Schenkel von β im dritten, der andere im vierten Quadrant liegt, $arc(\alpha+\beta)$ ist der verlangte Bogen, denn construirt man wie in Fig. 461, so hat man

Fig. 462.



Erstens $DH = \sin ACD = \sin[360^\circ - (\alpha+\beta)]$
$= -\sin(\alpha+\beta)$
zugleich ist $DH = DF + FH$
aber $FH = EG = CE \sin ECG$
$= \cos\beta \cdot \sin(\alpha - 180^\circ) = -\cos\beta \cdot \sin\alpha$
und $DF = DE \cdot \cos EDF = DE \cdot \cos ECG$
$= DE \cdot \cos(\alpha - 180^\circ) = - DE \cdot \cos\alpha$
$= -\sin\beta \cdot \cos\alpha$

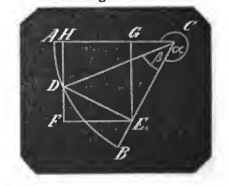
folgt I. $-DH = \sin(\alpha+\beta)$
$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Zweitens ist $CH = \cos ACD$
$= \cos[360^\circ - (\alpha+\beta)] = \cos(\alpha+\beta)$
zugleich ist $CH = -CG + GH$
aber $CG = CE \cdot \cos ECG = CE.\cos(\alpha - 180^\circ)$
$= CE \cdot \cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\alpha$
und $GH = EF = DE.\sin EDF$
$= DE \cdot \sin(\alpha - 180^\circ) = - DE \cdot \sin\alpha$
$= -\sin\beta \cdot \sin\alpha$

folglich II. $CH = \cos(\alpha+\beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

X. Wenn beide Schenkel von β im vierten Quadrant liegen. $arc(\alpha+\beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie in Fig. 462, so hat man

Fig. 463.



Erstens $DH = \sin ACD$
$= \sin[360^\circ - (\alpha+\beta)] = -\sin(\alpha+\beta)$
zugleich ist $DH = FH - DF$
aber $FH = EG = CE \sin ECG$
$= CE \cdot \sin(360^\circ - \alpha) = - CE.\sin\alpha$
$= -\sin\alpha \cdot \cos\beta$
und $DF = DE \cdot \cos EDF = DE \cdot \cos ECG$
$= DE \cdot \cos(360^\circ - \alpha) = DE \cdot \cos\alpha$
$= \sin\beta \cdot \cos\alpha$

folglich I. $-DH = \sin(\alpha+\beta)$
$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

Zweitens ist $CH = \cos ACD$
$= \cos[360^\circ - (\alpha+\beta)] = \cos(\alpha+\beta)$
zugleich ist $CH = CG + GH$
aber $CG = CE.\cos ECG = CE \cdot \cos(360^\circ - \alpha)$
$= CE \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\alpha$
und $GH = EF = DE.\sin EDF$
$= \sin\beta \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\beta \cdot \sin\alpha$

folglich II. $CH = \cos(\alpha+\beta)$
$= \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

Mit den vorstehenden 10 Constructionen ist mithin die Allgemeingültigkeit der beiden Sätze

I. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

II. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

nachgewiesen.

15. Die Construction folgender Bogen sind für die Trigonometrie von eben solcher Wichtigkeit, wie die in No. 14.

III. $arc(\sin = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta)$

IV. $arc(\cos = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta)$

zu zeichnen. Man findet für alle möglichen Werthe von α und β, dafs der verlangte Bogen für beide Aufgaben derselbe ist und zwar $= arc(\alpha-\beta)$ wie nachgewiesen werden soll.

I. Wenn die Schenkel von β beide im ersten Quadrant liegen.

Zeichne $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ und mit dem Halbmesser $AC = 1$ aus C den Bogen AB, so ist dieser Bogen, also $arc(\alpha-\beta)$ der verlangte.

Denn fällt man die Lothe BF auf CD, FG und BH auf AC, BJ auf FG und FE auf die verlängerte HB, so hat man

Erstens $BH = EH - BE$

aber $EH = FG = CF.\sin\alpha = \cos\beta.\sin\alpha$

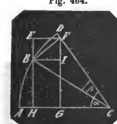
und $BE = BF\cdot\cos\ EBF = \sin\beta.\cos\ EBF$

$= \sin\beta\cdot\cos\alpha$

folglich III. $EH - BE = BH = \sin(\alpha-\beta)$

$= \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Fig. 464.



Zweitens ist $CH = CG + GH$

aber $CG = CF\ \cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\alpha$

und $GH = BJ = BF\cdot\sin\ BFJ = BF.\sin\alpha$

$= \sin\beta\cdot\sin\alpha$

folglich IV. $CH = \cos(\alpha-\beta)$

$= \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

II. Wenn ein Schenkel von β im ersten, der andere im zweiten Quadrant liegt, ist $arc(\alpha-\beta)$ der verlangte Bogen. Denn bei der Construction wie in Fig. 464 hat man

Erstens $BH = BE + EH$

aber $EH = FG = CF\ \sin\ FCG$

$= \cos\beta.\sin(180^\circ-\alpha) = \cos\beta.\sin\alpha$

ferner $BE = BF.\cos\ EBF = \sin\beta.\cos\ EBF$

Da nun $\angle EBF = \angle FCG = 180^\circ - \alpha$

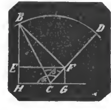
so ist $\cos\ EBF = \cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$

daher ist $BE = -\sin\beta.\cos\alpha$

folglich I. $BH = \sin(\alpha-\beta)$

$= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

Fig. 465.



Zweitens ist $CH = CG + GH$

aber $CG = CF.\cos\ FCG$

$= \cos\beta\cdot\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\beta.\cos\alpha$

und $GH = EF = BF\ \sin\ EBF$

$= \sin\beta\cdot\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\beta\cdot\sin\alpha$

folglich II. $CH = \cos(\alpha-\beta)$

$= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

VI. Wenn der eine Schenkel von β im ersten, der andere im dritten Quadrant liegt. $arc(\alpha-\beta)$ ist wieder der verlangte, denn man hat bei der Construction wie Fig. 465

Erstens $BH = EH + BE$

aber $EH = FG = CF.\sin\ FCG$

$= \cos(180^\circ-\beta)\cdot\sin(\alpha-180^\circ)$

$= (-\cos\beta)\ (-\sin\alpha) = \cos\beta.\sin\alpha$

ferner $BE = BF\ \cos\ EBF$

$= \sin(180^\circ-\beta)\cdot\cos\ EBF = \sin\beta.\cos\ EBF$

da nun $\angle EBF = \angle FCG = \alpha - 180^\circ$

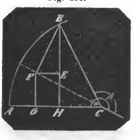
so ist $BE = \sin\beta\cdot\cos(\alpha-180^\circ)$

$= -\sin\beta.\cos\alpha$

folglich III. $BH = \sin(\alpha-\beta)$

$= \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Fig. 466.



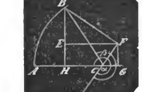
Zweitens ist $CH = CG - GH$
aber $CG = CF . \cos FCG$
$= \cos(180^\circ - \beta) . \cos(\alpha - 180^\circ)$
$= (-\cos\beta)(-\cos\alpha) = \cos\alpha . \cos\beta$
und $GH = EF = BF \sin EBF$
$= \sin(180^\circ - \beta) . \sin(\alpha - 180^\circ)$
$= \sin\beta(-\sin\alpha) = -\sin\alpha . \sin\beta$

folglich IV. $CH = \cos(\alpha - \beta)$
$= \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta$

IV. Wenn der eine Schenkel von β im ersten, der andere im vierten Quadrant liegt. $arc(\alpha - \beta)$ ist wieder der verlangte Bogen; denn bei der Construction wie Fig. 466 hat man
Erstens $BH = EH + BE$
aber $EH = FG = CF . \sin FCG = CF . \sin ACD$
$= \cos(\beta - 180^\circ) . \sin(360^\circ - \alpha)$
$= (-\cos\beta)(-\sin\alpha) = \sin\alpha . \cos\beta$
und $BE = BF \cos EBF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) . \cos EBF$
$= -\sin\beta . \cos EBF = -\sin\beta . \cos FCG$
$= -\sin\beta . \cos(360^\circ - \alpha) = -\cos\alpha . \sin\beta$

folglich III. $BH = \sin(\alpha - \beta)$
$= \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$

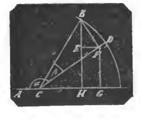
Fig. 467.



Zweitens ist $CH = -CG + GH$
aber $CG = CF . \cos FCG$
$= \cos(\beta - 180^\circ) . \cos(360^\circ - \alpha)$
$= (-\cos\beta)\cos\alpha = -\cos\alpha . \cos\beta$
und $GH = EF = BF . \sin EBF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) . \sin(360^\circ - \alpha)$
$= (-\sin\beta)(-\sin\alpha) = \sin\alpha . \sin\beta$

folglich IV. $CH = \cos(\alpha - \beta)$
$= \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta$

Fig. 468.



V. Wenn beide Schenkel von β im zweiten Quadrant liegen. $arc(\alpha - \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 467, so hat man
Erstens $BH = BE + EH$
aber $EH = FG = CF . \sin FCG$
$= \cos\beta . \sin(180^\circ - \alpha) = \cos\beta . \sin\alpha$
und $BE = BF . \cos EBF = BF . \cos FCG$
$= \sin\beta . \cos(180^\circ - \alpha) = -\sin\beta . \cos\alpha$

folglich III. $BH = \sin(\alpha - \beta)$
$= \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$

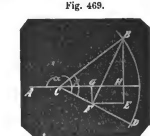
Zweitens ist $CH = \cos BCH = -\cos BCA$
$= -\cos(\alpha - \beta)$
und zugleich $CH = CG - GH$
aber $CG = CF . \cos FCG$
$= \cos\beta . \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\beta . \cos\alpha$
und $GH = EF = BF \sin EBF$
$= \sin\beta \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\beta \sin\alpha$

daher $CH = -\cos(\alpha - \beta)$
$= -\cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$
folglich IV. $\cos(\alpha - \beta)$
$= \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta$

VI. Wenn ein Schenkel von β im zweiten, der andere im dritten Quadrant liegt. $arc(\alpha - \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 468, so hat man
Erstens $BH = \sin BCH = \sin BCA$
$= \sin(\alpha - \beta) = -EH + BE$
aber $EH = FG = CF \sin FCG$
$= CF . \sin(\alpha - 180^\circ) = \cos\beta(-\sin\alpha)$
$= -\sin\alpha \cos\beta$
und $BE = BF . \cos EBF = BF . \cos FCG$
$= \sin\beta \cos(\alpha - 180^\circ) = -\sin\beta \cos\alpha$

folglich III. $BH = \sin(\alpha - \beta)$
$= \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$

Fig. 469.

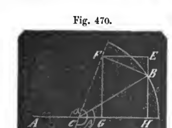


Zweitens ist $CH = \cos BCH$
$= \cos[180^\circ - (\alpha - \beta)] = -\cos(\alpha - \beta)$
zugleich ist $CH = CG + GH$
aber $CG = CF \cos FCG$
$= \cos\beta \cos(\alpha - 180^\circ) = \cos\beta(-\cos\alpha)$
$= -\cos\alpha \cos\beta$
und $GH = EF = BF \sin EBF$
$= \sin\beta . \sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin\alpha . \sin\beta$

folglich IV. $-CH = \cos(\alpha - \beta)$
$= \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta$

VII. Wenn ein Schenkel von β im zweiten, und der andere im vierten Quadrant liegt. $arc(\alpha-\beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 469, so hat man

Fig. 470.



Erstens $BH = \sin BCH = \sin BCA$
$= \sin(\alpha-\beta)$
zugleich ist $BH = HE - BE$
aber $HE = FG = CF \cdot \sin FCG = CF \cdot \sin ACD$
$= \cos(180^\circ - \beta) \sin(360^\circ - \alpha)$
$= (-\cos\beta)(-\sin\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\beta$
und $BE = BF \cdot \cos EBF = BF \cdot \cos FCG$
$= \sin(180^\circ-\beta) \cos(360^\circ-\alpha) = \sin\beta \cdot \cos\alpha$

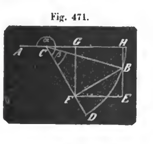
folglich III. $BH = \sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Zweitens ist $CH = \cos BCH = -\cos BCA$
$= -\cos(\alpha-\beta)$
zugleich ist $CH = CG + GH$
aber $CG = CF \cdot \cos FCG$
$= \cos(180^\circ-\beta) \cdot \cos(360^\circ-\alpha)$
$= (-\cos\beta) \cdot \cos\alpha = -\cos\alpha \cdot \cos\beta$
und $GH = EF = BF \cdot \sin EBF = BF \cdot \sin FCG$
$= \sin(180^\circ-\beta) \cdot \sin(360^\circ-\alpha)$
$= \sin\beta(-\sin\alpha) = -\sin\alpha \cdot \sin\beta$

folglich IV. $-CH = \cos(\alpha-\beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

VIII. Wenn beide Schenkel von β im dritten Quadrant liegen. $arc(\alpha-\beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 470, so erhält man

Fig. 471.



Erstens $BH = \sin BCH$
$= \sin(\alpha-\beta-180^\circ) = -\sin(\alpha-\beta)$
zugleich ist $BH = EH - EB$
aber $EH = FG = CF \cdot \sin FCG$
$= \cos\beta \cdot \sin(\alpha-180^\circ) = \cos\beta(-\sin\alpha)$
$= -\sin\alpha \cdot \cos\beta$
und $BE = BF \cos EBF = BF \cdot \cos FCG$
$= BF \cdot \cos(\alpha-180^\circ) = -BF \cdot \cos\alpha$
$= -\cos\alpha \cdot \sin\beta$

folglich III. $BH = -\sin(\alpha-\beta)$
$= -\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
und $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$
Zweitens ist $CH = \cos BCH$
$= \cos(\alpha-\beta-180^\circ) = -\cos(\alpha-\beta)$
zugleich ist $CH = CG + GH$
aber $CG = CF \cos(\alpha-180^\circ)$
$= \cos\beta(-\cos\alpha) = -\cos\alpha \cos\beta$
und $GH = EF = BF \cdot \sin EBF$
$= \sin\beta \cdot \sin(\alpha-180^\circ) = -\sin\beta \sin\alpha$

also $CH = -(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta)$
folglich IV. $-CH = \cos(\alpha-\beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

IX. Wenn ein Schenkel von β im dritten, der andere im vierten Qnadrant liegt. $arc(\alpha-\beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 471, so erhält man

Fig. 472.

Erstens $BH = \sin(\alpha-\beta-180^\circ) = -\sin(\alpha-\beta)$
zugleich ist $BH = BE + EH$
aber $EH = FG = CF \cdot \sin FCG$
$= CF \sin(360^\circ-\alpha) = -CF \cdot \sin\alpha$
$= -\cos\beta \cdot \sin\alpha$
und $BE = BF \cdot \cos EBF = BF \cos FCG$
$= BF \cdot \cos(360^\circ-\alpha) = BF \cdot \cos\alpha$
$= \sin\beta \cdot \cos\alpha$

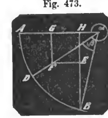
daher III $-BH = \sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$
Zweitens ist $CH = \cos BCH$
$= \cos(\alpha-\beta-180^\circ) = -\cos(\alpha-\beta)$
zugleich $CH = -CG + GH$
aber $CG = CF \cos FCG = CF \cdot \cos(360^\circ-\alpha)$
$= CF \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\alpha$
und $GH = EF = BF \sin EBF$
$= BF \cdot \sin FCG = BF \sin(360^\circ-\alpha)$
$= BF \cdot (-\sin\alpha) = -\sin\beta \cdot \sin\alpha$

daher $CH = -\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

folglich IV. $\cos(\alpha-\beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

X. Wenn beide Schenkel im vierten Quadrant liegen. $arc(\alpha-\beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 472, so hat man

Fig. 473.



Erstens $BH = \sin ACB$
$= \sin[360° - (\alpha-\beta)] = -\sin(\alpha-\beta)$
zugleich ist $BH = BE + EH$
aber $EH = FG = CF \cdot \sin FCG$
$= CF \sin(360° - \alpha) = CF \cdot (-\sin\alpha)$
$= -\cos\beta \cdot \sin\alpha$
und $BE = BF \cdot \cos EBF = BF \cos FCG$
$= BF \cdot \cos(360° - \alpha) = BF \cdot \cos\alpha$
$= \sin\beta \cdot \cos\alpha$

folglich III. $-BH = \sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Zweitens ist $CH = \cos ACB$
$= \cos[360° - (\alpha-\beta)] = \cos(\alpha-\beta)$
zugleich ist $CH = CG - GH$
aber $CG = CF \cdot \cos ACD = CF \cdot \cos(360° - \alpha)$
$= CF \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\alpha$
und $GH = EF = BF \cdot \sin EBF = BF \cdot \sin FCG$
$= BF \cdot \sin(360° - \alpha) = -BF \sin\alpha$
$= -\sin\beta \cdot \sin\alpha$

folglich IV. $CH = \cos(\alpha-\beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

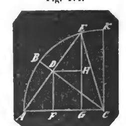
Mit den vorstehenden 10 Constructionen ist mithin die Allgemeingültigkeit der beiden Sätze:
III. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$
IV. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
nachgewiesen.

Die folgenden Constructionen sollen wie in No. 14 u. 15 als synthetische Beweise der sonst analytisch entwickelten trigonometrischen Hauptformeln gelten; dieselben sind mit laufenden römischen Zahlen bezeichnet.

16. $arc(\sin = 2\sin\alpha\cos\alpha)$ zu zeichnen. Man erhält den Bogen (2α); denn es sei $\angle ACB = \angle BCE = \alpha$, also $\angle ACE = 2\alpha$, so zeichne aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Kreisbogen ABE, ziehe die Sehne AE, welche CB normal in D schneidet, und fälle die Lothe DF und EG,

so ist $\triangle ADF \sim \triangle DCF \sim \triangle AEG$
daher $\angle ADF = \angle DCF = \angle AEF = \alpha$
und $DF : EG = AD : AE = 1 : 2$
folglich $EG (= \sin 2\alpha) = 2DF$
aber
$DF = AD \cdot \cos ADF = AD \cdot \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
folglich $EG = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ V.

Fig. 474.



17. $arc(\cos = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ zu zeichnen. Man erhält den Bogen (2α); denn fällt man Fig. 474 noch das Loth DH auf EG
so ist $\triangle DAF \sim \triangle EDH$
daher $AF = DH = FG$
und somit $CG = CF - FG = CF - AF$
Es ist aber $CF = CD \cdot \cos\alpha$
$= \cos\alpha \cdot \cos\alpha = \cos^2\alpha$
und $AF = AD \cdot \sin ADF = AD \cdot \sin\alpha$
$= \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \sin^2\alpha$
folglich $CG = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ VI.

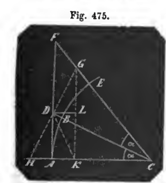
18. $arc(\cos = 1 - 2\sin^2\alpha)$ zu zeichnen. Man erhält den Bogen (2α), denn es ist
$CF = AC - AF$
also $CF - AF = AC - 2AF$
da nun $CF - AF = CF - FG = CG$
so ist $CG = AC - 2AF$
oder nach 18, $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ VII.

19. $arc(\cos = 2\cos^2\alpha - 1)$ zu zeichnen. Man erhält den Bogen (2α), denn es ist
$AF = AC - CF$
daher
$CF - AF = CF - (AC - CF) = 2CF - AC$
also nach No. 17: $CG = 2CF - AC$
oder $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ VIII.

20. $arc\left(tg = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen (2α); denn zeichnet man $\angle ECB = \angle ACB = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Bogen ABE, errichtet in A auf AC das Loth AF bis in die Richtung CE, verlängert CB bis D in AF, errichtet in D auf CD das Loth GH bis in die Richtungen CE und CA, macht $AK = AH$, zieht GK und DK,

Fig. 475.



so ist $\triangle DKA \cong \triangle DHA$
also $DK = DH$
da nun $\triangle CDG \cong \triangle CDH$
also auch $DG = DH$
so ist auch $DK = DG$
folglich $\angle DKG = \angle DGK$ (1)

Nun ist $\triangle ADH \sim \triangle ACD$
daher $\angle ADH = \angle ACD = \alpha$
also auch $FDG = \alpha$ (2)
und $\angle ADK = \alpha$
daher $\angle GDK = 180^\circ - 2\alpha$
folglich $\angle DKG + \angle DGK = 2\alpha$
und $\angle DKG = \angle DGK = \alpha$ (aus 1)

folglich $KG = AF$ (aus 2)

Fällt man nun das Loth DL auf GK
so ist $LG = LK = AD$
daher $GK = 2AD$
Nun ist $CK : KG = CA : AF$

In dieser Proportion ist:

$CK = AC - AK = AC - AH$
$\quad = AL - AD \cdot tg\ ADH$
$\quad = AC - tg\,\alpha \cdot tg\,\alpha = 1 - tg^2\alpha$
$KG = 2AD = 2\,tg\,\alpha$
$AC = 1$
$AF = tg\,(2\alpha)$

daher hat man

$$1 - tg^2\alpha : 2\,tg\,\alpha = 1 : tg\,(2\alpha)$$

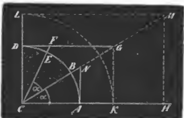
oder $$tg\,(2\alpha) = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$ IX.

Anmerk. Für $\alpha > 45^\circ$ fällt 2α in den zweiten Quadrant, und wird negativ, aber es wird auch $tg\,\alpha > 1$, also um so mehr $tg^2\alpha > 1$, und der Ausdruck für $tg\,(2\alpha)$ gleichfalls negativ. In der Zeichnung fallen dann E und K rechts von C, F fällt unterhalb in die Verlängerung von EC, CK wird $= AK - AC$, und für $+ tg\,(2\alpha)$ entsteht $\frac{2\,tg\,\alpha}{tg^2\alpha - 1}$ Auch für alle übrigen Quadranten, in welche α^2 und 2α liegen, wird nach obiger Vorschrift construirt, und man erhält die Allgemeingültigkeit der Formel IX. wie in No. 14 und 15 für die Formeln I. bis IV., und wie sie bei den noch einfacheren Formeln V. bis VIII. No. 16 bis 19 noch leichter sich ergeben.

21. $arc\left(cot = \frac{cot^2\alpha - 1}{2\,cot\,\alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen (2α), denn zeichnet man $\angle ECB = \angle ACB = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Bogen ABE, vollendet den Quadrant ACD, errichtet das Loth DG auf CD bis in die Richtung CB, verlängert CE bis F in DG, fällt das Loth GK auf die verlängerte CA, zeichnet aus C mit CK den Quadrant KL, zieht die mit DG parallele LM bis in die verlängerte CM, und fällt das Loth MH auf die verlängerte CK, so hat man

Fig. 476.



$\angle \alpha = \angle GCK = \angle FCG = \angle FGC$
daher $FG = FC$
Da nun $\angle CDF = R$, also $\angle CFG$ stumpf ist

$CG^2 = FG^2 + FC^2 + 2FG \cdot DF$
$\quad = 2FG^2 + 2FG \cdot DF$
oder $DG^2 + CD^2 = 2FG(FG + DF)$
$\quad = 2FG \cdot DG$ (1)
$\quad = 2(DG - DF)DG = 2DG^2 - 2DF \cdot DG$
daher $CD^2 = DG^2 - 2DF \cdot DG$
oder $DG^2 - CD^2 = 2DF \cdot DG$ (2)

Es ist aber

$CD : DG = CL : LM$
und da $CL = CK = DG$
auch $CD : DG = DG : LM$
oder $DG^2 = CD \cdot LM$

Diesen Werth in Gl. 2 gesetzt
giebt $CD \cdot LM - CD^2 = 2DF \cdot DG$
oder $CD(LM - CD) = 2DF \cdot DG$
oder $2DG : LM - CD = CD : DF$ (3)

In dieser Proportion ist aber

$DG = cot\,\alpha$
$LM = CL \cdot cot\,\alpha = CK \cdot cot\,\alpha$
$\quad = DG \cdot cot\,\alpha = cot\,\alpha \cdot cot\,\alpha = cot^2\alpha$
$CD = AC = 1$
$DF = cot\,(2\alpha)$

Diese Werthe in 3 substituirt, giebt die Proportion

$$2 \cot \alpha : \cot^2\alpha - 1 = 1 : \cot (2\alpha)$$

oder $$\cot (2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2 \cot \alpha} \qquad X.$$

Anmerk. Für $\alpha > 45°$ fällt 2α in den zweiten Quadrant und $\cot (2\alpha)$ wird negativ, aber es wird auch $\cot \alpha < 1$, also um so mehr $\cot^2\alpha < 1$ und der Ausdruck für $+ \cot (2\alpha)$ wird dann $\frac{1 - \cot^2\alpha}{2 \cot \alpha}$ denn in der Zeichnung würde dann F links von CD, und der Punkt M innerhalb CG fallen. Vgl. Anmerk. zu No. 20.

22. $arc\left(\cot = \frac{\cot \alpha - tg\,\alpha}{2}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen (2α), denn zeichnet man $\angle ECB = \angle ACB = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Bogen ABE, vollendet den Quadrant ACD, errichtet das Loth DG auf CD bis in die verlängerte CB, und das Loth AN auf AC bis in CG, verlängert CE bis F in DG, und fällt das Loth GK auf die verlängerte CA, so hat man wieder wie No. 21, Gl. 2:

$$DG^2 - CD^2 = 2DF \cdot DG \qquad (1)$$

Nun ist $CA : AN = CK : KG$

oder $CD : AN = DG : CD$

woraus $$CD^2 = AN \cdot DG \qquad (2)$$

Diesen Werth in Gl. 1 substituirt, giebt

$$DG^2 - AN \cdot DG = 2DF \cdot DG$$

oder $DG(DG - AN) = 2DF \cdot DG$

oder $DG - AN = 2DF$

also $$DF = \frac{DG - AN}{2} \qquad (3)$$

Nun ist $DF = \cot (2\alpha)$
$DG = \cot \alpha$
$AN = tg\,\alpha$

Diese Werthe in 3 substituirt, giebt

$$\cot (2\alpha) = \frac{\cot \alpha - tg\,\alpha}{2} \qquad XI.$$

Vgl. Anmerk. zu No. 20 u. 21.

23. $arc\left(cosec = \frac{\cot \alpha + tg\,\alpha}{2}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen (2α), denn in Fig. 476 hat man aus No. 21, Gl. 1

$$DG^2 + CD^2 = 2FG(FG + DF)$$
$$= 2FG^2 + 2FG.DF$$
$$= 2CF^2 + 2CF.DF$$

Ferner ist nach No. 22, Gl. 2:

$$CD^2 = AN \cdot DG$$

daher $DG^2 + AN.DG = 2CF^2 + 2CF.DF$

oder $DG(DG + AN) = 2CF(CF + DF)$
$= 2CF(FG + DF)$
$= 2CF.DG$

hieraus $$CF = \frac{DG + AN}{2}$$

Nun ist $CF = cosec (2\alpha)$
$DG = \cot \alpha$
$AN = tg\,\alpha$

Diese Werthe in den letzten Ausdruck substituirt, giebt

$$cosec (\alpha) = \frac{\cot \alpha + tg\,\alpha}{2} \qquad XII.$$

Vergl. Anmerk. zu No. 20 u. 21.

24. $arc\left(\sin = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ denn in Fig. 474 ist nach der in No. 16 angegebenen Construction:

$$AE^2 = 2AC \cdot AG = 2AC(AC - CG)$$

oder $4AD^2 = 2AC^2 - 2AC \cdot CG$

oder $$AD^2 = \frac{AC^2 - AC \cdot CG}{2}$$

folglich $$AD = \sqrt{\frac{AC^2 - AC \cdot CG}{2}}$$

Ist nun $\angle ACB = \angle BCE = \frac{\alpha}{2}$ also $\angle ACE = \alpha$, $AC = 1$, so ist

$$AD = \sin \frac{\alpha}{2}$$
$$AC = 1$$
$$CG = \cos \alpha$$

Diese Werthe in die letzte Formel gesetzt, giebt

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \qquad XIII.$$

Anmerk. Da für jeden Werth von α, $\cos \alpha < 1$ ist, so bleibt $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ immer positiv. Es kann $\sin \frac{\alpha}{2}$ auch niemals negativ werden, weil $\frac{\alpha}{2}$ nur den Werth von 0° bis 180° haben kann, indem α nur zwischen 0° und 360° liegt.

25. $arc\left(\cos = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, denn in Fig. 474 ist

$$CD^2 = CE^2 - DE^2 = AC^2 - \tfrac{1}{4}AE^2$$
$$= AC^2 - \frac{2AC \cdot AG}{4} = \frac{AC}{2}\,[2AC - AG]$$
$$= \frac{AC}{2}\,[2AC - (AC - CG)]$$
$$= \frac{AC}{2}\,(AC + CG)$$

oder $CD = \sqrt{\frac{AC(AC+CG)}{2}}$

Ist nun $AC = 1$; $\angle ACB = \angle BCE = \frac{\alpha}{2}$

also $CD = \cos\frac{\alpha}{2}$

und $CG = \cos\alpha$

so hat man, diese Werthe in den letzten Ausdruck substituirt:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \text{XIV.}$$

Anmerk. Da $\cos\frac{\alpha}{2}$ im 2ten Quadrat negativ, $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ aber für jeden Werth von α positiv bleibt, so gilt für α von 0° bis 180° die Formel: $+\sqrt{}$, für α von 180° bis 360° die Formel $-\sqrt{}$. Dies geht auch aus der Zeichnung hervor: CB und DF verbleiben im ersten Quadrant, wenn CE im ersten oder zweiten Quadrant liegt, also wenn α zwischen 0° und 180° beträgt. Für α von 180° bis 360° fällt CE in den dritten oder vierten Quadrant und CB und DF fallen in den zweiten Quadrant, CF also wird negativ $= -\cos\frac{\alpha}{2}$

daher hat man

A. Für $\alpha = 0°$ bis 180°

$$\cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

B. Für $\alpha = 180°$ bis 360°

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

26. $arc\left(\sin = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90°-\alpha}{2} = arc\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ denn zeichnet man Fig. 474 den Quadrant ACK mit dem Halbmesser $AC = 1$, macht $\angle ECK = \alpha$, halbirt den Bogen AE in B, zieht CB, so ist

$$\angle ACE = 90° - \alpha$$

und

$$\angle ACB = \angle BCE = \frac{90°-\alpha}{2}$$

Zeichnet man nun die Sehne AE, und fällt die Lothe EG, DF auf AC, so hat man

$$AF : AG = AD : AE = 1 : 2$$

also $2AF = AG$

oder

$$2AD \cdot \sin ADF = AC - CG \qquad (1)$$

Nun ist $\angle ADF = \angle ACB = \frac{90°-\alpha}{2}$

$$AD = \sin ACB = \sin\frac{90°-\alpha}{2}$$

$$CG = \cos ECG = \sin ECK = \sin\alpha$$

Diese Werthe in Gl. 1 substitnirt, giebt

$$2\cdot\sin\frac{90°-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{90°-\alpha}{2} = 1 - \sin\alpha$$

woraus $\sin\frac{90°-\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}} \qquad$ XV.

Anmerk. Hier gilt das positive Vorzeichen der Wurzel nur, wenn α zwischen 0° und 90° fällt; für alle anderen Werthe von α ist das negative Vorzeichen zu nehmen. Denn es ist für jeden Werth von α, $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$ eine positive Gröfse, mithin entsprechen die Vorzeichen der Wurzelgröfse dem jedesmaligen positiven oder negativen Werthe von

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Für $\frac{\alpha}{2}$ von 45° bis 180°, also für α von 90° bis 360° fällt $\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$ in die beiden letzten Quadranten, ist negativ, und mithin mufs hierfür auch $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$ negativ sein.

Dies geht auch aus der Zeichnung hervor; denn bei der Construction von $\angle(90° - \alpha)$ ist AC, wie immer, der feste Schenkel, und der bewegliche geht durch den ersten Quadrant durch B, E, K u. s. w. der constante Minuend ist $90° = \angle ACK$ und folglich mufs der veränderliche Subtrahend α, von CK ab, nach AC hin abgetragen werden, damit AC als Schenkel verbleibe.

Für $\alpha = 90°$ fällt also CE mit CB in CA, $\frac{90°-\alpha}{2}$ ist $= 0$, für α von 90° bis 270° bis 360° fällt CE mit CB in den vierten Quadrant, für $\alpha = 270°$ bis 360° fällt CE in den zweiten, und CD in den dritten Quadrant. Für α von 90° bis 360° ist also der Lage nach

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} \text{ negativ.}$$

Daher hat man

A. Für $\alpha = 0°$ bis 90°

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

B. Für $\alpha = 90°$ bis 360°

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

27. $arc\left(\cos = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90+\alpha}{2} = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, denn zeichnet man Fig. 477 mit dem Halbmesser = 1 den Halbkreis *ABD*, errichtet den lothrechten Halbmesser *CB*, trägt an denselben in dem zweiten Quadrant den $\angle BCG = \alpha$, halbirt $\angle ACG\ (= 90° + \alpha)$ in *E*, so ist $\angle ACE = \frac{90°+\alpha}{2}$; fällt man nun die Lothe *GH* auf *CD*, *EF* auf *BC* und *FK* auf *CE*, zieht noch die Sehne *DG*, so ist

Fig. 477.

$\angle ACB = \frac{1}{2}$ gestreckter $\angle ACD$

hiervon $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACG$

bleibt $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle DCG$ (1)

Nun ist

$\angle DCG + \angle CDG + \angle CGD = 180°$

oder $\angle CDG + 2\angle CDG = 180°$

oder $2\angle BCE + 2\angle DCG = 180°$

also $\angle BCE + \angle CDG = 90°$

Es ist aber auch

$\angle BCE + \angle CEF = 90°$

folglich $\angle CEF = \angle CDG$

mithin $\triangle EFK \sim \triangle DGH$

und $EF : EK = DG : DH$

Aus Gl. 1 folgt aber

$EF = \frac{1}{2}DG$

daher ist auch $EK = \frac{1}{2}DH$

oder $EK = \frac{CD - CH}{2}$

Nun ist $EK = EF \cdot \cos FEK$

$= CE \cos FEK \cdot \cos FEK$

$= \cos^2 FEK = \cos^2 ACE = \cos^2 \frac{90+\alpha}{2}$

$CD = 1$

$CH = \cos GCH = \cos 90° - \alpha = \sin\alpha$

daher ist

$$\cos^2\frac{90°+\alpha}{2} = \frac{1-\sin\alpha}{2}$$

folglich

$$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}} \qquad \text{XVI.}$$

Anmerk. Für $\alpha = 0$ bis $90°$ fällt $\frac{90°+\alpha}{2}$ in den ersten Quadrant; für $\alpha = 90°$ bis $270°$ fällt $\frac{90°+\alpha}{2}$ in den zweiten Quadrant, nämlich *CE* rechts von *CB*; für $\alpha = 270°$ bis $360°$ fällt $\frac{90°+\alpha}{2} = 45° + \frac{\alpha}{2}$ in den dritten Quadrant, nämlich *CE* unterhalb *CD*; in beiden letzten Fällen ist $\cos\frac{90°+\alpha}{2}$ negativ, daher hat man:

A. Für $\alpha = 0$ bis $90°$

$$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

B. Für $\alpha = 90°$ bis $360°$

$$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

28. $arc\left(\sin = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90°+\alpha}{2} = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$ denn construirt man Fig. 477, so hat man nach No. 27

$EK = \frac{1}{2}DH$

also ist

$CE - EK = CD - \frac{1}{2}DH = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}DH$

$= \frac{1}{2}(AD - DH)$

oder $CK = \frac{1}{2}AH$

oder $CK = \frac{AC + CH}{2}$

Nun ist $CK = CF.\sin CFK$

$= CF\cdot\sin FEK = \sin FEK\cdot\sin FEK$

$= \sin^2 ACE = \sin^2\frac{90°+\alpha}{2}$

$AC = 1$

$CH = \sin\alpha$

daher $\sin^2\frac{90°+\alpha}{2} = \frac{1+\sin\alpha}{2}$

folglich

$$\sin\frac{90°+\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}} \qquad \text{XVII.}$$

Anmerk. Für $\alpha = 90°$ fällt *CE* in *CB*, $\sin\frac{90°+\alpha}{2}$ ist = 1. Für $\alpha = 180°$ fällt *CE* unter 45° in den zweiten Quadrant, für $\alpha = 270°$ fällt *CE* in *CD*; für $\alpha = 360°$ wird $\frac{90°+\alpha}{2} = 45° + 180° = 225°$, *CE* fällt

also unter 45° in den dritten Quadrant. Daher hat man

A. Für α von 0 bis 270°

$$\sin\frac{90^\circ+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

B. Für α von 270° bis 360°

$$\sin\frac{90^\circ+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

29. $arc\left(\cos = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen

$$\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

denn nimmt man (Fig. 474); $\angle ECK = \alpha$, so ist $\angle ACB = \angle BCE = \frac{90^\circ-\alpha}{2}$

Nun ist nach No. 26:

$$2AF = AG$$

Da nun $CF = AC - AF$ so ist auch

$$2CF = 2AC - 2AF = 2AC - AG$$
$$= AC + (AC - AG) = AC + CG$$

oder $CF = \frac{AC+CG}{2}$

Nun ist $CF = CD \cdot \cos DCF = \cos^2 DCF = \cos^2\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

$$CD = 1$$

und $CG = \cos ACE = \cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha$

folglich $\cos^2\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \frac{1+\sin\alpha}{2}$

und $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$ XVIII.

Anmerk. Hier gilt die Anmerk. No. 26, dafs α für $\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von DK aus abzutragen ist. Für $\alpha = 90°$ fällt CE in CA, $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ wird $= +1$; für α zwischen 90° und 180° fällt CE mit CB in den vierten Quadrant und $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ bleibt +; für $\alpha = 180°$ fällt CE in die Verlängerung von KC, CB unter 45° in den vierten Quadrant und $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \cos(-45^\circ)$ bleibt +. Bei $\alpha = 270°$ fällt CE in die Verlängerung von AC, CB in die Verlängerung von KC, $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \cos(-90^\circ) = 0$. Für α von 270° bis 360° fällt CB in den dritten Quadrant, $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ wird negativ. Daher hat man

A. Für $\alpha = 0$ bis 270°

$$\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

B. Für $\alpha = 270°$ bis 360°

$$\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

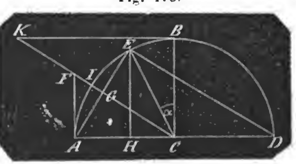
30. $arc\left(tg = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen

$$\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Denn zeichnet man Fig. 478 mit dem Halbmesser $AC = DC = 1$ den Halbkreis

Fig. 478.



ABD, errichtet den lothrechten Halbmesser CB, trägt an denselben in den ersten Quadrant $\angle BCE = \alpha$, halbirt $\angle ACE$ durch CJ, so ist $\angle ACJ = \frac{90^\circ-\alpha}{2}$. Errichtet man nun das Loth AF auf AC bis in die verlängerte CJ, fällt das Loth EH auf AC, und zieht die Sehnen AE und DE

so ist $\angle AED = R$

aber auch $\angle AGC = R$

daher $DE \# CG$

daher wieder $\angle ADE = ACF$

hieraus $\triangle AED \sim \triangle FAC$

mithin $DE : AE = AC : AF$

also auch $DE^2 : AE^2 = AC^2 : AF^2$

da nun $DE^2 : AE^2 = DH : AH$

so ist auch $DH : AH = AC^2 : AF^2$

oder $CD + CH : AC - CH = AC^2 : AF^2$

woraus $AF^2 = AC^2\frac{AC-CH}{CD-CH}$

oder $AF = AC\sqrt{\frac{AC-CH}{CD+CH}}$

Nun ist $AF = tg\, ACJ = tg\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

$$AC = CD = 1$$

und $CH = \sin ECB = \sin\alpha$

daher hat man

$$tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\ \text{XIX.}$$

Anmerk. Für jeden Werth von α ist $(1-\sin\alpha)$ und $(1+\sin\alpha)$ positiv, also die Wurzelgröfse ist immer positiv. Das Vorzeichen derselben entspricht also immer dem Vorzeichen von $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

Für α von 0 bis 90° ist $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von $+45^\circ$ bis ± 0,
also im 1ten Quadrant und +.

Für α von 90° bis 180° ist $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von ± 0 bis -45°
also im 4ten Quadrant und −.

Für α von 180° bis 270° ist $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von -45° bis -90°
also im 4ten Quadrant und −.

Für α von 270° bis 360° ist $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von -90° bis -135°
also im 3ten Quadrant und +.

Man hat daher für α von incl. 0 bis 90° und von 270° bis 360°

$$tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

Für α von incl. 90° bis incl. 270°

$$tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

31. $arc\left(\cot=\pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^\circ+\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$ denn bei der Construction ad 30 mit Fig. 478 ist

$$\angle ECJ=\frac{90^\circ-\alpha}{2}$$

hierzu $\angle BCE=\alpha$

giebt $\angle ECJ+\angle BCE=\angle BCJ$

$$=\frac{90^\circ-\alpha}{2}+\frac{2\alpha}{2}=\frac{90^\circ+\alpha}{2}$$

Nun ist

$$AF=\cot BCJ=\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$$

und nach No. 30

$$AF=AC\cdot\sqrt{\frac{AC-CH}{CD+CH}}=\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

also $$\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\ \text{XX.}$$

Anmerk. Wie ad 30 gezeigt, kann das Vorzeichen der Wurzel nur dem der $\cot$ entsprechen.

Für α von 0° bis 90° ist $\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$ von 45° bis 90°
also im 1ten Quadrant und +.

Für α von 90° bis 180° ist $\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$ von 90° bis 135°
also im 2ten Quadrant und −.

Für α von 180° bis 270° ist $\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$ von 135° bis 180°
also im 2ten Quadrant und −.

Für α von 270° bis 360° ist $\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$ von 180° bis 225°
also im 3ten Quadrant und +.

Man hat daher:
für α von incl. 0 bis 90°, und von incl. 270° bis 360°

$$\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

für α von incl. 90° bis incl. 270°

$$\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

32. $arc\left(\cot=\pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$

Denn construirt man wie No. 30 und 31, Fig. 478 und zeichnet noch die Normale BK auf BC bis in die Richtung CJ, so ist, da, wie ad 30 gezeigt

$\triangle AED \infty \triangle FAC$

ebenso $\triangle AED \infty \triangle CBK$

folglich $AE:DE=AC:BK$

oder $AE^2:DE^2=BC^2:BK^2$

und da $AE^2:DE^2=AH:DH$

also $AH:DH=BC^2:BK^2$

oder $AC-CH:CD+CH=BC^2:BK^2$

woraus $BK=BC\cdot\sqrt{\frac{CD+CH}{AC-CH}}$

Nun ist $BK=\cot ACJ=\cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

$BC=CD=AC=1$

und $CH=\sin\alpha$

folglich $$\cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\ \text{XXI.}$$

Anmerk. Da $\cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ mit $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ immer gleiche Vorzeichen hat, so ist nach No. 30:
für α von 0 bis 90° und von 270° bis 360°

$$\cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

für α von 90° bis 270°

$$cot\,\frac{90-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+sin\,\alpha}{1-sin\,\alpha}}$$

33. $arc\left(tg = \pm\sqrt{\frac{1+sin\,\alpha}{1-sin\,\alpha}}\right)$

zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90+\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$

denn es ist Fig. 478:

$$\angle BCJ = \angle ACB - \angle ACJ$$

d. h. $\angle BCJ = 90^0 - \frac{90^0-\alpha}{2} = \frac{90^0+\alpha}{2}$

Nun ist $BK = tg\,BCJ = tg\,\frac{90+\alpha}{2}$

und nach No. 32

$$BK = BC \cdot \sqrt{\frac{CD+CH}{AC-CH}} = \sqrt{\frac{1+sin\,\alpha}{1-sin\,\alpha}}$$

daher $tg\,\frac{90^0+\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+sin\,\alpha}{1-sin\,\alpha}}$ XVII

Anmerk. Da $tg\,\frac{90^0+\alpha}{2}$ mit $cot\,\frac{90^0+\alpha}{2}$ immer gleiche Vorzeichen hat, so ist nach No. 31

für α von 0 bis 90° und von 270° bis 360°

$$tg\,\frac{90+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+sin\,\alpha}{1-sin\,\alpha}}$$

für α von 90° bis 270°

$$tg\,\frac{90+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+sin\,\alpha}{1-sin\,\alpha}}$$

34. $arc\left(tg = \frac{1-sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\right)$

Man erhält den Bogen $\frac{90^0-\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$

denn bei der Construction und Bezeichnung Fig. 478 stehen die Seiten des $\triangle CAF$ und des $\triangle EHA$ gegenseitig normal auf einander, folglich ist

$$\triangle CAF \sim \triangle EHA$$

also $AF : AC = AH : EH$

oder $AF : AC = AC - CH : EH$

woraus $AF = AC \cdot \frac{AC-CH}{EH}$

Nun ist $AF = tg\,ACJ = tg\,\frac{90^0-\alpha}{2}$

$AC = 1$

$CH = cos\,ACE = sin\,BCE = sin\,\alpha$

$EH = sin\,ACE = cos\,BCE = cos\,\alpha$

daher $tg\,\frac{90^0-\alpha}{2} = \frac{1-sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ XXIII.

Anmerk. Der Zähler $1-sin\,\alpha$ ist immer positiv, der Nenner $cos\,\alpha$ ist für α von 0 bis 90° und von 270° bis 360° positiv, und für α von 90° bis 270° negativ, was auch (s. No. 30) mit den Vorzeichen von $tg\,\frac{90^0-\alpha}{2}$ übereinstimmt.

35. $arc\left(cos = \frac{1-sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\right)$

zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^0+\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$

denn bei der Construction Fig. 478 hat man

$$\angle ACJ = \frac{90^0-\alpha}{2}$$

$$\angle ACB = 90^0$$

daher $\angle ACB - \angle ACJ$

$$= \frac{2\cdot 90^0-(90^0-\alpha)}{2} = \frac{90^0+\alpha}{2}$$

oder $\angle BCJ = \frac{90^0+\alpha}{2}$

Nun ist $AF = cot\,BCJ = cot\,\frac{90^0+\alpha}{2}$

nach No. 34 ist aber $AF = \frac{1-sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$

folglich $cot\,\frac{90^0+\alpha}{2} = \frac{1-sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ XXIV.

Anmerk. Hier gilt dieselbe Anmerk. No 34, und No. 31 zeigt die Uebereinstimmung der Vorzeichen für $cot\,\frac{90^0+\alpha}{2}$ mit $\frac{1-sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$

36. $arc\left(tg = \frac{1+sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\right)$

zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^0+\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$

denn bei der Construction Fig. 478 ist schon No. 30 gezeigt, dafs

$$\triangle AED \sim \triangle FAC$$

also auch $\triangle AED \sim \triangle CBK$

da nun auch $\triangle AED \sim \triangle EHD$

so ist $\triangle EHD \sim CBK$

mithin $EH : DH = BC : BK$

oder $EH : CD + CH = BC : BK$

woraus $BK = BC\,\frac{CD+CH}{EH}$

Nun ist $BK = tg\,BCJ = tg\,\frac{90^0+\alpha}{2}$

ferner $BC = CD = 1$

$CH = sin\,BCE = sin\,\alpha$

und $EH = cos\,BCE = cos\,\alpha$

daher ist $tg\,\frac{90^0+\alpha}{2} = \frac{1+sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ XXV.

Hier gilt die Anmerk. No 35, und da $\frac{90^0+\alpha}{2}$ mit $cot\,\frac{90^0+\alpha}{2}$ immer einerlei Vorzeichen hat, so stimmen für alle Werthe von α auch $tg\,\frac{90^0+\alpha}{2}$ mit $\frac{1+sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ in den Vorzeichen überein.

37. $arc\left(cot = \frac{1 + sin\ \alpha}{cos\ \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90° - \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ denn es ist Fig. 478

$$BK = cot\ ACJ = cot\ \frac{90° - \alpha}{2}$$

Nach No. 36 ist aber $BK = \frac{1 + sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$

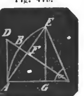
folglich ist $cot\ \frac{90° - \alpha}{2} = \frac{1 + sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$ XXVI.

38. $arc\left(tg = \frac{1 - cos\ \alpha}{sin\ \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$

Denn es sei Fig. 479 $\angle ACE = \alpha$, so zeichne aus *C* mit dem Halbmesser = 1 den Bogen *AE*, halbire denselben in *B*, ziehe *CB*, errichte das Loth *AD* auf *AC* bis in die verlängerte *CB*, ziehe die Sehne *AE*, und fälle das Loth *EG* auf *AC*, so ist

Fig. 479.



$\angle DAC = R = \angle AGE$
$\angle EAG + \angle AEG = R = \angle EAG + \angle ACD$

daher $\angle ACD = \angle GEA$
folglich $\triangle ACD \infty \angle GEA$
hieraus $AC : AD = EG : AG$
oder $AC : AD = EG : AC - CG$
woraus $AD = AC \cdot \frac{AC - CG}{EG}$

Nun ist $AD = tg\ \frac{\alpha}{2}$
$AC = 1$
$CG = cos\ \alpha$
$EG = sin\ \alpha$

daher $AD = tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\ \alpha}{sin\ \alpha}$ XXVII.

39. $arc\left(tg = \frac{sin\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$

Denn zeichnet man Fig. 480 aus *C* mit dem Halbmesser = 1 den Halbkreis *AED*, nimmt $\angle ACE = \alpha$, halbirt denselben durch *CB*, errichtet in *A* auf *AC* das Loth *AF* bis in die Richtung *CB*, fällt das Loth *EG* auf *AC*, und zieht die Sehne *ED*, so ist

Fig. 480.



Peripherie$\angle\ EDA = \frac{1}{2}$ Centri$\angle\ ECA = \angle FCA$

daher $DE \ddagger CF$
da nun zugleich $EG \ddagger AF$
so ist $\triangle DEG \infty \triangle CFA$
folglich $DG : EG = AC : AF$
oder $CD + CG : EG = AC : AF$
woraus $AF = AC \cdot \frac{EG}{CD + CG}$

Nun ist $AF = tg\ \frac{\alpha}{2}$
$EG = sin\ \alpha$
$CG = cos\ \alpha$
und $AC = CD = 1$

daher $AF = tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$ XXVIII.

40 $arc\left(tg = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$

Denn zieht man Fig. 480 noch die Sehne *AE*, so hat man

$DE \ddagger CF$
$\angle AED = R = \angle FAC$

daher $\triangle AED \infty \triangle FAC$
mithin $DE : AE = AC : AF$
also auch $DE^2 : AE^2 = AC^2 : AF^2$

Nun ist auch $DE^2 : AE^2 = DG : AG$

daher $DG : AG = AC^2 : AF^2$
oder $DC + CG : AC - CG = AC^2 : AF^2$
woraus $AF = AC \cdot \sqrt{\frac{AC - CG}{DC + CG}}$

Nun ist $AF = tg\ ACB = tg\frac{\alpha}{2}$

$AC = DC = 1$

und $CG = \cos\alpha$

folglich $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ XXIX.

Anmerk. Die Wurzel ist für jeden Werth von α immer positiv, die Vorzeichen derselben richten sich also nach denen von $tg\,\frac{\alpha}{2}$ Im ersten und dritten Quadrant ist die tg positiv, im zweiten und vierten negativ. Im dritten und vierten Quadrant kann $tg\,\frac{\alpha}{2}$ nicht vorkommen, demnach ist

für α von 0 bis 180°

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

für α von 180° bis 360°

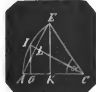
$$tg\,\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

41. $arc\,(\sin + \cos = \pm\sqrt{1+\sin\alpha})$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $= \frac{1}{2}\alpha$

Denn ist Fig. 481 $\angle ADE = \alpha$, so halbire denselben durch CJ, zeichne aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen AJE, zeichne die Sehne AE, fälle die Lothe JG und EK auf AC, so hat man

Fig. 481.



$\triangle ACE = \frac{1}{2}AE \times CL = \frac{1}{2}AC \times EK$

daher ist	$AE \times CL = AC \times EK$
oder	$2AL \times CL = AC \times EK$
oder	$2JG \times CG = AC \times EK$
ferner ist	$JG^2 + CG^2 = CJ^2 = AC^2$

addirt

$JG^2 + CG^2 + 2JG \times CG = AC^2 + AC \times EK$

also $(JG + CG)^2 = AC^2 + AC \cdot CK$

daher $JG + CG = \sqrt{AC^2 + AC \cdot EK}$

$= \sqrt{AC\,(AC + EK)}$

Nun ist $JG = \sin\frac{\alpha}{2}$

$CG = \cos\frac{\alpha}{2}$

$AC = 1$

$EK = \sin\alpha$

folglich

$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha}$ XXX.

Für die Untersuchung über das jedesmal richtige Vorzeichen hat man Folgendes zu erwägen:

Für $\alpha = 0$ hat man $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 0 = 0$

und $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 0 = +1$

mithin auch

$\sqrt{+\sin\alpha} = \sqrt{1+\sin 0} = \sqrt{1+0} = +\sqrt{1}$

Für alle übrigen Werthe von α im ersten Quadrant bis incl. 90° ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$$

positiv, folglich auch $\sqrt{1+\sin\alpha}$ positiv, und

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha}$$

Für $\alpha = 90°$ ist $\frac{\alpha}{2} = 45°$

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin 90°}$$
$$= +\sqrt{1+1} = +\sqrt{2}$$

Liegt α im zweiten Quadrant, so liegt $\frac{\alpha}{2}$ im ersten, also auch in diesem Fall ist $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha}$

Für $\alpha = 180°$ ist $\frac{\alpha}{2} = 90°$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 90° = +1;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 90° = 0$$

$\sqrt{1+\sin\alpha} = \sqrt{1+\sin 180°} = \sqrt{1+0} = +\sqrt{1}$

Liegt α im dritten Quadrant, so liegt $\frac{\alpha}{2}$ im zweiten, und zwar innerhalb 90° und 135°. Wenngleich nun hier $\cos\frac{\alpha}{2}$ negativ ist, so ist doch innerhalb der Grenzen $\sin\frac{\alpha}{2} > \cos\frac{\alpha}{2}$

mithin $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$

eine positive Grösse, mithin

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha}$$

Wenn α in den vierten Quadrant tritt, entsteht die Scheide für die Vorzeichen $\pm$ der Wurzel. Denn für $\alpha = 270°$ ist $\frac{\alpha}{2} = 135°$, mithin $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sin\frac{\alpha}{2}$ und

$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 0$; aber auch

$$\sqrt{1+\sin 270^\circ} = \sqrt{1+(-1)} = 0$$

und in diesem Fall

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \pm 0$$

Wird $\alpha > 270^\circ$, tritt also α in den vierten Quadrant, so fällt $\frac{\alpha}{2}$ zwischen 135° und 180°, es wird $\cos\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$ wird negativ, mithin ist für α zwischen 270° und 360° nur

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha}$$

Für $\alpha = 360^\circ$, also für $\frac{\alpha}{2} = 180^\circ$ gilt ebenfalls nur das negative Vorzeichen, denn es ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 180^\circ = -1$$

folglich

$$\sqrt{1+\sin\alpha} = \sqrt{1+\sin 360^\circ} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1}$$

negativ, d. h. für $\alpha = 360^\circ$ ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1}$$

daher hat man

für α von incl. 0 bis incl. 270°

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha}$$

für α von incl. 270° bis incl. 360°

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha}$$

42. $arc\left(\cos - \sin = \pm\sqrt{1-\sin\alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$

Denn bei derselben Construction, Fig. 481, hat man wie No. 41:

$$2JG \times CG = AC \times EK$$
$$JG^2 + CG^2 = CJ^2 = AC^2$$

subtrahirt

$$JG^2 + CG^2 - 2JG \times CG = AC^2 - AC \times EK$$

oder $(CG - JG)^2 = AC(AC - EK)$

woraus $CG - JG = \sqrt{AC(AC - EK)}$

folglich nach No. 41:

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\sin\alpha} \quad \text{XXXI.}$$

Anmerk. $\sqrt{1-\sin\alpha}$ ist für jeden Werth von α eine positive Gröfse. Die Vorzeichen derselben richten sich also nach denen von

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$$

Für $\alpha = 0$ entsteht

$$\cos 0 - \sin 0 = \sqrt{1-\sin 0}$$

d. i. $+1 - 0 = \sqrt{1-0}$

also $+1 = +\sqrt{1}$

Für $\alpha = 90^\circ$ entsteht

$$\cos 45^\circ - \sin 45^\circ = \sqrt{1-\sin 90^\circ}$$

d. i. $+\frac{1}{2}\sqrt{2} - (+\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{1-(+1)}$

also $\pm 0 = \pm\sqrt{0}$

Für α zwischen 0 und 90° ist $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$

also $\cos\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$

folglich $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$ positiv

und $= +\sqrt{1-\sin\alpha}$

Für $\alpha = 180^\circ$ entsteht

$$\cos 90^\circ - \sin 90^\circ = \sqrt{1-\sin 180^\circ}$$

d. i. $0 - (+1) = \sqrt{1-0}$

also $-1 = -\sqrt{1}$

Für α zwischen 90° und 180° fällt $\frac{\alpha}{2}$ zwischen 45° und 90°, also $\cos\frac{\alpha}{2} < \sin\frac{\alpha}{2}$

folglich $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$ negativ und $= -\sqrt{1-\sin\alpha}$

Für $\alpha = 270^\circ$ entsteht

$$\cos 135^\circ - \sin 135^\circ = \sqrt{1-\sin 270^\circ}$$

d. i. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - (+\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{1-(-1)}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

Für α zwischen 180° und 270° fällt $\frac{\alpha}{2}$ zwischen 90° und 135°; $\cos\frac{\alpha}{2}$ ist negativ, $\sin\frac{\alpha}{2}$ positiv, also $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$ eine negative Gröfse und $= -\sqrt{1-\sin\alpha}$.

Für α zwischen 270° und 360° bleibt $\frac{\alpha}{2}$ im zweiten Qnadrant, also wie so eben $-\sqrt{1-\sin\alpha}$

Endlich für $\alpha = 360^\circ$ wird $\frac{\alpha}{2} = 180^\circ$ und es entsteht

$$\cos 180^\circ - \sin 180^\circ = \sqrt{1-\sin 360^\circ}$$

d. i. $-1 - 0 = \sqrt{1-0}$

also $-1 = -\sqrt{1}$

Demnach hat man

für α von 0 bis incl. 90°

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1-\sin\alpha}$$

für α von incl. 90° bis incl. 360°

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1-\sin\alpha}$$

43. $arc\left(\sin - \cos = \pm\sqrt{1-\sin\alpha}\right)$

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$

Denn schreibt man in No. 42 für

$JG^2 + CG^2 - 2JG \times CG = AC^2 - AC \times EK$

$(JG - CK)^2 = AC(AC - EK)$

also $JG - CK = \sqrt{AC(AC - EK)}$

so hat man

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha} \quad \text{XXXII.}$$

Und wenn man die Anmerk. No. 42 in derselben Reihenfolge durchnimmt, so findet man

für α von incl. 0 bis incl. 90°

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 - \sin\alpha}$$

für α von incl. 90° bis incl. 360°

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1 - \sin\alpha}$$

44. $arc\left(\sin = \pm \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\alpha} \pm \sqrt{1 - \sin\alpha}\right]\right)$ zu zeichnen.

Man erhält für jeden Werth von α den Bogen $\frac{\alpha}{2}$, es sind nur die Vorzeichen in jedem einzelnen Fall zu bestimmen.

A. für α von 0 bis incl. 90° hat man

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}\right]$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}\right]$$

Denn man hat Fig. 481

aus 41:

$$CG + JG = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha}$$

aus 42:

$$CG - JG = \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

wo $\frac{\alpha}{2} < 45°$, also $CG > JG$ ist.

Durch Subtraction entsteht

$$2JG = 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

Durch Addition entsteht

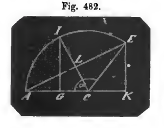
$$2CG = 2\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

hieraus für α von 0 bis 90°

$$\left.\begin{matrix}\sin\frac{\alpha}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} \mp \sqrt{1 - \sin\alpha}\right) \quad \text{XXXIII.}$$

B. für α von 90° bis 180° ist

Fig. 482.



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

denn bei derselben Bezeichnung in Fig. 482 ist:

$$2\triangle ACE = AE \times CL = AC \times EK$$
$$= 2AL \times CL = AC \times EK$$
$$= 2JG \times CG = AC \times EK$$

Nun ist $JG^2 + CG^2 = CJ^2 = AC^2$

daher

$JG^2 + CG^2 \pm 2JG \times CG = AC^2 \pm AC \times EK$

oder $(JG \pm CG)^2 = AC(AC \pm EK)$

also $JG + CG = \sqrt{AC(AC + EK)}$

und $JG - CG = \sqrt{AC(AC - EK)}$

Nun ist $JG = \sin\frac{\alpha}{2}$

$CG = \cos\frac{\alpha}{2}$

$AC = 1$

$EK = \sin\alpha$

und da $\angle ACJ = \frac{\alpha}{2} > 45°$, daher $JG > CG$

so hat man

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

Durch Addition, Subtraction und Reduction erhält man

$$\left.\begin{matrix}\sin\frac{\alpha}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} \pm \sqrt{1 - \sin\alpha}\right) \quad \text{XXXIV.}$$

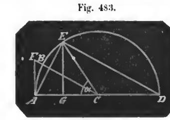
C. für α von 180° bis 270° ist (wie ad B.)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

Denn bei derselben Bezeichnung in Fig. 483 hat man $\angle ACJ = \angle ECJ = \frac{\alpha}{2}$ die Linie JC verlängert, halbirt also auch den hohlen $\angle ACE$ und $\angle ACL = \angle ECL$ und da $\angle GCL$ der Scheitelwinkel von $\angle ACJ$, so ist auch

Fig. 483.



$$\angle GCL = \angle ACJ = \angle ECJ$$

abgezogen $\angle ECG = \angle ECG$

bleibt $\angle ECL = \angle ACL = \angle JCG$

und $\triangle ECL \cong \triangle ACL \cong \triangle JCG$

woraus $EL = AL = JG$

und $CL = CG$

Hiernach gilt der ganze Beweis von B mit Fig. 482 auch für diesen Fall, bis:

$$JG + CG = \sqrt{AC(AC + EK)}$$
$$JG - CG = \sqrt{AC(AC - EK)}$$

Für die Bezeichnung der Linien AC, JG, CG und EK ist zu bedenken, dafs die Gleichungen nur für positive Längen Gültigkeit haben, die sie aber zum Theil nicht mehr sind, wenn sie als trigonometrische Functionen ausgedrückt werden.

$+ AC$ als Halbmesser ist und bleibt $+ 1$,

$+ JG$ als Sinus bleibt $+ \sin \frac{\alpha}{2}$

$+ CG$ als Cosinus wird eine negative Gröfse; damit also die Gleichung Geltung behalte ist zu setzen

$$+ CG = - \cos \frac{\alpha}{2}$$

$+ EK$ als Sinus wird negativ, für die Gültigkeit der Gleichung ist also zu setzen

$$+ EK = - \sin \alpha$$

Daher entstehen die beiden Gleichungen

$$\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin \alpha}$$
$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin \alpha}$$

und da $\angle JCG = 180° - \frac{\alpha}{2} > 45°$

so hat man

$$\left.\begin{matrix}\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 + \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \sin \alpha})$$

XXXV.

Fig. 484.

D. für α von 270° bis 360° ist

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha})$$
$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha})$$

Denn bei derselben Bezeichnung in Fig. 484 hat man $\angle ACJ = \angle ECJ = \frac{\alpha}{2}$ die Linie JC verlängert, halbirt zugleich den hohlen $\angle ACE = 360° - \alpha$, $\angle ACL = \angle ECL = \angle JCG$ und $\triangle ACL \cong \triangle ECL \cong \triangle JCG$.

Also auch hier gilt der Beweis ad B bis zu dem Satz

$$JG^2 + CG^2 \pm 2JG \times CG = AC^2 \pm AC \times EK$$

Da aber $\angle JCG \left(= 180° - \frac{\alpha}{2}\right) < 45°$

so ist $CG > JG$.

Daher fährt man also fort:

mithin $(CG \pm JG)^2 = AC(AC \pm EK)$

$$CG + JG = \sqrt{AC(AC + EK)}$$
$$CG - JG = \sqrt{AC(AC - EK)}$$

Nun ist hier und aus denselben Gründen wie ad C zu setzen

für AC der Werth $+ 1$

für JG der Werth $+ \sin \frac{\alpha}{2}$

für CG der Werth $- \cos \frac{\alpha}{2}$

für EK der Werth $- \sin \alpha$

daher entstehen die beiden Gleichungen:

$$- \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin \alpha}$$
$$- \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin \alpha}$$

woraus durch Subtraction, Addition und Reduction

$$\left.\begin{matrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}\right] \qquad \text{XXXVI.}$$

45. $arc\left(\sin = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α

Fig. 485.

Denn es sei (Fig. 485)

$\angle ACD = \alpha$, $\angle DCB = \beta$

so nimm $\angle DCE = \angle DCB$, zeichne aus C mit dem Halbmesser = 1 den Bogen $AEDB$, ziehe die Sehne BE, welche den Halbmesser CD in F schneidet, fälle die Lothe EH, FG, BK auf BC und das Loth EM auf BK, so hat man

$FL : BM = EF : EB$

Da nun $2EF = EB$

so ist auch $2FL = BM$

auch ist $2GL = MK + EH$

daher $2(FL + GL) = BM + MK + EH$

oder $2FG = BK + EH$

oder $FG = \frac{1}{2}(BK + EH)$

Nun ist $FG = FC\ \sin\alpha = \cos\beta\cdot\sin\alpha$

$BK = \sin(\alpha+\beta)$

und $EH = \sin(\alpha-\beta)$

folglich ist $\cos\beta\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

oder $\sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}$ XXXVII.

46. $arc\left(\cos = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn fällt man noch die Normale FN auf BK,

so hat man $BN : BM = BF : BE$

und da $2BF = BE$

so ist auch $2BN = BM = BK - EH$

also $BN = \frac{1}{2}(BK - EH)$

Nun ist BF normal auf CF, BN normal auf CG, und FN normal auf FG,

daher $\triangle FBN \sim \triangle FCG$

also $\angle FBN = \angle FCG = \alpha$

Aber $BN = BF\ \cos FBN = \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$BK = \sin(\alpha+\beta)$

und $EH = \sin(\alpha-\beta)$

folglich ist $\sin\beta\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

oder $\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}$ XXXVIII.

47. $arc\left(\cos = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn Fig. 485 hat man

$CK + HK = CH$

hierzu $CK = CK$

giebt $2CK + HK = CH + CK$

Nun ist

$BF : BE = FN : EM = GK : HK$

aber $BE = 2BG$

daher auch $HK = 2GK$

daher ist

$2CK + 2GK = 2(CK + GK) = CH + CK$

oder $2CG = CH + CK$

woraus $CG = \frac{1}{2}(CH + CK)$

Nun ist $CG = CF\ \cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\alpha$

$CH = \cos(\alpha-\beta)$

$CK = \cos(\alpha+\beta)$

folglich $\cos\beta \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

oder $\cos\alpha = \dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}$ XXXIX.

48. $arc\left(\sin = \dfrac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn Fig 485 hat man No. 46 nnd 47

$2FN = EM = HK = CH - CK$

daher $FN = \frac{1}{2}(CH - CK)$

Nun ist nach No. 46

$\angle FBN = \angle FCG = \alpha$

daher

$FN = BF \sin\alpha = \sin\beta \cdot \sin\alpha$

$CH = \cos(\alpha-\beta)$

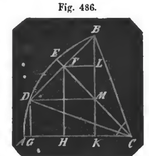
$CK = \cos(\alpha+\beta)$

daher $\sin\beta \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

oder $\sin\alpha = \dfrac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$ XL.

49. $arc\left(\sin = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \sin\beta\right)$ zu zeichuen.

Fig. 486.



Man erhält den Bogen α.

Denn zeichnet man (Fig. 486) $\angle ACB = \alpha$, innerhalb desselben an einen Schenkel, z. B. AC den $\angle ACD = \beta$, halbirt $\angle BCD$ durch CE, zeichnet aus C mit dem Halbmesser = 1 den Bogen $ADEB$, zieht die Sehne BD, nnd fällt die Lothe BK, FH nnd DG auf AC, so hat man

$BK + DG = 2FH$

Nun ist $BK = \sin\alpha$

$DG = \sin\beta$

nnd $FH = CF \sin FCH = \cos BCE \cdot \sin FCH$

Nun ist $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

und $\angle FCH = \angle DCE + \angle ACD$

$= \frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \beta = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

daher $FH = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

folglich $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

oder $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \sin\beta$ XLI.

50. $arc\left(\sin = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} + \sin\beta\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn zeichnet man (Fig. 487) $\angle ACB = \alpha$, an den einen Schenkel AC desselben den $\angle ACD' = \beta$ ausserhalb, und an den anderen Schenkel den $\angle BCD = \beta$ innerhalb, halbirt $\angle ACD = (\alpha - \beta)$ dnrch CE zeichnet aus C mit dem Halbmesser = 1den Bogen BED', zieht die Sehne BD', aus D' mit AC die Parallele $D'K'$, fällt auf AC nnd $D'K'$ die Lothe $BK + KK'$, $FH + HH'$ nnd $D'G$, so hat man

Bogen BD = Bogen AD'

„ DE = „ AE

daher Bogen BE = Bogen $D'E$

nnd

$BF = D'F$

daher auch

$BD' = 2D'F$

folglich auch

$BK' = 2FH'$

oder

$$BK + KK' = 2FH + 2HH'$$

also

$$BK = 2FH + HH'$$

folglich

$$BK - HH' = 2FH$$

Nun ist

$$FH = CF \cdot \sin ACE = CF \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= \cos\ BCE \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= \cos\left[\beta + \frac{\alpha - \beta}{2}\right] \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$BK = \sin \alpha$$

und $HH' = D'G = \sin \beta$

Fig. 487.

daher $$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

oder $$\sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \beta$$ XLII.

51. $arc\left(\cos = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \beta\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.
Denn fällt man in Fig. 486 noch die Lothe FL und DM auf BK, so hat man

$$DF = BF$$

also $BD = 2BF$

daher auch $DM = 2FL$

oder $GK = 2HK$

hierzu $2CK = 2CK$

giebt $GK + 2CK = 2HK + 2CK$

oder $CG + CK = 2CH$

Nun ist $CG = \cos \beta$

$$CK = \cos \alpha$$

und $CH = CF \cdot \cos FCH = \cos BCF \cdot \cos FCH$

$$= \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos (FCD + ACD)$$

$$= \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2} + \beta\right) = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

folglich $$\cos \beta + \cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

oder $$\cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \beta$$ XLIII.

52. $arc\left(\cos = \cos \beta - 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.
Denn auf Fig. 486 hat man nach No. 51:

$$GK = 2FL$$

also auch $CG - GK = 2FL$

Nun ist $CG = \cos \beta$

$$CK = \cos \alpha$$

und $$FL = BF \cdot \sin FBL = BF \cdot \sin FCH = \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

folglich $$\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

oder $$\cos \alpha = \cos \beta - 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$ XLIV.

53. $arc\left(tg = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$.

Denn setzt man Fig. 488 die $\angle ACB = \alpha$, $BCD = \beta$ zusammen, zeichnet aus C mit dem Halbmesser = 1 den Bogen ABD, errichtet in B auf BC das Loth $BF + BE$ bis in die Richtungen von CA und CD, ferner in A auf AC das Loth AG bis in die Richtung von CD, und fällt das Loth EK auf AC, welches den Halbmesser BC in H schneidet, so ist

Fig. 488.

$\angle EFK + \angle FEK = R = \angle BHE + \angle FEK$

daher $\angle EFK = \angle BHE + \angle CHK$

hierzu $\angle EKF = \angle EBH = \angle CKH = R$

giebt $\triangle EFK \backsim \triangle EHB \backsim \triangle CHK$

und $\angle BEH = \angle ACB = \alpha$

daher ist

$EF : EK = CH : CK$

oder umgestellt

$EF : CH = EK : CK$

Es ist aber auch

$AG : AC = EK : CK$

daher ist $AG : AC = EF : CH$

oder $AG : AC = BF + BE : BC - BH$

also $AG = AC \cdot \frac{BF + BE}{BC - BH}$

Nun ist $AG = tg(\alpha + \beta)$

$AC = BC = 1$

$BF = tg\,\alpha$

$BE = tg\,\beta$

und

$BH = BE\;tg\;BEH = BE\;tg\,\alpha = tg\,\beta \cdot tg\,\alpha$

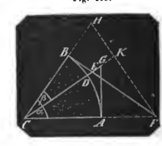
folglich $tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$ XLV.

54. $arc\left(tg = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha - \beta)$.

Es sei (Fig. 489) $\angle ACB = \alpha$, $\angle BCD$ innerhalb α an dem einen Schenkel BC liegend $= \beta$; zeichnet man nun mit dem Halbmesser = 1 den Bogen ADB, errichtet in A auf AC das Loth AG bis in die verlängerte CD, in B auf BC das Loth BF bis in die verlängerte CA, welches die CG in E schneidet, fällt von F auf die verlängerte CG, das Loth $FK + KH$ bis in die verlängerte CB, so hat man

Fig. 489.



$\angle CKF = \angle CAG = R$

und $\angle FCK = \angle ACG$

daher $\triangle FCK \backsim \triangle GAC$

mithin I. $CK : FK = AC : AG$

Eerner ist

$\angle EFK + \angle FEK = \angle BFH + \angle BHF = R$

also $\angle FEK = \angle CHK$

hierzu $\angle FKE = \angle CKH = R$

giebt $\triangle FFK \backsim \triangle HCK$

mithin $EF : FK = CH : CK$

oder umgestellt

II. $CK : FK = CH : EF$

rücksichtlich I. ist also

$CH : EF = AC : AG$

oder $CB + BH : BF + BE = AC : AG$

woraus $AG = AC\,\frac{BF - BE}{CB + BH}$

Nun ist $AG = tg\,(\alpha - \beta)$

$AC = CB = 1$

$BF = tg\,\alpha$

$BE = tg\,\beta$

und

$BH = BF \cdot tg\;BFH = BF \cdot tg\;BCD = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$

folglich $tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$ XLVI.

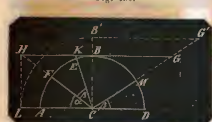
55. $arc\left(cot = \frac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta - 1}{cot\,\alpha + cot\,\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 490 $\angle ACF + FCE = \alpha + \beta$, beschreibt aus C mit dem

Halbmesser = 1 den Bogen *AFE* und vollendet den Halbkreis, errichtet den lothrechten Halbmesser *CB*, macht in dem zweiten Quadrant $\angle DCM = \beta$, errichtet in *B* auf *CB* das Loth $BH + BG$ bis in die Richtungen *CF* und *CM*, fällt das Loth *HL* auf die verlängerte *CA*, zeichnet aus *C* den Quadrant *LB'*, und zieht die mit *BG* parallele *B'G'* bis in die Richtung *CG*, verlängert *CE* bis *K* in *HG*

Fig. 490.



so hat man

$$\angle KHC = \angle GHC = \alpha$$
$$\angle KCH = \angle CGH = \beta$$

daher $\triangle KCH \sim \triangle CGH$

mithin $HK : HC = HC : HG$

woraus $HK \cdot HG = HC^2 = BH^2 + BC^2$ I.

Nun ist

$$HK \cdot HG = (HB - BK) \cdot HG$$
$$= HB \cdot HG - BK \cdot HG$$
$$= HB(HB + BG) - BK \cdot HG$$
$$= HB^2 + HB \cdot BG - BK \cdot HG$$

oder $HK \cdot HG = HB^2 + B'C \cdot BG - BK \cdot HG$

woraus in Verbindung mit Gl. I.

$$BH^2 + BC^2 = BH^2 + B'C \cdot BG - BK \cdot HG$$

woraus $BC^2 + BK \cdot HG = B'C \cdot BG$ II.

Nun ist $B'C : B'G' = BC : BG$

daher $B'C \cdot BG = B'G' \cdot BC$

folglich aus II:

$$BC^2 + BK \cdot HG = B'G' \cdot BC$$

oder umgestellt

$$BK \cdot HG = B'G' \cdot BC - BC^2$$

oder $BK \cdot HG = BC \cdot (B'G' - BC)$

oder $BK(BG + BH) = BC(B'G' - BC)$

woraus $BK = BC \dfrac{B'G' - BC}{BG + BH}$

Nun ist $BK = \cot(\alpha + \beta)$

$BC = 1$

$B'G' = B'C \cot CG'B' = B'C \cot \beta$

$= CL \cot \beta$

$= BH \cdot \cot \beta = \cot \alpha \cdot \cot \beta$

$BH = \cot \alpha$

$BG = \cot \beta$

folglich

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cos \alpha} \qquad \text{XLVII.}$$

56. $arc\left(\cot = \dfrac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha - \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 491 mit dem Halbmesser = 1 aus *C* den Halbkreis *ABD*, errichtet den lothrechten Halbmesser *CB*, zeichnet an dem horizontalen Halbmesser *AC* des ersten Quadrant den Centriwinkel $ACE = \alpha$, und an dessen zweiten Schenkel innerhalb α den Winkel $ECF = \beta$, und construirt im Uebrigen wie in Fig. 490, so hat man auch hier

$$\triangle HCK \sim \triangle HGC$$

daher $HK : HC = HC : HG$

und $HK \cdot HG = HC^2$

$= BH^2 + BC^2$

endlich $HK \cdot HG =$

$BH^2 + HB \cdot BG - BK \cdot HG$

daher

$$BH^2 + BC^2 = BH^2 + BH \cdot BG - BK \cdot HG$$

oder

$$BC^2 = BH \cdot BG - BK(BH + BG)$$

oder

$$BC^2 = BH \cdot BG - BH \cdot BK - BG \cdot BK$$

oder

$$BC^2 + BG \cdot BK = BH \cdot (BG - BK)$$

oder

$$BC^2 + BG \cdot CB' = BH(BG - BK)$$

Nun ist

$$CB' : B'G' = BC : BG$$

daher

$$BG \cdot CB' = BC : B'G'$$

folglich

$$BC^2 + BC \cdot B'G' = BH \cdot (BG - BK)$$

oder

$$BC \cdot (BC + B'G') = BH \cdot (BG - BK)$$

woraus $BH = BC \cdot \dfrac{B'G' + BC}{BG - BK}$

Nun ist $BH = \cot(\alpha - \beta)$

$BC = 1$

$B'G' = CB' \cdot \cot \beta = BH \cdot \cot \beta$

$= \cot \alpha \cdot \cot \beta$

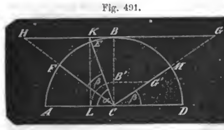
$BG = \cot \beta$

und $BK = \cot \alpha$

folglich

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha} \qquad \text{XLVIII.}$$

Fig. 491.



57. $arc\,[sin = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta\,(tg\ \alpha + tg\ \beta)]$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$ Denn zeichnet man Fig. 492 $\angle ACB + \angle BCD = \alpha + \beta$, aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen ABD, errichtet in B auf BC das Loth $BE + BF$ bis in die Richtungen CA und CD, zieht $DL \# FE$, fällt die Lothe DG und HK auf AC

Fig. 492.

so ist $\angle CHL = R = \angle CKH$

daher

$\angle CHK + \angle LHK = R = \angle CHK + HCK$

also $\quad \angle LHK = \angle HCK$

folglich $\quad LHK \sim \triangle HCK$

mithin $\quad CK : CH = HK : HL$

aber auch $\quad DG : DL = HK : HL$

folglich $\quad CK : CH = DG : DL$

ferner ist $\quad CH : CB = DL : EF$

folglich $\quad CK : CB = DG : EF$

oder $\quad CK : CB = DG : BE + BF$

woraus $\quad BE + BF = CB \cdot \dfrac{DG}{CK}$

Nun ist $BE = tg\ \alpha$

$BF = tg\ \beta$

$CB = 1$

$DG = sin\,(\alpha + \beta)$

und $\quad CK = CH \cdot cos\ \alpha = cos\ \beta \cdot cos\ \alpha$

folglich $tg\ \alpha + tg\ \beta = \dfrac{sin\ (\alpha+\beta)}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta}$ XLIX.

oder

$sin(\alpha+\beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta(tg\ \alpha + tg\ \beta)$

58. $arc[sin = cos\ \alpha \cdot cos\beta(tg\alpha - tg\beta)]$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha - \beta)$ Denn zeichnet man Fig. 493 $\angle ACD = \alpha$ und an einem Schenkel CD desselben innerhalb den $\angle DCB = \beta$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen ABD, errichtet in D auf CD das Loth DF bis in die Richtung CA, verlängert CB bis E in DF, zieht durch B die mit DF parallele GL, und fällt die Lothe BH und GK auf AC,

so hat man $\quad CB : CE = CG : CD$

ebenso $\quad CB : CE = BL : EF$

daher $\quad CG : CD = BL : EF$

Nun ist $\quad \triangle LBH \sim \triangle GCK$

daher $\quad CK : CG = BH : BL$

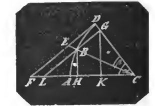
hierzu Gl. I. giebt

$CK : CD = BH : EF$

oder $\quad CK : CD = BH : DF - DE$

woraus $\quad DF - DE = CD \cdot \dfrac{BH}{CK}$

Fig. 493.



Nun ist $\quad DF = tg\ \alpha$

$DE = tg\ \alpha$

$CD = 1$

$BH = sin\,(\alpha - \beta)$

und $\quad CK = CG \cdot cos\ \alpha = cos\ \beta \cdot cos\ \alpha$

folglich ist $tg\ \alpha - tg\ \beta = \dfrac{sin(\alpha - \beta)}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta}$

oder

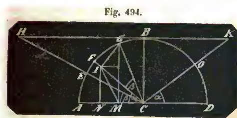
$sin\,(\alpha - \beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta\,(tg\ \alpha - tg\ \beta)$ L.

59. $arc\,[sin = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta(cot\ \alpha + cot\ \beta)]$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 494 aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Halbkreis ABD, errichtet den lothrechten Halbmesser CB, zieht durch B die mit AD parallele HK,

Fig. 494.



macht $\angle ACE$ im ersten Quadrant $= \beta$, $\angle DCO$ im zweiten Quadrant $= \alpha$, verlängert deren Schenkel CE und CO bis H und K in der parallelen HK, zeichnet im ersten Quadrant noch die $\angle ACF = \alpha$ und $FCG = \beta$, fällt das Loth GJ auf CF, die Lothe JN auf GM auf AC, das Loth JL auf GM und zieht JM,

so hat man $\angle CJL = \angle JCN = \alpha$

auch

$\angle CJL + \angle LJG = \angle JGL + \angle LJL = R$

daher $\angle CJL$ oder $\angle JCN = \angle JGL = \alpha$

hierzu $\angle CNJ = \angle GLJ = R$

daher $\triangle CNJ \sim \triangle GLJ$

mithin $CJ : NJ = GJ : LJ$

oder umgestellt $CJ : GJ = NJ : LJ$

oder $CJ : GJ = LM : LJ$

hierzu $\angle CJG = \angle JLM = R$

daher $\triangle CGJ \sim \triangle MJL$

folglich $\angle LMJ = \angle JCG = \beta$

auch war $\angle JGM = \alpha$

Nun ist $\angle BHC = \angle ACH = \beta$

und $\angle BKC = \angle DCK = \alpha$

folglich $\triangle CGJ \sim \triangle HKC$

daher $JL : GM = CB : HK$

oder $JL : GM = BC : BH + BK$

woraus $BH + BK = BC \cdot \dfrac{GM}{JL}$

Nun ist $BH = \cot\ \beta$

$BK = \cot\ \alpha$

$BC = 1$

$GM = \sin(\alpha + \beta)$

und $JL = GJ \cdot \sin JGL = GJ \cdot \sin\ \alpha$

$= \sin\ \beta \cdot \sin\ \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \text{folglich } \cot\ \alpha + \cot\ \beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\ \alpha \cdot \sin\ \beta} \\ \text{oder} \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\ \alpha \cdot \sin\ \beta(\cot\ \alpha + \cot\ \beta) \end{array}\right\} \text{LI.}$$

60. $arc\,[\sin = \sin\ \alpha \cdot \sin\ \beta(\cot\ \beta - \cot\ \alpha)]$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha - \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 495 mit dem Halbmesser $= 1$ den Quadrant ACB, macht $\angle ACE = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, errichtet in B auf BC das Loth BH, verlängert die Schenkel CD und CE bis H und K in BH, fällt die Lothe EF und KL auf AC, die Lothe EG und JF auf CD, und zieht aus F eine Parallele mit CD bis N in die verlängerte EG,

so hat man

$\angle GEM + \angle EMG$
$= \angle FCM + CMF = R$

da nun $\angle EMG = \angle CMF$

so ist $\angle GEM = FCM = \beta$

zugleich ist $\angle ENF = \angle CJF = R$

daher $\triangle ENF \sim \triangle CJF$

woher $EF : NF = NF : JF$

oder umgestellt

$JF : NF = CF : EF$

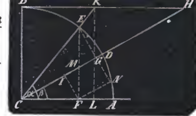
oder $NG : NF = CF : EF$

hierzu $\angle GNF = \angle CFE$

giebt $\triangle GNF \sim \triangle CFE \sim \triangle CLK$

mithin $\angle NGF = FCE = \alpha$

Fig. 495.



Nun ist $JF \parallel EG$

daher $\angle JFM = \angle GEM = \beta$

aber $\angle GFJ = \angle NGF = \alpha$

daher $\angle GFJ - \angle JFM = \alpha - \beta$

oder $\angle GFE = \alpha - \beta$

auch war $\angle GEF = \beta$

Da nun $\angle KCH = \alpha - \beta$

und $\angle KHC = \beta$

so ist $\triangle KHC \sim \triangle GFE$

folglich $HK : KC = EG : GF$

daher auch $KC : KL = GF : NF$

mithin $HK : KL = EG : NF$

oder $BH - BK : KL = EG : NF$

woraus $BH - BK = KL \cdot \dfrac{EG}{NF}$

Nun ist $BH = \cot\ \beta$

$$BK = \cot\alpha$$
$$KL = BC = 1$$
$$EG = \sin(\alpha-\beta)$$

und

$$NF = EF\cdot\sin NEF = EF\cdot\sin\beta = \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

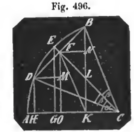
$$\left.\begin{array}{l}\text{folglich}\quad \cot\beta-\cot\alpha=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\\ \text{oder}\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\sin\beta\,(\cot\beta-\cot\alpha)\end{array}\right\}\ \text{LII.}$$

61. $arc\left(\sin=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha+\beta)$

Denn zeichnet man Fig. 496 $\angle ACE = \alpha$, setzt an den Schenkel CE innerhalb und auſserhalb des Winkels die $\angle ECB$ und ECD, jeder $=\beta$, so daſs also $\angle ACB = (\alpha+\beta)$ und $\angle ACD = (\alpha-\beta)$. Beschreibt aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen $ADEB$, zieht die Sehne BD, fällt die Lothe DH, EG, FO und BK auf AC, das Loth FN auf BK, und zieht FK

Fig. 496.



so ist	$\angle FLB = \angle KLC$
hierzu	$\angle BFL = R = \angle CKL$
daher	$\triangle FLB \sim \triangle KLC$
mithin	$LC : LK = LB : LF$

oder umgestellt

$$LC : LB = LK : LF$$

zugleich	$\angle BLC = \angle FLK$
daher	$\triangle FLK \sim \triangle BLC$
mithin	$\angle FKL = \angle BCL = \beta$
folglich auch	$\angle KFO = \beta = \angle BCF$
hierzu	$\angle FOK = R = \angle CFB$
daher	$\triangle FKO \sim \triangle CBF$
und	$FK : FD = CB : CF$
oder	$FK : FO = CE : CF$

Nun ist auch

$$EG : FO = CE : CF$$

folglich	$EG = FK$
daher auch	$EG^2 = FK^2$
oder	$EG^2 = FO^2 + FN^2$
hiervon	$BF^2 = BF^2$
bleibt	$EG^2 - BF^2 = FO^2 + FN^2 - BF^2$

$$= FO^2 - (BF^2 - FN^2)$$
$$= FO^2 - BN^2$$

oder $EG^2 - BF^2 = (FO + BN)(FO - BN)$

Fällt man nun das Loth DM auf FO, so ist $\triangle FDM \cong \triangle BFN$, daher $FM = BN$ folglich ist

$$EG^2 - BF^2 = (FO + BN)(FO - FM)$$

oder $EG^2 - BF^2 = BK \times DH$

Nun ist $EG = \sin\alpha$

$$BF = \sin\beta$$
$$BK = \sin(\alpha+\beta)$$

und $DH = \sin(\alpha-\beta)$

daher hat man

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)\\ \text{oder}\\ \sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\end{array}\right\}\ \text{LIII.}$$

62. $arc\left(\sin=\dfrac{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha+\beta)$

Denn es ist No. 61, Fig. 496 bewiesen, daſs $EG^2 - BF^2 = BK \times DH$

Nun ist $EG^2 - BF^2 = CE^2 - CG^2 - BF^2$

$$= CB^2 - BF^2 - CG^2$$
$$= CF^2 - CG^2$$

daher ist auch $CF^2 - CG^2 = BK\cdot DH$

Nun ist $CF = \cos\beta$

$$CG = \cos\alpha$$
$$DK\cdot DH = \sin(\alpha+\beta)\ \sin(\alpha-\beta)$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\beta-\cos^2\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)\\ \text{oder}\\ \sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\end{array}\right\}\ \text{LIV.}$$

63. $arc\left(\cos=\dfrac{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}\right)$ zu zeichnen.

Denn es ist in No. 61 mit Fig. 496 bewiesen, daſs

$$EG = FK$$

daher ist auch

$$EG^2 = FK^2 = OF^2 + OK^2$$

dies abgezogen von

$$CF^2 = CF^2$$

bleibt $CF^2 - EG^2 = CF^2 - OF^2 - OK^2$

$$= CO^2 - OK^2$$

oder	$CF^2 - EG^2 = (CO - OK)(CO + OK)$
da nun	$DF = BF$
so ist auch	$DM = FN$
oder	$OH = OK$

mithin ist $CO + OK = CO + OH = CH$
und da zugleich
$$CO - OK = CK$$
so hat man $CF^2 - EG^2 = CK \cdot CH$

Nun ist $CF = \cos\beta$
$EG = \sin\alpha$
$CK = \cos(\alpha + \beta)$
und $CH = \cos(\alpha - \beta)$

daher ist
$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)\\ \text{oder}\\ \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}\end{array}\right\}\text{LV.}$$

64. $arc\left(\cos = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\right)$
zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$

Denn in Fig. 496 hat man
$$EG^2 = CE^2 - CG^2$$
oder $EG^2 = CB^2 - CG^2$
dies abgezogen von
$$CF^2 = CF^2$$
bleibt $CF^2 - EG^2 = CF^2 - (CB^2 - CG^2)$
$$= CG^2 - (CB^2 - CF^2)$$
oder $CF^2 - EG^2 = CG^2 - BF^2$

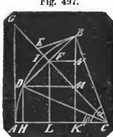
Nun ist nach No. 59:
$$CF^2 - EG^2 = CK \times CH$$
folglich ist
$$CG^2 - BF^2 = CK \times CH$$
Nun ist $CG = \cos\alpha$
$BF = \sin\beta$
und $CK \times CH = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$
folglich ist
$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)\\ \text{oder}\\ \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\end{array}\right\}\text{LVI}$$

65. $arc\left(tg = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)$
zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{\alpha+\beta}{2}$

Denn zeichnet man Fig. 497 $\angle ACB = \alpha$, an einen Schenkel AC den $\angle ACD = \beta$ innerhalb α, so dafs $\angle BCD = \alpha - \beta$, halbirt $\angle BCD$ durch CG, errichtet in A das Loth AG auf AC, beschreibt mit dem Halbmesser = 1 den Bogen $ADJB$, zieht die Sehne BD, und fällt die Lothe DH, FL und BK auf AC, so ist
$$AG : AC = LF : LC$$
Nun ist $DF = BF$
folglich $LF = \frac{1}{2}(DH + BK)$
ebenso ist $LH = LK$
da nun $LC = CK + LK$
und auch $LC = CH - LH$
so ist $2LC = CK + CH$
also $LC = \frac{1}{2}(CK + CH)$

Fig. 497.



Daher verwandelt sich die obige Proportion in
$$AG : AC = \tfrac{1}{2}(DH + BK) : \tfrac{1}{2}(CK + CH)$$
oder $AG : AC = DH + BK : CK + CH$
woraus $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{DH + BK}{CK + CH}$

Nun ist $DH = \sin\beta$, $BK = \sin\alpha$
$CK = \cos\alpha$, $CH = \cos\beta$
$$AG = tg\ ACJ = tg\,(ACD + DCJ)$$
$$= tg\left(\beta + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$= tg\ \frac{\alpha+\beta}{2}$$
und $AC = 1$
folglich hat man
$$tg\ \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} \qquad \text{LVII.}$$

66. $arc\left(tg = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)$
zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{\alpha-\beta}{2}$

Denn zeichnet man Fig. 497 noch die Tangente BE bis in die Richtung CG, fällt die Normalen FN und DM auf BK so hat man $\angle NFL = R = \angle BFC$
hiervon $\angle NFC = \angle NFC$
bleibt $\angle CFL = \angle BFN$
da nun zugleich
$$\angle BNF = R = \angle CLF$$
so ist $\triangle BNF \sim \triangle CLF$
daher $BF : BN = DF : CL$
oder umgestellt
$$BF : CF = BN : CL$$
Nun ist $\angle BFC = R = \angle EBC$
$$\angle BCF = \angle ECB$$

daher $\triangle BCF \sim \triangle ECB$

hieraus $BF : CF = BE : BC$

daher auch $BE : BC = BN : CL$

Nun ist $BF = \frac{1}{2} BD$

daher auch $BN = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2}(BK - DH)$

und nach No. 65 $CL = \frac{1}{2}(CK + CH)$

daher $BE : BC = \frac{1}{2}(BK - DH) : \frac{1}{2}(CK + CH)$

woraus $\frac{BE}{BC} = \frac{BK - DH}{CK + CH}$

Nun ist $BE = tg\ BCJ = tg\ \frac{\alpha - \beta}{2}$

$BK = sin\ \alpha,\ DH = sin\ \beta$

$CK = cos\ \alpha,\ CH = cos\ \beta$

und $BC = 1$

folglich $tg\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{sin\ \alpha - sin\ \beta}{cos\ \alpha + cos\ \beta}$ LVIII.

67. $arc\left(tg = \frac{cos\ \beta - cos\ \alpha}{sin\ \alpha + sin\ \beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{\alpha - \beta}{2}$

Denn in Fig. 497 hat man CF lothrecht mit BD, FL lothrecht mit DM und CL lothrecht mit BM

daher ist $\triangle FCL \sim \triangle BDM$

mithin $CL : FL = BM : DM$

oder umgestellt

$CL : BM = FL : DM$

daher auch

$2CL : BM = 2FL : HK$

oder

$CK + CH : BK - DH = BK + DH : CH - CK$

oder $\frac{BK - DH}{CK + CH} = \frac{CH - CK}{BK + DH}$

Nun ist No 66 bewiesen, daſs $\frac{BK - DH}{CK + CH} = \frac{BE}{BC}$

daher ist auch $\frac{CH - CK}{BK + DH} = \frac{BE}{BC}$

Nun ist $CH = cos\ \beta$, $CK = cos\ \alpha$

$DH = sin\ \beta$, $BK = sin\ \alpha$

$BE = tg\ \frac{\alpha - \beta}{2}$ und $BC = 1$

folglich $tg\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{cos\ \beta - cos\ \alpha}{sin\ \alpha + sin\ \beta}$ LIX.

68. $arc\left(tg = \frac{cos\ \beta - cos\ \alpha}{sin\ \alpha - sin\ \beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{\alpha + \beta}{2}$

Denn es ist Fig. 497

$BK^2 = BC^2 - CK^2$

und $DH^2 = DC^2 - CH^2$

daher $BK^2 - DH^2 = CH^2 - CK^2$

oder

$(BK + DH)(BK - DH) = (CH + CK)(CH - CK)$

woraus

$BK + DH : CH + CK = CH - CK : BK - DH$

oder $\frac{BK + DH}{CK + CH} = \frac{CH - CK}{BK - DH}$

Nun ist nach No. 65

$\frac{BK + DH}{CK + CH} = \frac{AG}{AC} = tg\ \frac{\alpha + \beta}{2}$

daher ist auch

$\frac{CH - CK}{BK - DH} = tg\ \frac{\alpha + \beta}{2}$

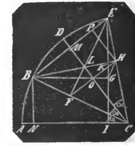
oder $tg\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{cos\ \beta - cos\ \alpha}{sin\ \alpha - sin\ \beta}$ LX.

69. $arc\ (sin = 3\, sin\ \alpha - 4\, sin\ {}^3\alpha)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen 3α

Denn zeichnet man Fig. 498 $\angle ACE = 3\alpha$, theilt ihn durch die geraden Linien

Fig. 498.



BC und DC in 3 gleiche Theile, so daſs $\angle ACB = \angle BCD = \angle DCE = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen $ABDE$, fällt die Lothe BN und EJ auf AC, zieht die Sehne BE, fällt die Lothe BH auf CE, BG auf EJ und EF auf BC, verbindet F mit H und G mit H, so ist

$EM = BM$

ferner

$\angle EFB = \angle BHE = R = \angle EMC = \angle BMC$

und

$\angle EBF = \angle BEH \quad = \angle MEC = \angle MBC$

daher

$\triangle EBF \cong \triangle BEH \sim \triangle MEC \cong \triangle MBC$

mithin $\angle BEF = \angle EBH = \angle MCB = \alpha$

daher $EL = BL$

folglich liegt der Durchschnitt L von EF und BH in CD

Da nun $EF = BH$

so ist auch $EF - EL = BH - BL$

oder $LF = LH$

zugleich ist $\angle ELB = \angle HLF$
also $\triangle ELB \sim \triangle HLF$
also $BE \,\#\, FH$
und $\angle EFH = \angle BEF = \alpha$

Nun ist $\angle CEM = 90 - \alpha$
hiervon $\angle CEJ = 90 - 3\alpha$
bleibt $\angle JEM = 2\alpha$
auch war $\angle FEM = \alpha$
daher ist auch
$\angle FEK = \alpha$
aber auch $\angle EFK = \alpha$
mithin $EK = FK$ I.
zugleich ist $\triangle EKF \sim \triangle ELB$
daher $EK : EF = EL : EB$
oder umgestellt
$EK : EL = EF : EB$ II.

Nun ist $\angle ELH = \angle LFH + \angle LHF = 2\alpha$
daher $\angle ELH = \angle BEG$
zugleich ist $\angle EHL = \angle BGE = R$
daher $\triangle EHL \sim \triangle BGE$
woraus $EL : EH = BE : BG$
hierzu II. $EK : EL = EF : BE$
giebt $EK : EH = EF : BG$
oder $EK : EH = BH : BG$
da nun $\angle HEK = R - 3\alpha$
und $\angle GBH = R - (\angle GEB + \angle EBL) = R - 3\alpha$
also $\angle HEK = \angle GBH$
so ist $\triangle HEK \sim \triangle GBH$
woraus $\angle EHK = \angle BGH$
hiervon $\angle EHB = \angle BGK = R$
bleibt $\angle BHK = \angle KGH$
also auch $\angle EFK = \angle KGH$
oder auch $\angle FEG = \angle HGE$
daher $FF \,\#\, GH$
woher $\angle GHK = \angle EFK$
daher auch $\angle GHK = \angle HGK$
folglich $GK = HK$
hierzu I. $EK = FK$
giebt $EG = FH$

Nun $FH = 2HO$, oder wenn man das Loth HP auf BE fällt, $FH = 2MP = 2(ME - EP)$. Aber $ME = \sin \alpha$, und $EP = HE \cdot \sin EHP = HE \cdot \sin ECD = HE \cdot \sin \alpha = BE \cdot \sin EBH \sin \alpha = BE \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha = BE \cdot \sin^2 \alpha = 2ME \cdot \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 2 \sin^3 \alpha$
daher ist
$FH = 2(\sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha) = 2 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
also auch $EG = 2 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
hierzu $GJ = BN = \sin^3 \alpha$
giebt $EJ = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

Nun ist $EJ = \sin(3\alpha)$
folglich hat man
$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

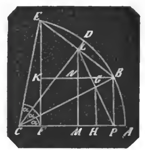
70. $arc\ (\cos = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen 3α.

Denn zeichnet man Fig. 499 $\angle ACE = 3\alpha$, theilt ihn durch die geraden Linien BC und DC in 3 gleiche Theile, so dafs $\angle ACB = \angle BCD = \angle DCE = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser = 1 den Bogen $ABDE$, zieht die Sehne BE, fällt die Lothe BP und EF auf AC, zieht LP so hat man

$\angle LBC = R - \alpha = \angle PBC$
hierzu $BG = BG$
und $BL = BP$
folglich $\triangle BGL \sim \triangle BGP$
mithin $\angle BGL = \angle BGP = R$
und $GL = GP$

Fig. 499.



Fällt man nun die Lothe GH und LM auf AC, und das Loth BK auf EF
so ist $PG : PL = PH : PM$
da nun $PL = 2PH$
so ist auch $PM = 2PH$
Ebenso ist
$BL : BE = BN : BK$
und da $BE = 2BL$
auch $BK = 2BN$
oder $PF = 2PM = 4PH$
daher $3PH = HF$
also $3PH + 3HF = 4HF$
oder $3PF = 4HF = 4CH - 4CF$
oder $3PF + 4CF = 4CH$
oder
$3PF + 3CF + CF = 4CH$
oder $3CP + CF = 4CH$
oder $CF = 4CH - 3CP$

Nun ist $CF = cos\,(3\alpha)$

$$CH = CG \cdot cos\,\alpha = CP \cdot cos\,\alpha \cdot cos\,\alpha = CP \cdot cos^2\alpha = cos\,\alpha \cdot cos^2\alpha = cos^3\alpha$$

$$CP = cos\,\alpha$$

daher ist $cos\,(3\alpha) = 4\,cos^3\alpha - 3\,cos\,\alpha$

Vergl. noch den Art.: Analytische Trigonometrie, pag. 71.

Construction geometrischer Formeln ist in dem Art.: Analytische Geometrie, pag. 68, abgehandelt.

Construction der Gleichungen ist die Auffindung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung mit Hülfe geometrischer Constructionen, indem die Elemente der Gleichung als gerade Linien aufgetragen werden. Diese Methode der Auflösung von Gleichungen hat gegenwärtig und überhaupt seit der Zeit, dafs man in der Algebra ein bei weitem einfacheres und übersichtlicheres Mittel dazu gefunden hat, keinen anderen Werth mehr als den geschichtlichen, weshalb auch nur davon folgende kurze Erläuterungen:

Eine Gl. des ersten Grades hat die Form:

$$x \pm a = 0$$

woraus $x = \mp a$

Es ist also bei dieser Gleichung nichts anders zu construiren, als dafs man die Zahl a als gerade Linie aufträgt.

Eine Gleichung vom 2ten Grade hat zwei Wurzeln, vom $n$ten Grade n Wurzeln, und diese Wurzeln ergeben sich als die Ordinaten der Durchschnittspunkte zweier sich schneidenden Linien. Für eine Gleichung des 2ten Grades genügt also eine gerade Linie und ein Kreis, weil hier zwei Durchschnittspunkte entstehen. Für eine Gleichung vom dritten Grade ist schon ein Kreis mit einer anderen Curve erforderlich, weil 3 Durchschnittspunkte verlangt werden, also z. B. Kreis und Parabel, die zugleich vom 4ten Grade genügen, weil beide Curven auch vier Durchschnittspunkte liefern können, wiewohl auch für diese 2 Parabeln, Parabel und Ellipse, Kreis und Ellipse u. s. w. gewählt werden können.

Um die Methode anschaulich zu machen, sei als Beispiel die quadratische Gleichung zu construiren

$$x^2 + ax \pm bc = 0$$

in welcher x, a, b, c gerade Linien sind. Aus diesem Grunde kann das bekannte Glied nicht durch nur einen Buchstaben bezeichnet werden, weil es dann Linie, und mit den ersten beiden Gliedern, welche Flächen sind, nicht zu addiren sein würde.

Für diese Gleichung, je nach den Vorzeichen, genügen zwei Constructionen, Fig. 500 und 501, und zwar

Fig. 500.

Fig. 500 für die beiden Gleichungen

$$x^2 + ax + bc = 0$$
$$x^2 - ax + bc = 0$$

Fig. 501.

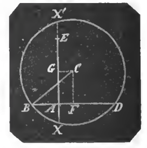


Fig. 501 für die beiden Gleichungen

$$x^2 - ax - bc = 0$$
$$x^2 + ax - bc = 0$$

Man nimmt 2 gerade unter einem beliebigen, hier unter einem rechten Winkel sich schneidende Linien AD und AE, den einen Schenkel, z. B. AE macht man = dem Coefficienten a von x, den anderen AD = dem einen Factor z. B. c des bekannten Gliedes, und nimmt auf demselben Schenkel von A aus AB = dem zweiten Factor b, und zwar in Fig. 500 nach einerlei Richtung mit c, in Fig. 501 nach entgegengesetzter Richtung; in beiden Figuren halbirt man BD in F, und AE in G, und beschreibt mit BC aus C den Kreis, so sind die Ordinaten AX und AX' die Wurzeln der Gleichung.

Denn es ist $AX \times AX' = AB \times AD$

oder $AX \times AX' = bc$

Setzt man nun $AX = x$, so ist Fig. 500

$AX' = AE - EX' = AE - AX = a - x$

in Fig. 501

$AX' = AE + EX' = AE + AX = a + x$

Setzt man $AX' = x$, so ist in Fig. 500

$AX = AE - EX = AE - AX' = a - x$

in Fig. 501

$AX = EX - AE = AX' - AE = x - a$

Man hat also in Fig. 500 die Producte:

$$AX \times AX' = \begin{cases} x(a-x) = bc \\ x(a-x) = bc \end{cases}$$

oder $(-x)$ für x gesetzt

$$(-x)(a+x) = bc$$

in Fig. 501

$$AX \times AX' = \begin{cases} x(a+x) = bc \\ x(a-x) = bc \end{cases}$$

Diese 4 Gleichungen auf 0 reducirt und geordnet geben

Fig. 500: $x^2 - ax + bc = 0$ (1)

$x^2 + ax + bc = 0$ (2)

Fig. 501: $x^2 + ax - bc = 0$ (3)

$x^2 - ax - bc = 0$ (4)

woher mit den beiden Constructionen alle 4 Formen erledigt sind.

Aus dem Art.: Algebraische Gleichungen, pag. 49, ist zu ersehen, dafs Gl. 1 zwei positive, Gl. 2 zwei negative Wurzeln hat, und dafs Gl. 3 und 4 eine positive und eine negative Wurzel haben. Daher sind in Fig. 500 beide Wurzeln AX und AX' entweder beide positiv, oder beide negativ; in Fig. 501 ist für die 3te Gl. die kleinere Wurzel AX positiv, die gröfsere AX' negativ; für die 4te Gl. ist die gröfsere AX' positiv, die kleinere AX negativ, wie aus der Entwickelung der beiden letzten Gleichungen augenscheinlich hervorgeht.

Wenn Fig. 500 $CG = CB$ ist, so berührt der Kreis die Linie AE in G, und es giebt nur eine, d. h. 2 gleiche Wurzeln. Es ist

$$CG = AF = AB + BF = b + \frac{c-b}{2} = \frac{c+b}{2}$$

$$CB = \sqrt{CF^2 + BF^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$$

also es giebt 2 gleiche Wurzeln, wenn

$$\frac{c+b}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$$

oder wenn $\frac{a^2}{4} = bc$

dies giebt auch die Algebra. Denn setzt man $\frac{a^2}{4}$ für bc, so hat man

Gl. 1 u. 2: $x^2 \mp ax + \frac{a^2}{4} = 0$

woraus $x \mp \frac{a}{2} = 0$

Wird $CG > BC$

also $\frac{c+b}{2} > \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$

oder $\frac{a^2}{4} < bc$

so entsteht kein Durchschnittspunkt in AE, und beide Wurzeln sind unmöglich, wie auch die Algebra giebt. Denn setzt man

$$x \mp ax + \frac{a^2}{4} + p$$

so erhält man

$$x = \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - p}$$

$$= \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{-p}$$

In Fig. 501 ist es weder möglich, dafs der Kreis die Linie AE berührt, noch dafs er dieselbe nicht schneidet. Daher auch für die beiden letzten Gleichungen weder 2 gleiche, noch 2 unmögliche Wurzeln entstehen können. Die Algebra beweist dies gleichfalls, denn beide Gleichungen

$$x \pm ax - bc = 0$$

giebt $x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{4} + bc}$

so dafs nur für $bc = 0$, also wenn $x^2 \pm ax = 0$ oder $x \pm a = 0$ nicht zwei gleiche, sondern nur eine Wurzel entsteht, unmögliche Wurzeln aber wegen der immer positiven $\sqrt{\ }$ nicht existiren können.

Construction der Werthe einer Gleichung. Setzt man in einer geordneten auf Null reducirten Gleichung für die Unbekannte eine der Wurzeln der Gleichung, so geschieht der Gleichung Genüge, deren Werth ist = Null. Setzt man für die Unbekannte irgend eine andere Zahl, so ist die algebraische Summe der Glieder nicht = Null, sondern eine bestimmte Zahl, welche der jedesmalige Werth der Gleichung genannt wird.

Nimmt man von einem Anfangspunkt A einer geraden Linie eine Reihe von Werthen für die Unbekannte (x) als Abscissen, die positiven nach einer, die negativen nach der entgegengesetzten Richtung, und trägt die jedesmaligen Werthe der Gleichung als Ordinaten auf, so erhält man aus der Verbindung der Endpunkte dieser Ordinaten in einer Curve die graphische Darstellung der Natur dieser Gleichung.

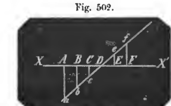
Für jede Gleichung des ersten Grades wird die dieselbe darstellende Curve eine gerade Linie. Z. B. die Gl. $x - 3 = 0$.

Ist Fig. 502 XX' die Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Abscissen, $AB =$

$BC = CD = DE$ u. s. w. $= 1$, so entsteht für $x = 0$ in A die Ordinate $Aa = -3$ als Werth der Gleichung. Für $x = AB = 1$ entsteht die Ord. $Bb = -2$; für $x = AC = -2$ die Ord. $Cc = -1$; für $x = AD = 3$ die Ord. in $D = 0$; für $x = AE = 4$ die Ord. $Ee = +1$ u. s. w.; die zusammengezogene Curve $a\,b\,c\,D\,e\ldots$ ist eine gerade Linie.

Für Gleichungen des zweiten Grades mögen folgende Beispiele genügen; w bedeutet den jedesmaligen Werth der Gl.

Fig. 502.

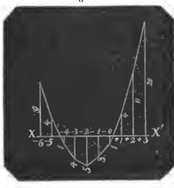


$x^2 + 4x - 1 = 0$

Für	$x = 0$	ist	$W = -1$
	$= +1$	„	$W = +4$
	$= +2$	„	$W = +11$
	$= +3$	„	$W = +20$
u. s. w.			
Für	$x = -1$	„	$W = -3$
	$= -2$	„	$W = -5$
	$= -3$	„	$W = -4$
	$= -4$	„	$W = -1$
	$= -5$	„	$W = +4$
	$= -6$	„	$W = +9$

Man erhält in Fig. 503 die Zeichnung der Gleichung als Curve, wobei zu bemerken, dafs die Höhen mit dem halben Längenmafsstab aufgetragen sind.

Fig. 503.



Die Durchschnittspunkte der Curve mit XX' geben den Ort der Wurzeln an, sie liegen für x zwischen 0 und 1, nahe an 0, und für x zwischen -4 und -5, näher an -4. Es könnte diese Methode als eine praktische Auflösung von Gleichungen angesehen werden, wenn man nicht bei einiger Uebung noch leichter durch Rechnung dazu gelangte, und nicht nur bei den quadratischen, sondern auch bei Gleichungen von höheren Graden, wie dies schon der Art.: Algebraische Gleichung, pag. 57 bis 60 nachweist.

Um den Charakter der Curven näher einzusehen, sollen noch 2 Gleichungen construirt werden, eine mit 2 gleichen, und eine mit 2 unmöglichen Wurzeln.

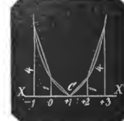
1. Die Gl. $x^2 - 2x + 1 = 0$
d. i. $(x - 1)^2 = 0$

Die beiden Wurzeln sind $+1$ und $+1$.
Für $x = +1$; $w = 0$

„	$x = +2$; $w = +1$	$x = 0$; $w = +1$
„	$x = +3$; $w = +4$	$x = -1$; $w = +4$
„	$x = +4$; $w = +9$	$x = -2$; $w = +9$
	u. s. w.	u. s. w.

Aus dieser Darstellung ersieht man die Symmetrie der Curve von der Abscisse $(+1)$ an zu beiden Seiten durch gleich grofse Ordinaten, folglich wie Fig. 504; der Durchschnittspunkt C für die beiden gleichen Wurzeln wird Berührungspunkt mit der Abscissenlinie XX'.

Fig. 504.



2. Die Gl. $x^2 - x + 4 = 0$
Wurzeln $\frac{1}{2}(+1 + \sqrt{-15})$
und $\frac{1}{2}(+1 - \sqrt{-15})$
beide unmöglich.

$x = +1$; $w = +4$	$x = 0$; $w = +4$
$x = +2$; $w = +6$	$x = -1$; $w = +6$
$x = +3$; $w = +10$	$x = -2$; $w = +10$
$x = +4$; $w = +16$	$x = -3$; $w = +16$
u. s. w.	u. s. w.

Auch hier sieht man die Symmetrie zweier Aeste der Curve von einem Punkt zwischen den Abscissen = 0 und = + 1. Der Punkt für das Minimum der Ordinate ist für $x = \frac{1}{2}$, wo die Ordinate = $3\frac{3}{4}$ wird; man erhält die Darstellung Fig. 505.

Die Curve hat also keinen Durchschnittspunkt mit der Abscissenlinie XX'.

So viele Wurzeln eine Gleichung hat, so viele Durchschnittspunkte hat die Curve mit der Abscissenlinie mit Ausnahme zweier gleicher Wurzeln, wo ein Berührungspunkt wie Fig. 504, und einer unmöglichen Wurzel, wo nur ein der Abscisse näherer Punkt, wie Fig. 505 entsteht.

Fig. 505.



Zum Schlufs des Art. soll die Curve der Gleichung, Bd. 1, pag. 57, Z. 1 rechts construirt werden, nämlich

$$x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$$

deren Wurzeln sind dort gefunden.

$+3; +3; -3; +\sqrt{-1}; -\sqrt{-1}$

die Gl. hat also 2 gleiche und 2 unmögliche Wurzeln.

Für $x = 0$ ist $w = +27$

$x = +1$ „ $w = +32$

$x = +2$ „ $w = +25$

$x = +3$ „ $w = 0$

$x = +4$ „ $w = +119$

Man ersieht, dafs die beiden Ordinaten links und rechts in Entfernung 1 von dem Endpunkt der Abscisse $x = +3$ positiv sind. Dafs dies übrigens in noch so kleinen Entfernungen von derselben Ordinate stattfindet, dafs also der Abscissenpunkt + 3 ein Berührungspunkt für die 2 gleichen Wurzeln + 3 ist, erhellt, wenn man in die Gleichung für x den Werth $(3 \pm n)$ setzt. Man erhält als Werth die Gleichung

für $x = 3 + n$;

$$w = n^2(60 + 46n + 12n^2 + n^3)$$

für $x = 3 - n$;

$$w = n^2(60 - 46n + 12n^2 - n^3)$$

Setzt man nun für n eine noch so kleine positive ächt gebrochene Zahl, so wird jede noch so nahe an $x = 3$ rechts befindliche Ordinate der Abscisse $= 3 + n$ positiv; und da man mit n auch $46n + n^3$ gegen die Zahl 60 beliebig klein machen kann, ebenso die beliebig an $x = +3$ links befindliche Ordinate für $x = 3 - n$ ebenfalls positiv; für $n = 1$ wird

$$w = n^2(60 + 46n + 12n^2 + n^3) = +119$$

und $w = n^2(60 - 46n + 12n^2 - n^3) = + 25$ wie oben berechnet worden. Die Curve berührt also die Abscissenlinie in dem Punkt, der von dem Nullpunkt + 3 entfernt ist, ein charakteristisches Zeichen, dafs (+ 3) zweimal als Wurzel vorhanden ist.

Für $x = 0$ war $w = +27$

$x = -1$ ist $w = +64$

$x = -2$ „ $w = +125$

$x = -3$ „ $w = 0$

$x = -4$ „ $w = -833$.

Von $x = 0$ bis $x = (-2)$ steigen die positiven Ordinaten bis + 125, und für $x = (-3)$ wird die Ordinate plötzlich = 0, ein Beweis, dafs zwischen den Abscissen (− 1) und (− 3) die Curve eine Abnormität in der Form erfährt; dafs die folgende Ordinate negativ ist beweist, dafs der Punkt der Abscissenlinie (− 3) vom Nullpunkt entfernt, ein Durchschnittspunkt mit der Curve ist, und dafs somit die $\sqrt{-3}$ nur einmal als Wurzel vorkommt.

Um die Form der Curve von der Abscisse (− 3) ab nach (− 4) hin summarisch festzustellen, soll der Werth der Gleichung für $x = -(3 + n)$ ermittelt worden. Man erhält

für $x = -(3 + n)$;

$$w = -(360n + 336n^2 + 118n^3 + 18n^4 + n^5)$$

So klein und so grofs man also n immer nehmen mag, die Ordinate bleibt negativ, und wächst mit dem Zuwachs von n, so dafs die Curve von $x = -3$ ab und weiter (−) genommen, weder eine Abnormität noch einen Durchschnittspunkt mit der Abscissenlinie XX' erfährt, so dafs also hinter der Abscisse $x = -3$ die Gleichung weder mögliche, noch unmögliche Wurzeln hat. Für $n = 1$, also $x = (-4)$ entsteht $w = -833$.

Aus dem obigen Werth

für $x = (3 + n)$;

$$w = n^2(60 + 46n + 12n^2 + n^3$$

geht dasselbe für die von $x = +3$ ab genommene positive Richtung hervor, so dafs die noch fehlenden Wurzeln zwischen den Abscissen $x = (-1)$ und $x = (-3)$ liegen.

Für die Untersuchung der Curve zwi-

schen $x = (-2)$ und $x = (-3)$ hat man $x = -(3 - n)$ gesetzt:

$$w = +360n - 336n^2 + 118n^3 - 18n^4 + n^5$$

für $x = -(2 + m)$ gesetzt:

$$w = 125 + 25m - 80m^2 - 56m^3 - 13m^4 - m^5$$

An beiden Formeln hat man also gegenseitige Correctionsrechnungen beim Probiren. Man erhält:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } & x = -\left(3 - \frac{1}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{9}{10}\right) & \text{ist } w = 32{,}75621 \\
\text{„} & x = -\left(3 - \frac{2}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{8}{10}\right) & \text{ist } w = 59{,}47552 \\
\text{„} & x = -\left(3 - \frac{3}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{7}{10}\right) & \text{ist } w = 80{,}80263 \\
\text{„} & x = -\left(3 - \frac{4}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{6}{10}\right) & \text{ist } w = 97{,}34144 \\
\text{„} & x = -\left(3 - \frac{5}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{5}{10}\right) & \text{ist } w = 109{,}65625 \\
\text{„} & x = -\left(3 - \frac{6}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{4}{10}\right) & \text{ist } w = 118{,}27296 \\
\text{„} & x = -\left(3 - \frac{7}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{3}{10}\right) & \text{ist } w = 123{,}68027 \\
\text{„} & x = -\left(3 - \frac{8}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{2}{10}\right) & \text{ist } w = 126{,}33088 \\
\text{„} & x = -\left(3 - \frac{9}{10}\right) & \text{oder} = -\left(2 + \frac{1}{10}\right) & \text{ist } w = 126{,}64269 \\
\text{„} & x = -2 & = -\ 2 & \text{„ } w = 125{,}00000
\end{array}$$

folglich ist in der Nähe der Abscisse $x = -2{,}1$ das Maximum der Ordinate und der Ort für die beiden unmöglichen Wurzeln. Die Curve selbst ist leicht aufzutragen.

Constructionssätze sind in der Geometrie Sätze, welche eine Construction verlangen; diese sind der Forderungssatz (Postulat) und die Aufgabe (Problem) (s. d.). Die Aufgabe verlangt Constructionen, die sich aus Erkenntnissen, die durch Lehrsätze gewonnen worden, sich ausführen lassen; der Forderungssatz verlangt nur solche Construction, die einer Definition gemäfs vollführt werden kann. Als: zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie ziehen; aus einem gegebenen Punkt mit gegebenem Halbmesser einen Kreis beschreiben.

Continuirlich, stetig, ist so zusammenhangend, dafs keine Theile wahrzunehmen sind, die nur durch den Gedanken abgetheilt werden können. Stetige Gröfsen sind ausschliefslich die der Zeit und des Raumes. Eine Linie, Raumlinie oder Zeitlinie, ist ein Continuum, sie kann nur durch den Gedanken unterbrochen werden, ohne dafs also ihre Continuität gestört wird; dieselbe Linie kann durch den Gedanken in 2 Orten unterbrochen werden; es entsteht eine durch Anfang und Ende begrenzte Linie. Zeitlinien und Raumlinien unterscheiden sich erstens dadurch, dafs jene in einerlei Richtung, dafs sie eine gerade Linie bleibt, während die Raumlinie beliebige Formen annehmen kann, von denen die in sich geschlossenen Linien als Kreis, Ellipse, Continua zweiter Ordnung bilden, nämlich bestimmte Längen ohne Anfang und Ende.

Zweitens unterscheiden sich Zeit- und Raumlinie darin, dafs diese das Vermögen der Ortsänderung hat, welche jene nicht hat; der Zeitlinie vermag Niemand auszuweichen, wohl aber der Raumlinie, und während der Ortsänderung bildet die Raumlinie eine continuirliche Raumgröfse zweiter Klasse, die Fläche, von denen wieder die in sich geschlossenen Flächen als die Oberfläche einer Kugel, eines Ellipsoids Continua zweiter Ordnung, Flächen von bestimmter Gröfse ohne Anfang und Ende sind. Ein Winkel wird gebildet durch 2 Linien, durch 2 continuirliche Grössen, die den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt zu ihrem gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, und entweder in Endpunkten begrenzt, oder unendlich weit fortgehen können.

Die Bewegung, welche zugleich der Zeit und dem Raume angehört, ist ebenso

ein Continuum, und wenn sie noch so kurze Zeit dauert. Die Bewegung der Weltkörper ist ein ununterbrochenes Continuum, die des Pendels eine Summe von unterbrochenen Continuis.

Der Begriff von continuirlich wird jedoch auch weiter ausgedehnt. So nennt man die Kettenbrüche (s. Bruch, p. 435) auch continuirliche Brüche; Proportionen, arithmetische und geometrische, mit gleichen Mittelgliedern, continuirliche oder stetige Proportionen.

Continuirliche Brüche, s. d. vor. Art. am Schlufs.

Continuirliche Gröfse, stetige, concrete Gröfse, s. continuirlich, und vergl. concrete Gröfse, collective Gröfse

Continuirliche Proportion, s. continuirlich am Schlufs.

Contraction, Zusammenziehung (des Wasserstrahls). Diese findet in Oeffnungen statt, aus welchen das Wasser fliefst. Wodurch diese C. veranlafst wird, ist in dem Art.: Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten, No. 4 und 5, mit Fig. 122, pag. 216 auseinandergesetzt. Der Querschnitt der ausfliefsenden Wassermenge wird also geringer als der der Ausflufsöffnung, er vermindert sich, wie Fig. 122 bildlich darstellt, von *de* auf *fg*; und da das Wasser nicht compressibel ist, da also das Wasser in dem geringeren wirklichen Ausflufsquerschnitt nicht dichter wird als vor und in der gröfseren Ausflufsöffnung, so ist die ausfliefsende Wassermenge geringer, als wenn die C. des Strahls nicht stattfände.

Die Entfernung des kleinsten Wasser querschnitts von der Ausflufsöffnung beträgt etwa ½ der Weite der Oeffnung, bei ganz dünnen Wänden ist sie geringer, bei starken gröfser.

Die C. des Strahls wird um so gröfser, also der wirkliche Ausflufsquerschnitt gegen den der Ausflufsöffnung um so geringer:

1) Je enger die Ausflufsöffnung ist. Denn je gröfser die Oeffnung ist, desto mehr mittlere Strahlen fliefsen aus, ohne von der C. mit berührt zu werden, während eine Oeffnung so eng sein kann, dafs sämmtliche ausfliefsende Strahlen bis in die Mitte der Oeffnung durch C. abgelenkt werden.

2) Je schärfer die inneren Kanten der Ausflufsöffnung sind. Abgerundete Kanten leiten das Wasser nach dem Rande zurück, der sodann adhärirend wirkt, und die C. vermindert.

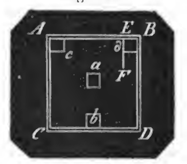
3) Je eckiger die Oeffnungen sind. Dreieckige Oeffnungen geben eine stärkere C. als viereckige, runde Oeffnungen geben die geringste C.

4) Je dünner die Wandungen der Oeffnung sind. Stärkere Wandungen wirken durch Adhäsion, und erweitern wieder den contrahirten Strahl. Diese Erweiterung des Strahls steigert sich noch mehr, wenn die Wandstärken durch angesetzte Flächen zu Röhren verlängert werden; jedoch sollen diese nicht länger sein, als 3 Mal der Weite der Oeffnung, weil sonst wieder die Reibung und Adhäsion der Wände mit dem Wasser dessen Geschwindigkeit und Ausflufsmenge vermindern.

5) Je kleiner die Druckhöhe ist. Die Geschwindigkeit des ausfliefsenden Wassers wächst mit der Höhe des Wasserspiegels über der Ausflufsöffnung, d. h. mit der Druckhöhe (s. Ausflufs etc pag. 215). Je gröfser also die Druckhöhe ist, desto schneller bewegen sich die mittleren Strahlen durch die Oeffnung, reifsen die ihnen nächsten Seitenstrahlen mit fort, und vermindern somit die Anzahl der nach den Rändern hin befindlichen Strahlen, welche von der C. beeinflufst werden, und die Beeinflussung selbst.

Man unterscheidet in der neueren Hydrotechnik vollkommene und unvollkommene oder partielle C. Es sei *ABCD* der Grundrifs eines Gefäfses mit

Fig. 506.



Wasser; *a*, *b*, *c*, *d* seien Ausflufsöffnungen im Boden, so fliefst aus *a* das Wasser über alle 4 Ränder aus, und die C. ist vollkommen. Aus der Oeffnung *b* fliefst das Wasser nur über 3 Ränder, aus *c* nur über 2, und aus der Oeffnung *d*, welche noch mit einer mittleren Wand *EF* eingefafst ist, fliefst das Wasser nur über einen Rand aus. Die C. des Wassers beim Ausflufs durch die Oeffnungen *b*, *c*, *d* ist unvollkommen (s. d. folgenden Art.).

Contractionscoefficient ist dem Wortlaut und der Natur der Sache nach die-

jenige abstracte Zahl, welche beim Ausflufs des Wassers aus Oeffnungen das Verhältnifs des durch Contraction entstandenen kleinsten Wasser-Querschnitts a' zu dem der Ausflufsöffnung a angiebt, also $= \frac{a'}{a}$

Aus dem vor. Art. ersieht man, dafs dieses Verhältnifs in jedem besonderen Fall, nämlich je nach Form der Oeffnung und nach der Gröfse der Druckhöhe, eine andere Zahl ist, und dafs alle Werthe dafür von Versuchen abhangen.

In der Praxis interessirt vorzugsweise die Ausflufsmenge M des aus einer Oeffnung fliefsenden Wassers, und diese M ist hypothetisch (s. Ausflufs, No. 4, pag. 216), d. h. unter der Voraussetzung, dafs keine Contraction stattfindet:

$$M' = 2a \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$$

Hier ist a die Ausflufsöffnung, folglich $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ die Geschwindigkeit.

Die wirkliche Ausflufsmenge M des Wassers ist offenbar die, welche man erhält, wenn für a der durch Contraction erzeugte kleinere Querschnitt a' gesetzt wird, also $M = 2a'\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$
und zwar, weil das Wasser als incompressibel in a' nicht verdichtet ist, und weil, wenn man a' in die Lage a versetzt, die Geschwindigkeit $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ mit der Druckhöhe h dieselbe bleibt.

Nun ist aber a' von a abhängig, und würde in jedem besonderen Falle erst zu berechnen sein; allein $\frac{a'}{a}$ als Coefficient ist aus Versuchen ermittelt; man hat ferner $a' = \frac{a'}{a} \cdot a$ und folglich $\frac{a'}{a} = k$ gesetzt:

$$M = 2ka\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$$

2) Es ist $\sqrt{g}$ die constante Zahl $\sqrt{15\frac{5}{8}}$; $2\sqrt{g} = 7{,}9057$ und der Bequemlichkeit beim Rechnen wegen wird k mit 7,9057 multiplicirt, als ein Coefficient α angegeben, der mit $a\sqrt{h}$ multiplicirt, die wirkliche Wassermenge giebt, so dafs nicht k, sondern $7{,}9057 \times k = \alpha$ der Contractions-Coefficient genannt wird.

Die wirkliche Wassermenge M ist demnach $\alpha \cdot a \cdot \sqrt{h}$

In den Formeln für beide Wassermengen
die hypothetische $M' = 2a \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$
und die wirkliche $M = \alpha \cdot a \cdot \sqrt{h}$
befindet sich die Ausflufsöffnung a als Factor, folglich erscheinen $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ und $\alpha\sqrt{h}$ als Geschwindigkeiten, und dies ist der Grund, dafs so wie $2a\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ die hypothetische, und $\alpha a\sqrt{h}$ die wirkliche Wassermenge heifst, ebenso $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ die hypothetische, und $\alpha\sqrt{h}$ die wirkliche Geschwindigkeit genannt wird, wenngleich in beiden Fällen mit und ohne Contraction $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ als Geschwindigkeit dieselbe bleibt.

3) In diesem Sinne ist der erste Art. (α) des Wörterbuchs als kurze Erklärung der Bedeutung des Coefficient geschrieben, wobei ich noch bemerke, dafs „Endgeschwindigkeit" am Schlusse des Art. kein Versehen ist, wie eine Recension angenommen hat: Da von dem Fallen des Wassers innerhalb eines Gefäfses vom Wasserspiegel bis zur Ausflufsöffnung dort die Rede ist, so ist Anfangsgeschwindigkeit die Geschwindigkeit am Wasserspiegel (= Null) und Endgeschwindigkeit die in der Ausflufsöffnung. Ebenso sind die Begriffe von hypothetischer und wirklicher Ausflufsgeschwindigkeit auch in dem Art.: Ausflufs etc. No. 4, pag. 216, dem Gebrauch gemäfs beibehalten, und die nähere Erklärung diesem Art. vorbehalten worden.

4) Die Bd. I, pag. 216 aufgeführten 7 C. von Eytelwein gelten für die vollkommene Contraction, also für eine Oeffnung, wie a, Fig. 506; für die unvollkommene C. wächst der Coefficient mit dem Verhältnifs des eingefafsten Theils zum ganzen Umfang. Ist dies Verhältnifs $\frac{n}{m}$, sind Fig. 506 die Oeffnungen Quadrate, so ist bei a, $\frac{n}{m} = 0$; bei b ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{4}$; bei c ist $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$

Der Coefficient ist $= \left(1 + p\,\frac{n}{m}\right)\alpha$

Für runde Oeffnungen ist nach Bidone
$p = 0{,}128$
für rechteckige Oeffnungen ist nach Bidone
$p = 0{,}152$
für rechteckige Oeffnungen ist nach Weifsbach $p = 0{,}134$
für rechteckige Oeffnungen im Mittel also
$p = 0{,}143$

5) Aufser den Eytelwein'schen Coefficienten sollen noch neuere Versuchszahlen angegeben werden. Die folgende Tabelle enthält die Versuche von Lebros und Poncelet, nämlich die Coefficienten $k\left(= \frac{a'}{a}\right)$ für rechtwinklige Oeffnungen in dünnen verticalen Wänden bei vollständiger Contraction und dem Ausflufs des Wassers in die freie Luft bei 0,2 M. Breite der Oeffnungen; die Höhen der Oeffnungen, sowie die Druckhöhen, von dem Wasserspiegel bis zur Oberkante der Oeffnung gemessen, in Metern habe ich zugleich in preufsischen Zollen angegeben.

Druckhöhen		Coefficienten $k = \frac{a'}{a}$ für folgende Höhen der Oeffnungen.					
		0,20^m	0,10^m	0,05^m	0,03^m	0,02^m	0,01^m
Meter	= pr. Zoll	7,647 Zoll	3,823 Zoll	1,912 Zoll	1,147 Zoll	0,765 Zoll	0,382 Zoll
0,01	0,38			0,607	0,630	0,660	0,701
0,02	0,76	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,03	1,15	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0,04	1,53	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683
0,05	1,91	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,06	2,29	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676
0,07	2,68	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,08	3,06	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,09	3,44	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,10	3,82	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,12	4,59	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663
0,14	5,35	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660
0,16	6,12	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,18	6,88	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657
0,20	7,65	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,25	9,56	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,30	11,47	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
0,40	15,29	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647
0,50	19,12	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
0,60	22,94	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642
0,70	26,76	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,80	30,59	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,90	34,41	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,00	38,23	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,10	42,06	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,20	45,88	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,30	49,70	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,40	53,53	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,50	57,35	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,60	61,18	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,70	65,00	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,80	68,82	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,90	72,65	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611
2,00	76,47	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611
3,00	114,70	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Die folgende Tabelle enthält die aus der vorigen berechneten Coefficienten $\alpha = 7{,}9057 \cdot k$ für dieselben Druckhöhen nnd Ausflufsöffnungen.

Druckhöhen		Coefficienten $\alpha = 2k\sqrt{g} = 7{,}9057 \cdot k$ für folgende Höhen der Oeffnungen.					
		0,20^m	0,10^m	0,05^m	0,03^m	0,02^m	0,01^m
Meter	= pr. Zoll	7,647 Zoll	3,823 Zoll	1,912 Zoll	1,147 Zoll	0,765 Zoll	0,382 Zoll
0,01	0,38			4,799	4,981	5,218	5,542
0,02	0,76	4,522	4,712	4,862	5,012	5,210	5,487
0,03	1,15	4,569	4,743	4,902	5,044	5,210	5,439
0,04	1,53	4,601	4,767	4,925	5,060	5,202	5,400
0,05	1,91	4,625	4,783	4,941	5,060	5,202	5,368
0,06	2,29	4,641	4,799	4,957	5,060	5,194	5,344
0,07	2,68	4,649	4,815	4,965	5,052	5,186	5,321
0,08	3,06	4,656	4,822	4,973	5,044	5,186	5,297

Druckhöhen		Coefficienten $\alpha = 2k\sqrt{g} = 7{,}9057 \cdot k$ für folgende Höhen der Oeffnungen.					
		0,20^m	0,10^m	0,05^m	0,03^m	0,02^m	0,01^m
Meter	= pr. Zoll	7,647 Zoll	3,823 Zoll	1,912 Zoll	1,147 Zoll	0,765 Zoll	0,382 Zoll
0,09	3,44	4,672	4,822	4,973	5,036	5,178	5,281
0,10	3,82	4,680	4,830	4,981	5,036	5,170	5,265
0,12	4,59	4,688	4,838	4,981	5,028	5,162	5,241
0,14	5,35	4,704	4,846	4,981	5,020	5,147	5,218
0,16	6,12	4,712	4,854	4,988	5,012	5,139	5,202
0,18	6,88	4,720	4,862	4,981	5,012	5,131	5,194
0,20	7,65	4,728	4,862	4,981	5,004	5,123	5,178
0,25	9,56	4,736	4,870	4,981	4,996	5,107	5,162
0,30	11,47	4,743	4,870	4,973	4,996	5,091	5,139
0,40	15,29	4,759	4,878	4,965	4,988	5,075	5,115
0,50	19,12	4,767	4,878	4,965	4,981	5,060	5,091
0,60	22,94	4,775	4,878	4,957	4,981	5,044	5,075
0,70	26,76	4,775	4,870	4,957	4,973	5,036	5,060
0,80	30,59	4,783	4,870	4,957	4,973	5,028	5,036
0,90	34,41	4,783	4,862	4,949	4,965	5,012	5,020
1,00	38,23	4,783	4,862	4,949	4,965	5,004	4,996
1,10	42,06	4,775	4,854	4,941	4,957	4,988	4,973
1,20	45,88	4,775	4,854	4,933	4,949	4,965	4,949
1,30	49,70	4,767	4,846	4,917	4,933	4,941	4,917
1,40	53,53	4,767	4,838	4,909	4,917	4,917	4,886
1,50	57,35	4,759	4,830	4,902	4,902	4,894	4,862
1,60	61,18	4,759	4,830	4,886	4,856	4,878	4,846
1,70	65,00	4,759	4,822	4,878	4,870	4,862	4,838
1,80	68,82	4,751	4,815	4,862	4,862	4,854	4,838
1,90	72,65	4,751	4,807	4,854	4,846	4,838	4,830
2,00	76,47	4,751	4,799	4,846	4,838	4,838	4,830
3,00	114,70	4,751	4,767	4,791	4,807	4,822	4,815

6) Die vorstehenden Tabellen haben nnr Werth für dieselben Dimensionen der Oeffnungen und Druckhöhen, welche darin begriffen sind nnd für die, welche dazwischen liegen; die ersten Columnen, also für Schutzöffnungen zu Wasserrädern, wenn man von deren Wandverlängerungen absieht, durch welche die Contraction unvollkommen wird.

Die Aenderungen der C. für einerlei Oeffnung bei zunehmenden Druckhöhen zeigen kein Gesetz; aufserdem ist ersichtlich, dafs in den beiden ersten Columnen für die gröfseren Oeffnungen mit dem Wachsthum der Druckhöhen auch die C. wachsen, in den 3 letzten Columnen für die kleinsten Oeffnungen findet, dem 5ten Gesetz des vorigen Art. entgegen, das Umgekehrte statt, und in der dritten Columne wachsen die C. von der kleinsten Druckhöhe bis zu einer mittleren, und nehmen von da bis zur gröfsten Druckhöbe wieder ab. Ebenso anffallend, nnd dem 1sten Gesetz des vor. Art. entgegen ist die Erscheinung, dafs für einerlei Druckhöhe die C. mit der Abnahme der Ausflufsöffnung wachsen.

Beide regelwidrige Wirknngen lassen sich nur dadurch erklären, dafs die von den sehr nahen gegenüberliegenden Rändern entgegentretenden Wasserstrahlen beim Begegnen sich stofsen, sich gegenseitig nach ihren Rändern hin zurücktreiben, und damit den kleinsten Qnerschnitt wieder vergröfsern.

Aus diesen Gründen ist es unmöglich, von den tabellarisch geordneten C. so kleiner Oeffnungen auf die C. gröfserer Oeffnungen zu schliefsen.

Fig. 507.

7) Liegen die Oeffnungen unter Wasser, so bleiben die Tabellen gültig, nur hat man zur Druckhöhe die Differenz der beiden Höhen $(H-H')$ zu nehmen, welche = ist der Höhe h zwischen den beiden Wasserspiegeln.

8) Ist die Contraction unvollkommen, so bleiben die Tabellen gleichfalls gültig, wenn man nur die C. uach der Formel

No. 4 abändert. Für die hier stattfindenden rechteckigen Oeffnungen ist im Mittel $p = 0{,}143$; folglich hat man statt α den Werth

$$\left(1 + 0{,}143 \cdot \frac{n}{m}\right)\alpha;$$

wo m den ganzen Umfang, und n den Theil desselben bedeutet, der durch Wandungen eingefafst ist, und keine Contraction verursacht.

9) Bei vollkommener Contraction in Oeffnungen von 1''' Wandstärke fand

Bossut (1775)	$k = 0{,}6174$
Michelotti (1767)	$k = 0{,}6111$
Bidone (1822)	$k = 0{,}6216$
Brindley und Smeaton (1800)	$k = 0{,}6213$
Dies giebt im Mittel	$k = 0{,}61785$
Eytelwein hat gefunden	$k = 0{,}6176$
woraus $\alpha = 7{,}9057 \cdot 0{,}6176$	$= 4{,}88256$

oder wenn man $2\sqrt{g} = 7{,}91$ setzt, $\alpha = 4{,}885$ wofür unter No. 7, pag. 216 $\alpha = 4{,}89$ gesetzt ist.

Vergleicht man alle übrigen von Hydrotechnikern angestellten Versuche, so findet man Abweichungen, und zwar bei Ausflufsöffnungen aller in der Praxis vorkommenden Hauptformen. Erwägt man ferner, dafs g ebenfalls nicht genau $15\frac{5}{8}$ Fufs, also $2\sqrt{g}$ nicht genau 7,9057 Fufs ist, so kann man die mittleren Werthe der Eytelwein'schen Coefficienten α (pag. 216) in allen vorkommenden Fällen ohne weitere Bedenklichkeiten und ohne sich nach anderen Coefficienten umzusehen, anwenden.

Contradiameter ist die Abscissenlinie für eine Curve, welche die Beschaffenheit hat, dafs wenn von einem bestimmten Punkt aus die Abscissen in gleichen Entfernungen links und rechts genommen werden, die Ordinaten auf einer Seite oberhalb, auf der anderen unterhalb genommenen gleich grofs sind.

Die Gleichung für die Curve in Beziehung auf die gedachte Abscissenlinie kann

Fig. 508.

also nur von der Beschaffenheit sein, dafs wenn man $(-x)$ für x und $(-y)$ für y setzt, alle Glieder entweder dieselben Vorzeichen oder alle Glieder die entgegengesetzten Vorzeichen erhalten.

Z. B. eine Curve von der Form:

$$y^2 + axy + y^2 = 0$$

wo für $-y$ und $-x$ der Gleichung dieselben Vorzeichen verbleiben;

eine Curve von der Form

$$y^3 + axy^2 + bx^2y + x^3 = 0$$

wo für $-y$ und $-x$ sämmtliche Glieder minus werden.

Der Kreis und die Ellipse lassen, wie die Natur dieser Linien anschaulich macht, Contradiameter zu, und zwar sind deren Durchmesser die Abscissenlinien, und deren Mittelpunkte die Anfangspunkte der Abscissen.

Die Gleichung für den Kreis ist

$$r^2 - x^2 - y^2 = 0$$

für $-y$ und $-x$ bleiben die Vorzeichen dieselben.

Sind a und c die halben Axen der Ellipse, a die grofse, c die kleine halbe Axe, so sind die Gleichungen

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\,(a^2 - x^2)$$

$$y_1{}^2 = \frac{a^2}{c^2}\,(c^2 - x^2)$$

$-y$ für y und $-x$ für x gesetzt, verbleiben dieselben Vorzeichen.

Bezeichnet man mit α den Winkel, den ein Durchmesser der Ellipse mit der grofsen Axe bildet, die vom Mittelpunkt auf diesem Durchmesser genommenen Abscissen mit x, die Ordinaten unter dem zu α gehörenden Coordinatenwinkel mit y, so ist die Gleichung

$$y^2 - \frac{a^4 \sin^2\alpha + c^4 \cos^2\alpha}{a^2 \sin^2\alpha + c^2 \cos^2\alpha} + \frac{a^4 \sin^2\alpha + c^2 \cos^2\alpha}{a^2c^2}\, x^2 = 0$$

$-y$ für y und $-x$ für x gesetzt, verbleiben den Gliedern dieselben Vorzeichen.

Contrageometrische Proportion ist die Proportion zwischen den Differenzen einfacher Glieder als Vorderglieder, und den einfachen Gliedern als Hinterglieder, letztere in entgegengesetzter Ordnung mit der, welche eine stetige Proportion ergiebt.

Wenn nämlich $a : b = b : c$
so kann gebildet werden

$$a - b : b - c = a : b = b : c$$

die contrageometrische Pr. ist aber
entweder $a - b : b - c = b : a$ (1)
oder $a - b : b - c = c : b$ (2)

In beiden Fällen existirt keine Proportion zwischen a, b und c.

Z. B. es sei $b = 8$, $c = 4$, so ist bei der zweiten Proportion

$$a - 8 : 8 - 4 = 4 : 8$$

nur möglich, wenn $a = 10$ ist.

Aber 10, 8, 4 stehen nicht in stetiger Proportion. Dieselben Werthe in die erste Proportion gesetzt, ergiebt wieder keine Proportion, es ist nämlich

$$10 - 8 : 8 - 4 \text{ nicht} = 8 : 10$$

Proportion 1 existirt, wenn

$$b = \tfrac{1}{2}\left(c - a \pm \sqrt{c^2 - 2ac + 5a^2}\right)$$

oder wenn $c = b + a - \frac{a^2}{b}$

Proportion 2 existirt, wenn

$$b = \tfrac{1}{2}\left(a - c \pm \sqrt{a^2 - 2ac + 5c^2}\right)$$

oder wenn $a = b + c - \frac{c^2}{b}$

Aus der 2ten Formel für b ersieht man, dafs wenn $a = 10$, $c = 4$ verbleiben, a auch $= -2$ gesetzt werden kann. Es ist

$$10 - (-2) : (-2) = 4 : (-2)$$

Contraharmonische Proportion ist die Proportion zwischen den beiden Differenzen zweier von 3 Gröfsen als Vorderglieder, und den beiden in jenen Differenzen nur einmal vorkommenden Gröfsen als Hinterglieder, letztere in entgegengesetzter Ordnung mit der, welche eine harmonische Proportion ergiebt, so dafs der Subtrahend der zweiten Differenz das dritte und der Minuend der ersten das vierte Glied bildet.

Die harmonische Proportion ist

$$a - b : b - c = a : c$$

das Mittelglied $b = \frac{2ac}{a + c}$

die contraharmonische Pr. ist

$$a - b : b - c = c : a$$

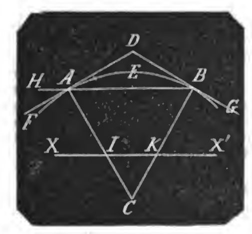
das Mittelglied $b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}$

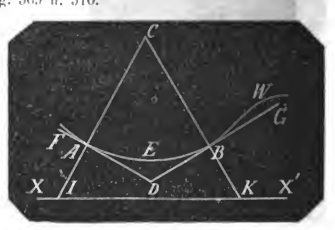
Convergenz (von vergĕre, neigen) wird von geraden Linien gesagt, die in einerlei Ebene befindlich einem Punkte sich nähern; desgleichen von Reihen, deren folgende Glieder immer kleiner werden, also dem Nullpunkt sich nähern. Der Gegensatz von C. ist Divergenz; Linien in einerlei Ebene divergiren, d. h. nach der Seite hin, wo sie sich immer weiter von einander entfernen; Reihen divergiren, wenn vom ersten Gliede ab die nachfolgenden Glieder immer gröfser werden.

Convex und **Concav** (erhaben und hohl) sind an Linien und Flächen für die Form das, was für die Richtung positiv und negativ, rechts und links ist, nur mit der Einschränkung, dafs man convex und concav nicht wie positiv und negativ, oder durch Umkehrung des Gegenstandes nicht wie rechts und links mit einander vertauschen kann.

Fig. 409 u. 410 sind AEB 2 krumme Linien, in A und B, FD und GD Tangenten an denselben. Die Form der Linie nach den Tangenten hin, oder von einem Standpunkt aus gesehen, in welchem die Tangenten vor der Linie liegen, heifst convex, erhaben; die Form

Fig. 509 u. 510.





von der Tangente abwärts oder von einem Standpunkt aus gesehen, in welchem die krumme Linie vor den Tangenten liegt, heifst concav, hohl. Man erklärt auch: Eine krumme Linie (*AEB*), welche von einer geraden Linie (*HB*) in 2 Punkten (*A*, *B*) geschnitten wird, heifst nach der Richtung der Sehne (*AB*) hin concav, nach der Richtung deren Verlängerung (*AH*) hin, convex. Eine entsprechendere Erklärung ist wohl: Eine krumme Linie (*AEB*) heifst nach der Richtung hin, in welcher 2 nahe liegende Tangenten (*AD*, *BD*) sich schneiden, convex; nach der Richtung hin, in welcher die zugehörigen Normalen (*AC*, *BC*) sich schneiden, concav.

Die Winkel, welche die aufeinander folgenden Normalen (*AC*, *BC*) mit einer Abscissenlinie (*XX'*) nach einerlei Richtung und nach dem Anfangspunkt der Abscissen hin gemessen, wie $\angle AJX$, $\angle BKX$, werden bei der concaven Linie immer gröfser, bei der convexen immer kleiner.

Eine Linie kann nach einerlei Richtung hin betrachtet die convexe Form mit der concaven vertauschen; der Punkt *W* (Fig. 510) in dem dies geschieht, heifst der Wendungspunkt. Weil bei Bestimmung der Form einer Curve in einem bestimmten Punkt *E* derselben ein solcher Wendungspunkt in der Nähe sein könnte, mufs der dafür zu untersuchende Bogen *AB* unendlich klein genommen werden.

Fig. 511 u. 512.

Im Calcül ist oft ein untrügliches Kennzeichen erforderlich, ob eine Curve in einem ihrer Punkte convex oder concav ist, und die Differenzialrechnung giebt das Mittel dazu. In dem Art.: Berührende Linie, Bd. I, pag. 344 mit Fig. 216 ist nachgewiesen, dafs die trigonometrische Tangente des Winkels (α), den die geometrische Tangente (*BT*) an einem Punkt (*B*) der Curve mit der Abscissenlinie (*SH*) bildet, = ist dem Quotient des Differenzials der Ordinate (y) des Punktes (*B*) durch das Differenzial der Abscisse (x) für denselben Punkt (*B*), nämlich Formel (2) daselbst

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

und zwar ist dieser Werth allgemein gültig, und unabhängig davon, ob die Curve nach der Abscisse hin convex oder concav ist, ob nämlich der Punkt *S* links oder rechts von dem Punkt *T* der Tangente fällt, und der $\angle GBL <$ oder $>$ als $\angle \alpha$ ist. Fig. 511 und 512 sind die Fortsetzungen von Fig. 216, und wie das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks *GBL*, dessen Catheten Δx und Δy angenommen worden, abgeleitet ist, so soll hier das zweite Differenzial aus dem folgenden zweiten Dreieck *NGM*, dessen Catheten $\Delta^2 x$ und $\Delta^2 y$ angenommen sind, abgeleitet werden; und zwar weil $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ als das Differenzial von

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

ein characteristisches Merkzeichen für die Form der Curve abgiebt.

Es ist für $tg\,\alpha$ nämlich die Abscisse x in $x + \Delta x$ und die Ordinate y in $y + \Delta y$ umgeändert worden. Aendert man nun Δx in $\Delta x + \Delta^2 x$ und Δy in $\Delta y + \Delta^2 y$ so entsteht statt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Quotient

$$\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{\Delta x + \Delta^2 x}$$

Fig. 511, wo die Curve concav ist, wird $\angle NGM < \angle GBL$,

folglich ist $\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} < \frac{\Delta y}{\Delta x}$,

also auch $\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{\Delta x + \Delta^2 x} < \frac{\Delta y}{\Delta x}$

und der mit dem Zuwachs von Δx und Δy entstehende Zuwachs der Function $\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{\Delta x + \Delta^2 x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird subtractiv.

Da nun mit dem Zuwachs der Urveränderlichen Δx eine Abnahme der Function geschieht, so ist das Differenzial negativ,

also $\partial \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist negativ.

Fig. 512, wo die Curve convex ist, wird $\angle NGM > \angle GBL$,

folglich $\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} > \frac{\Delta y}{\Delta x}$

also auch $\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{\Delta x + \Delta^2 x} > \frac{\Delta y}{\Delta x}$

mit dem Wachsthum der Urveränderlichen Δx geschieht ein Wachsthum der

Function, und das Differenzial $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist positiv.

Mithin gilt die Regel, dafs bei positivem Differenzial der Tangente die Curve gegen die Abscisse hin convex, bei negativem Differenzial concav ist. Sind die Ordinaten negativ, so findet natürlich das Entgegengesetzte statt; die Abscisse $\mp BL$ und GM würde nämlich anstatt nach der Richtung NM, nach der entgegengesetzten Richtung MN hin liegen.

Convexgläser, erhabene Gläser sind Gläser mit erhabenen krummen Oberflächen, zum optischen Gebrauch solche, welche in Form eines Theils einer Kugeloberfläche geschliffen sind. Sind beide Oberflächen eines Glases erhaben, so heifst das Glas convex-convex oder biconvex; ist eine Oberfläche erhaben, die andere eben, so heifst das Glas planconvex; ist eine Oberfläche erhaben, die andere hohl, so heifst das Glas concav-convex oder convex-concav, auch Mondchen, Meniskus. Die optischen Wirkungen dieser Gläser sind zu ersehen in dem Art. Brennglas u. Brille, No. 1 bis 5. Vergl. Concavgläser.

Coordinaten sind die in dem Artikel Abscisse, mit Fig. 14 bis 16 (s. zuerst diesen) erklärt. Es sind gerade Linien, die von einem Punkt aus gegen feste Linien oder gegen feste Ebenen nach bestimmten Richtungen gezogen werden, um den Punkt seiner Lage nach gegen jene Linien oder Ebenen zu bestimmen; und diese Erklärung war ausreichend, um den Begriff „Abscisse" festzustellen.

Die so erklärten Bestimmungslinien sind bis dahin nur Abstände zwischen Punkten und Linien oder Punkten und Ebenen, mit deren Maafsen die Lagen der Punkte gegen die Linien und Ebenen gegeben werden, aber noch keine Coordinaten; diese haben eine höhere Bedeutung, nämlich die der gleichen Abhängigkeit zusammengehöriger Abstände für Punkte eines und desselben Systems, so dafs wenn ein beliebiger Punkt des Systems durch die ihm zugehörenden Coordinaten gegeben wird, dies durch Gleichungen (Coordinatengleichungen) geschieht, die zugleich für alle übrigen Punkte des Systems gelten, dafs also jeder beliebige Punkt des Systems alle übrigen Punkte desselben Systems vertritt. Es sind mithin Coordinaten eines Systems von Punkten zusammengehörige Abstände von denselben, deren gegenseitige Abhängigkeit durch einerlei Function gegeben ist.

2. Es sei AEB ein Halbkreis, so lehrt die Geometrie, dafs wo in dem Durchmesser AB der Punkt D auch genommen werde, das Quadrat der senkrechten Linie DE = dem Rectangel ist, dessen Seiten

Fig. 513.

AD und BD sind. Alle Linien also, die wie DE von beliebigen Punkten des Durchmessers bis zur Peripherie senkrecht gezogen werden, haben mit den beiden Abständen jedes dieser Punkte von den Endpunkten A, B des Durchmessers einerlei Function. Setzt man also nach Vorschrift des Art.: Abscisse, AB als Abscisse, A als deren Anfangspunkt, bezeichnet jeden aller möglichen Abstände AD mit x, jede aller möglichen rechtwinkligen Ordinaten DE mit y, den Halbmesser mit r, so erhält man die Coordinatengleichung

$$DE^2 = AD \times BD$$

oder $y^2 = x \times (2r - x) = 2rx - x^2$

Wie also der Punkt E durch die zusammengehörenden Abstände AD und DE bestimmt wird, eben so wird jeder andere Punkt wie E' durch die ihm zugehörenden Abstände AD' und $D'E'$ bestimmt. jede 2 zusammengehörende Abstände für einen Punkt der Peripherie haben einerlei Abhängigkeit von einander, sie sind durch einerlei Function $y^2 = fx = 2rx - x^2$ gegeben, und folglich sind sie nicht nur Abstände, sondern Coordinaten, in diesem Falle rechtwinklige C., und die Gleichung

$$y^2 = 2rx - x^2$$

heifst die rechtwinklige Coordinatengleichung für den Kreis.

Bei diesem Beispiel liegen sämmtliche Punkte des Systems in einerlei Ebene, und es sind deshalb nur die Beziehungen zwischen nur einer Abscisse und Ordinaten, die alle in einer Ebene liegen, erforderlich. Liegen dagegen die ihrer Lage nach festzustellenden Punkte des Systems in verschiedenen Ebenen, so ist ein so einfaches Coordinatensystem nicht ausreichend: es kann die Bestimmung der

Punkte nur dadurch geschehen, dafs man von A aus mehrere Abscissenlinien mit ihren Ordinaten construirt, wie dies Fig. 15 angegeben ist (s. den folg. Art.).

Aufser den hier betrachteten Parallel-Coordinaten giebt es noch Polarcoordinaten, indem von einem in einer festen Linie befindlichen festen Punkt, dem Pol aus, gerade Linien, die Polarordinaten nach den verschiedenen Punkten der Curve gezogen, und diese durch die Winkel, die Polarabscissen, welche die Ordinaten mit jener festen Linie bilden, bestimmt werden.

Coordinatenaxen sind in dem Art.: „Abscisse", als diejenigen Linien, die durch den Anfangspunkt ∓ den Coordinaten gezogen werden, und also ihrer Lage nach richtig erklärt. In dem Art.: „Axe", sind Axen als primitive Hauptlinien eines Systems definirt, und wie No. 2 daselbst der C. gedacht worden, bestimmen C. ein behufs der Untersuchung von Gesetzen des Zusammenhanges von Punkten erforderliches Coordinatensystem. In Fig. 513 ist AB Abscissenlinie, d. h. eine Linie, auf welcher von einem Punkt (A) aus Abschnitte gemacht werden. Aus Fig. 15 ersieht man, dafs bei einem Coordinatensystem jede der Axen als Abscissenlinie gelten kann; daher fällt der Ausdruck: Abscisse hier fort, die Axen werden mit AX, AY, AZ bezeichnet und heifsen die Axen der x, der y, der z, wenn die von A aus genommenen Ordinaten für Punkte wie P, also auch für P', P'', P''' u. s. w. die zu einerlei System gehören, auf der Axe AX mit x, auf AY mit y und auf AZ mit z bezeichnet werden, während die von den Punkten selbst wie von P auf die von je 2 der Axen gebildeten Ebenen gefällten Linien nicht als Ordinaten, sondern nur als Hülfslinien erscheinen.

2. Die C. können rechtwinklig und schiefwinklig auf einander sich befinden, die von denselben untereinander gebildeten Winkel heifsen Coordinatenwinkel. Die Bezeichnung dieser Winkel geschieht ganz entsprechend:

Zwischen den Axen AX und AY mit (xy), zwischen den Axen AX und AZ mit (xz) und zwischen den Axen AY und AZ mit (yz).

Je 2 C. liegen in einer Ebene; die 3 C. bilden also 3 Ebenen, welche Coordinatenebenen heifsen. Deren Bezeichnung ist ganz entsprechend: für die Ebene zwischen AX und AY durch XY, zwischen AX und AZ mit XZ und zwischen AY und AZ durch YZ.

Jede Ordinate liegt in 2 Coordinatenebenen (s. Fig. 15), die Ordinaten x liegen in den Ebenen XY und XZ, die Ordinaten y in den Ebenen XY und YZ, und die Ordinaten z in den Ebenen XZ und YZ.

Ordinaten, die in den über A hinaus rückwärts verlängerten Axen liegen, werden negativ, und deren Coordinatenwinkel sind die Supplemente der positiven Winkel. So hat eine Ordinate $(-x)$ die Coordinatenwinkel $180^\circ-(xy)$ und $180^\circ-(xz)$; eine Ordinate $(-y)$ die Coordinatenwinkel $180^\circ-(xy)$ und $180^\circ-(yz)$ und eine Ord. $(-z)$ die Coordinatenwinkel $180^\circ-(xz)$ und $180^\circ-(yz)$.

3. Wie in dem Beispiel für Fig. 513, wo wie bei jedem in einerlei Ebene befindlichen Coordinatensystem 2 C. existiren oder zu denken sind, nur eine Coordinatengleichung erforderlich ist, um für jeden Werth von x den entsprechenden von y ermitteln zu können, so ist bei 3 C. noch eine zweite Coordinatengleichung erforderlich, um die Beziehung zwischen z und x oder zwischen z und y festzustellen. Die beiden Gleichungen hierfür sind also entweder:

$$x^n y^m \pm ax^{n \pm 1} y^{m \mp 1} + \ldots = 0$$

und

$$x^n z^m \pm bx^{n \pm 1} z^{m \mp 1} + \ldots = 0$$

oder

$$x^n y^m \pm ax^{n \pm 1} y^{m \mp 1} + \ldots = 0$$

und

$$y^n z^m \pm by^{n \pm 1} z^{m \mp 1} + \ldots = 0$$

4. Die Vertauschung gegebener C. gegen andere kann erwünscht und erforderlich sein. Es sei Fig. 514 das Coordinatensystem AX, AY, AZ gegeben; die Axe AX soll mit der AX' vertauscht werden. Für einen Punkt im Raum sei P die Projection in AX', so ist AP die zu P gehörige Coordinate x' und man hat die zu demselben Punkt P gehörenden Coordinaten $AB = x$, $AD = y$ und $AE = z$ auf den gegebenen 3 C. Wenn man aus P die Linie $Pp \mp AZ$ auf die Ebene XY, die Linie $Pp' \mp AY$ auf die Ebene XZ, die Linie $Pp'' \mp AX$ auf die Ebene YZ fällt, und in den genannten Ebenen $pB \mp AY$, $p'E \mp AX$ und $p''D \mp AZ$ zieht, woraus man dann, wie Fig. 15, ein Parallelepipedum bilden kann.

Das System ist dadurch gegeben, dafs die Coordinatenwinkel (xy), (xz), (yz) ge-

Fig. 514.



geben sind, und die Lage der neuen Axe AX' ist ebenfalls durch die Winkel (xx') (yx'), (zx') gegeben. Man sieht also, dafs die neuen Coordinaten x' durch die ihnen entsprechenden ursprünglichen x, y, z ausgedrückt werden können, und in dieser stereometrischen Aufgabe besteht die Verwandlung der Coordinaten eines ursprünglichen (ersten, primitiven) Systems in ein neues (zweites, secundäres) System.

Von den primitiven Axen werden eine, zwei oder auch keine beibehalten; eben so wird der Anfangspunkt der Coordinaten beibehalten oder geändert. Man erhält je nach diesen Aenderungsweisen, und ob die Coordinaten rechtwinklig oder schiefwinklig sind, einfachere oder zusammengesetztere Reductionen. Die Reduction von Coordinatengleichungen auf andere derselben Art und auf Polargleichungen für Curven von einfacher Krümmung s. u. Coordinatengleichungen.

Coordinatenebenen s. u. Coordinatenaxen No. 2.

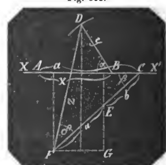
Coordinatengleichung ist eine algebraische oder transcendente Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen zu einem System von Punkten gehörenden Coordinaten ausspricht; sie ist daher zugleich Function, und kann als solche eine implicite oder explicite sein (s. d. vorigen Art.).

Die Vertauschung der Coordinaten (s. Coordinatenaxen) kommt besonders bei Curven einfacher Krümmung vor; d. h. bei Curven, deren Punkte sämmtlich in einerlei Ebene liegen. Eben so die Vertauschung von Parallel-Coordinaten gegen Polar-Coordinaten und gegenseitig.

1. Reduction einer Coordinatengleichung auf eine andere Coordinatengleichung.

In dem Art.: Abscisse, Bd. I, pag. 16, mit Fig. 14 ist die Reduction unter der einfachen Bedingung geschehen, dafs für beide Gleichungen der Anfangspunkt A der Abscissen derselbe bleibt. Ist dies nicht, so sei Fig. 515 in der Abscissenlinie XX', A der Anfangspunkt der Abscissen, AB eine Abscisse x, α der Coordinatenwinkel, $BD=y$ die zugehörige Ordinate. EF sei eine Abscisse u in der neuen Abscissenlinie, welche die erste unter dem $\angle\beta$ in dem Punkt C in dem Abstande a von A schneidet, E in der Entfernung $CE=b$ von C sei der Anfangspunkt der neuen Abscissen, FD die zugehörige Ordinate z, δ der Coordinatenwinkel, so hat man, wenn man aus F eine Parallele FG mit XX',

Fig. 515.



die Normalen von D und E auf FG und aus F auf XX' zieht, und die Normalen von D und E auf FG und aus F auf XX' fällt, die beiden Gleichungen

$$\text{I. } y \sin\alpha + (b+u)\sin\beta = z \sin(\beta+\delta)$$

$$\text{II. } x - y\cos\alpha - z\cos(\beta+\delta) = a - (b+u)\cos\beta$$

aus welchen u und z durch x und y ausgedrückt werden können.

2. Reduction einer Coordinatengleichung auf eine Polargleichung und gegenseitig.

Es sei wieder A in XX' der Anfangspunkt der Abscissen, $AB=x$, $BD=y$.

Bleibt für die Polarcoordinaten A der Pol, AX' der feste Schenkel, so hat man Fig. 516 für die Polarabscisse $\angle DAB=\varphi$, $AD=z$ die beiden Gleichungen

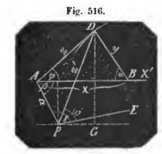
$$z \sin\varphi = y \sin\alpha$$

$$z \cos\varphi + y\cos\alpha = x$$

womit die beiden Polarcoordinaten φ und z durch x und y ausgedrückt sind.

Ist ein anderer Punkt P der Pol, der in der Entfernung $AP=a$ unter dem $\angle\beta$ mit AX' von A liegt, ist PE unter dem $\angle\gamma$ mit AP die Polaraxe, die Polarabscisse $\angle DPE=\omega$, der Polarabstand DP von $P=z'$, so ziehe durch P die Linie

Fig. 516.



$FG \neq XX'$, fälle die Lothe von P auf XX' und von D auf FG, und man hat

$$DG = y \sin \alpha + a \sin \beta$$

zugleich ist

$$DG = z' \sin DPG = z' \sin AHP$$

$$\angle AHP = 180° - (\beta + \angle APH)$$
$$= 180° - (\beta + \gamma - \omega)$$

woraus

$$\text{I. } y \sin \alpha + a \sin \beta = z' \sin (\beta + \gamma - \omega)$$

$$AB = x = a \cos \beta + z' \cos DPG + y \cos \alpha$$

woraus

$$\text{II. } x = a \cos \beta + y \cos \alpha - z' \cos (\beta + \gamma - \omega)$$

3. Reduction einer Polargleichung auf eine andere Polargleichung.

Sind φ und z die einen, ω und z' die anderen Polarcoordinaten, die auf einander reducirt werden sollen, so hat man nach 2:

$$\text{I. } z \sin \varphi + a \sin \beta = z' \sin (\beta + \gamma - \omega)$$
$$\text{II. } z \cos \varphi = a \cos \beta - z' \cos (\beta + \gamma - \omega)$$

Coordinatensystem s. Coordinatenaxen No. 1.

Coordinatenwinkel s. Coordinatenaxen No. 2.

Coordinirt, in der Geometrie s. v. w. conjugirt.

Corollarium (corolla, kleiner Kranz) ist ursprünglich ein Kränzchen zum Geschenk, daher auch Zulage, Trinkgeld, und hieraus bei den Mathematikern Zugabe zu einem Satz: Zusatz, Folgesatz: ein Satz, der unmittelbar aus einem voranstehenden Satze folgt, nothwendig hervorgeht, oder aus einfachen Schlüssen sich ergiebt. Z. B. der Zusatz zu Satz 15 im Euklid: Hieraus erhellet, dafs alle um einen Punkt (in einerlei Ebene) herumliegende Winkel zusammen vier rechten Winkeln gleich sind. Eigentlicher hätte dieser Folgesatz zu Satz 13 schon genommen werden sollen.

Correction, Berichtigung von Mefsinstrumenten und Messungen selbst. Erstere wegen der Unmöglichkeit vollkommen richtiger Arbeit, letztere theils wegen dieses Umstandes, theils möglicher Fehler in der Beobachtung, theils wegen muthmafslich nachtheiligen Einflusses einwirkender Naturkräfte. S. Barometercorrection, Collimation, Collimationsfehler und den folg. Art.

Correspondirende Höhen sind in der Astronomie die gleich grofsen Höhen, welche ein Gestirn während seines scheinbaren Laufs durch den Tagebogen des Orts vor und nach der Culmination am Himmel einnimmt. Culminirt ein Gestirn in irgend einem Zeitpunkt, d. h. befindet er sich während seines Laufs in diesem Augenblick in der Mittagslinie des Beobachtungsorts, so hat es für diesen die gröfste Höhe erreicht, und von allen geringeren Höhen, die es am Himmel einnimmt, sind immer diejenigen beiden, welche in gleichen Zeitabständen vom Culminationsaugenblick, vor und nach diesem stattfinden, einander gleich. Durch die Beobachtung vieler Höhen eines Gestirnes vor der Culmination, und zugleich mit der Bemühung, nach derselben solche zu finden, die den vorigen einzeln gleich sind (die ihnen correspondirenden Höhen), kann man daher den Zeitpunkt berechnen, in welchem das Gestirn durch die Mittagslinie gegangen ist. Eben so dient dies Verfahren, an mehreren Fixsternen vorgenommen, und wiederholt zur genauen Bestimmung des Meridians eines Orts (vergl. Culmination).

Cos. ist die Abkürzung für Cosinus.

Cosec. Abkürzung für Cosecante.

Cosecante eines Winkels oder Bogens α ist die Secante des Complements von α, eine sogenannte Cofunction s. d. Die Lagen der Secante und der C. als trigonometrische Linien giebt der Art.: Construction, trigonometrische, pag. 80 und 81, mit Fig. 437 bis 440 für Winkel oder Bogen, die allen 4 Quadranten angehören; eben so den Beweis, dafs die Cosec. für Bogen im ersten und zweiten Quadranten positiv, für Bogen im dritten und vierten Quadranten negativ ist.

Ferner sind in demselben Art. folgende Aufgaben durch Zeichnungen gelöst. Zu finden:

$$\varphi = arc\left(cosec = \pm \frac{a}{b}\right)$$

pag. 82 No. 4, VI. mit Fig. 441

$x = r \cdot cosec^2\alpha$
pag. 83 No. 5, VI. mit Fig. 444

$\varphi = arc\left(cosec^2 = \frac{a}{b}\right)$
pag. 84 No. 6, VI. mit Fig. 445

$x = r \cdot cosec^3\alpha$
pag. 85 No. 7, VI. mit Fig. 444

$x = r \cdot \sin\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 85 No. 8, VI. mit Fig. 447

$x = r \cdot \cos\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 86 No. 9, V. mit Fig. 448

$x = r \cdot tg\,\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 87 No. 10, IV. mit Fig. 449

$x = r \cdot \cot\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 87 No. 11, III. mit Fig 449

$x = r \cdot \sec\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 87 No. 12, II. mit Fig. 450

$x = r \cdot cosec\,\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 88 No. 12, III. mit Fig. 450.

2. Wie aua Fig. 437 bis 440 abgeleitet werden kann, wo $CH = cosec\,\alpha$ ist, hat man:

$cosec\,0 = cosec\,(-360^\circ) = \sec 90^\circ = \infty$
$cosec\,90^\circ = cosec\,(-270^\circ) = \sec 0 = 1$
$cosec\,180^\circ = cosec\,(-180^\circ) = \sec(-90^\circ) = \infty$
$cosec\,270^\circ = cosec(-90^\circ) = \sec(-180^\circ) = -1$
$cosec\,360^\circ = cosec(-0) = \sec(-270^\circ) = -\infty$

Ist α ein Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder ein Winkel zwischeu 0 und 90° so ist

$cosec\,(90^\circ - \alpha) = cosec - (270^\circ + \alpha) = \sec\alpha$
$cosec\,(90^\circ + \alpha) = cosec - (270^\circ - \alpha)$
$= \sec(-\alpha) = \sec\alpha = cosec\,(90^\circ - \alpha)$
$cosec\,(180^\circ - \alpha) = cosec - (180^\circ + \alpha)$
$= \sec - (90^\circ - \alpha) = \sec(90^\circ - \alpha)$
$= cosec\,\alpha$
$cosec\,(180^\circ + \alpha) = cosec - (180^\circ - \alpha)$
$= \sec - (90^\circ + \alpha) = -\sec(90^\circ - \alpha)$
$= -cosec\,\alpha$
$cosec\,(270^\circ - \alpha) = cosec - (90^\circ + \alpha)$
$= \sec - (180^\circ - \alpha) = -\sec\alpha$
$= -cosec\,(90^\circ - \alpha)$
$cosec\,(270^\circ + \alpha) = cosec - (90^\circ - \alpha)$
$= \sec - (180^\circ + \alpha) = -\sec\alpha$
$= -cosec\,(90^\circ - \alpha)$
$cosec\,(360^\circ - \alpha) = cosec\,(-\alpha)$
$= \sec - (270^\circ - \alpha) = -\sec(90^\circ - \alpha)$
$= -cosec\,\alpha$

3. Ans den Fig. 437 bis 440 lassen sich folgende Formeln unmittelbar ableiten. Es ist nämlich

$CH : CB = CD : DE$ oder
$cosec\,\alpha : 1 = 1 : \sin\alpha$, worans

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad (1)$$

ferner hat man

$CH^2 = BH^2 + BC^2$ oder
$cosec^2\alpha = \cot^2\alpha + 1$

oder
$$cosec\,\alpha = \sqrt{\cot^2\alpha + 1} \qquad (2)$$

Will man nnn $cosec\,\alpha$ durch die übrigen trigonometrischen Functionen ansdrücken, so hat man

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \qquad (3)$$

da nnn ans denselben Figuren

$\cot\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$ ist, so hat man

$$cosec\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha} + 1} = \frac{\sqrt{ta^2\alpha + 1}}{tg\,\alpha} \qquad (4)$$

und da desgleichen

$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$, so ist ans 3

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2\alpha}}} = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} \qquad (5)$$

ferner ist wie die Figuren ergeben

$\cos\alpha = 1 - \sin v\,\alpha$
nnd $\sin\alpha = 1 - cosin\,v\,\alpha$,

nnd hieraus

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \sin v\,\alpha)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\sin v\,\alpha\,(2 - \sin v\,\alpha)}} \qquad (6)$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{1 - \cos v\,\alpha} \qquad (7)$$

ferner hat man

$$\sin\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha} \qquad (8)$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}}{cosec\,\alpha} \qquad (9)$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}} \qquad (10)$$

$$\cot\alpha = \sqrt{cosec^2\alpha - 1} \qquad (11)$$

$$\sec\alpha = \frac{cosec\,\alpha}{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}} \qquad (12)$$

$$sinv\,\alpha = 1 - \frac{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}}{cosec\,\alpha} \qquad (13)$$

$$cosinv\,\alpha = \frac{cosec\,\alpha - 1}{cosec\,\alpha} \qquad (14)$$

4. Pag. 98 No. 23 ist mit der Anflösung der Zeichnen-Anfgabe:

$$arc\left(cosec = \frac{\cot\alpha + tg\,\alpha}{2}\right)$$

zugleich synthetisch die Formel als richtig bewiesen

$$cosec\,2\alpha = \tfrac{1}{2}(\cot\alpha + tg\,\alpha) \qquad (15)$$

diese läfst sich auch analytisch herleiten. Setzt man nämlich in die pag. 89 bis 93 No. 14 synthetisch ala richtig bewiesene Formel

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

für β den Werth α, so entsteht die Formel

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

welche anch pag. 96 No 16 synthetisch bewiesen ist

Nun ist

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \text{ also}$$

$$cosec\,2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

und da aus Fig. 437—440;

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$cosec\,2\alpha = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}(tg\,\alpha + \cot\alpha)$$

5. Die Formel 8 quadirt gibt

$$cosec^2 2\alpha = \tfrac{1}{4}(\cot^2\alpha + 2\,tg\,\alpha\cdot\cot\alpha + tg^2\alpha)$$

$$= \tfrac{1}{4}(\cot^2\alpha + 2 + tg^2\alpha)$$

$$cosec^2 2\alpha = \tfrac{1}{4}(\sec^2\alpha + cosec^2\alpha) \qquad (16)$$

6. Schreibe für Formel 8

$$cosec\,2\alpha = tg\,\alpha + \tfrac{1}{2}(\cot\alpha - tg\,\alpha)$$

$$= tg\,\alpha + \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}$$

$$= tg\,\alpha + \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Nun ist pag. 89 bis pag. 93, No. 14 synthetisch erwiesen die Formel

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

hierin $\beta = \alpha$ gesetzt giebt die Formel

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

welche pag. 96 No. 17 auch synthetisch erwiesen ist. Daher hat man

$$cosec\,2\alpha = tg\,\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = tg\,\alpha + \cot 2\alpha \qquad (17)$$

7. Schreibt man die Formel 8

$$cosec\,2\alpha = \cot\alpha - \tfrac{1}{2}(\cot\alpha - tg\,\alpha);$$

so hat man nach No. 6

$$cosec\,2\alpha = \cot\alpha - \cot 2\alpha \qquad (18)$$

8. Schreibt man für $cosec\,2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$

$$cosec\,2\alpha = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

so erhält man

$$cosec\,2\alpha = \tfrac{1}{2}\cot\alpha\cdot\sec^2\alpha = \frac{\sec^2\alpha}{2\,tg\,\alpha} \qquad (19)$$

9. Schreibe Formel 12:

$$cosec\,2\alpha = \frac{1 + tg^2\alpha}{2\,tg\,\alpha} = \frac{2\,tg\,\alpha - 2\,tg\,\alpha + 1 + tg^2\alpha}{2\,tg\,\alpha}$$

also dividirt und reducirt

$$cosec\,2\alpha = 1 + \frac{(1 - tg\,\alpha)^2}{2\,tg\,\alpha} \qquad (20)$$

10. Dividirt man Zähler und Nenner des 2ten Gliedes in Formel 13 mit $1 - tg^2\alpha$ so hat man

$$cosec\,2\alpha = 1 + \frac{(1 - tg\,\alpha)^2 : (1 - tg^2\alpha)}{2\,tg\,\alpha : (1 - tg^2\alpha)}$$

Nun ist pag. 97 No. 20 mit Fig. 475 synthetisch erwiesen,

dafs $\qquad tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

folglich ist, wenn man noch den Zähler reducirt

$$cosec\,2\alpha = 1 + \frac{\left(\frac{1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha}\right)}{tg\,2\alpha}$$

Nun ist $tg\,45° =$ dem Radius $= 1$; man kann also den Zähler des zweiten Gliedes schreiben

$$\frac{tg\,45° - tg\,\alpha}{1 + tg\,45°\cdot tg\,\alpha}$$

Nun ist pag. 112 No. 54 mit Figur 489 synthetisch erwiesen, dafs

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

folglich ist der Zähler $= tg(45° - \alpha)$

und $$cosec\,2\alpha = 1 + \frac{tg(45° - \alpha)}{tg\,2\alpha} \qquad (21)$$

11. Setzt man in die Gl. No. 4

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha},\ \sin\beta = \frac{1}{cosec\,\beta},$$

so erhält man nach Reduction

$$cosec(\alpha+\beta) = \frac{cosec\,\alpha\cdot cosec\,\beta}{\cos\alpha\cdot cosec\,\alpha + \cos\beta\cdot cosec\,\beta} \qquad (22)$$

Setzt man $\beta = \alpha$ so erhält man, reducirt

$$cosec\,2\alpha = \frac{cosec\,\alpha}{2\cos\alpha}$$

für $\beta = 2\alpha$

$$cosec\,3\alpha = \frac{cosec\,\alpha\cdot cosec\,2\alpha}{\cos\alpha\cdot cosec\,\alpha + \cos 2\alpha\cdot cosec\,2\alpha}$$

$$= \frac{cosec\,\alpha}{4\cos^2\alpha - 1} \qquad (23)$$

für $\beta = 3\alpha$

$$cosec\,4\alpha = \frac{cosec\,\alpha\cdot cosec\,3\alpha}{\cos\alpha\cdot cosec\,\alpha + \cos 3\alpha\cdot cosec\,3\alpha}$$

$$= \frac{cosec\,\alpha}{4\cos^2\alpha + \cos 3\alpha - \cos\alpha}$$

da nun $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ so ist

$$cosec\,4\alpha = \frac{cosec\,\alpha}{8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha} = \frac{1}{4}\,\frac{cosec\,\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha} \qquad (24)$$

für $\beta = 4\alpha$

$$cosec\,5\alpha = \frac{cosec\,\alpha\cdot cosec\,4\alpha}{\cos\alpha\cdot cosec\,\alpha + \cos 4\alpha\cdot cosec\,4\alpha}$$

$$= \frac{cosec\,\alpha}{16\cos^4\alpha - 12\cos^2\alpha + 1} \qquad (25)$$

u. s. w.

12. **Entwickelung einer Reihe für $cosec\,\alpha$ nach steigenden Potenzen von α.**

Die Reihe Bd. 1, pag 114, No. 14:

$$arc\,cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} + \ldots.$$

eignet sich nicht, durch Umkehrnng eine Reihe für $cosec\,\alpha$ zu finden, weil in derselben die Cosecanten in den Nennern sich befinden. Kehrt man die Reihe um: pag 111, No. 9

$$arcsin\,x = \alpha = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\,x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\ldots$$

so erhält man

$$sin\,\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \ldots\ldots$$

Nun kann man freilich nicht unmittelbar, wenn man nämlich in diese Reihe $sin\,\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha}$ setzt, eine Reihe für $cosec\,\alpha$ finden, allein es ist $sin\,\alpha\cdot cosec\,\alpha = 1$, und wenn man $cosec\,\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots$ setzt, so erhält man durch Multiplication beider Gleichnngen eine Reihe, aus welcher die nnbestimmten Coefficienten entwickelt werden können. Die allgemeine Form der Reihe ist aber zuerst näher zu betrachten. Schreibt man in

$$cosec\,\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \ldots$$

$-\alpha$ für α so ensteht

$$cosec\,(-\alpha) = +A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + E\alpha^4 - F\alpha^5 + G\alpha^6 - \ldots$$

Nnn ist aber $coseo(-\alpha) = -cosec\,\alpha$, beide sind entgegengesetzt gleich grofs nnd folglich dürfen die für $(-\alpha)$ positiv bleibenden Glieder nicht vorhanden sein, und die Reihe ist

$$cosec\,\alpha = B\alpha + D\alpha^3 + F\alpha^5 + H\alpha^7 + \ldots\ldots$$

Setzt man ferner $\alpha = 0$ so wird (nach No. 2) $cosec\,\alpha = \infty$, es ist also ein Glied erforderlich, welches α im Nenner hat, demnach ist die vollständige Form

$$cosec\,\alpha = \frac{A}{\alpha} + B\alpha + C\alpha^3 + D\alpha^5 + E\alpha^7 + \ldots$$

in der das erste Glied $\frac{A}{\alpha}$ für $(-\alpha)$ ebenfalls subtractiv wird. Verbindet man mit dieser allgemeinen Reihe die bestimmte

$$sin\,\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots\ldots$$

durch Multiplication, so erhält man:

$$\begin{aligned} 1 = A &+ B\alpha^2 + C\alpha^4 + D\alpha^6 + E\alpha^8 + F\alpha^{10} \\ &- \frac{A}{(3)}\alpha^2 - \frac{B}{(3)}\alpha^4 - \frac{C}{(3)}\alpha^6 - \frac{D}{(3)}\alpha^8 - \frac{E}{(3)}\alpha^{10} \\ &+ \frac{A}{(5)}\alpha^4 + \frac{B}{(5)}\alpha^6 + \frac{C}{(5)}\alpha^8 + \frac{D}{(5)}\alpha^{10} \\ &- \frac{A}{(7)}\alpha^6 - \frac{B}{(7)}\alpha^8 - \frac{C}{(7)}\alpha^{10} \\ &+ \frac{A}{(9)}\alpha^8 + \frac{B}{(9)}\alpha^{10} \\ &- \frac{A}{(11)}\alpha^{10} \end{aligned}$$

Hieraus

$$A - 1 = 0$$

$$B - \frac{A}{(3)} = 0$$

$$C - \frac{B}{(3)} + \frac{A}{(5)} = 0$$

$$D - \frac{C}{(3)} + \frac{B}{(5)} - \frac{A}{(7)} = 0$$

$$E - \frac{D}{(3)} + \frac{C}{(5)} - \frac{B}{(7)} + \frac{A}{(9)} = 0$$

$$F - \frac{E}{(3)} + \frac{D}{(5)} - \frac{C}{(7)} + \frac{B}{(9)} - \frac{A}{(11)} = 0$$

und endlich

$$A = 1$$

$$B = \frac{A}{(3)} = \frac{1}{(3)} = \frac{1}{6}$$

$$C = \frac{1}{(3)^2} - \frac{1}{(5)} = \frac{(5) - (3)^2}{(3)^2\cdot(5)} = \frac{7}{360}$$

$$D = \frac{(5)(7) - 2\cdot(3)^2(7) + (3)^2(5)}{(3)^3(5)(7)} = \frac{31}{15120}$$

u. s. w.

woraus

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{6}\alpha + \frac{7}{360}\alpha^3 + \frac{31}{15120}\alpha^5 + \ldots\ldots$$

vergleiche Cosinus, No. 16; Cotangente, No. 11, Cosinus versus, No. 4.

Cosinus eines Winkels oder Bogens α ist der Sinus des Complements von α, eine sogonannte Cofunction. Die Lagen der Sinns und der C. als trigonometrische Linien sind in dem Art.: Constructionen, pag. 80 und 81 mit Fig. 437 bis 440 für Winkel oder Bogen, die allen 4 Quadranten angehören, angeben; eben so ist der Beweis geführt, dafs die C. im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten Quadranten negativ sind. Ferner sind in demselben Art. folgende Aufgaben durch Zeichnung gelöst. Zu findeu:

$\varphi = Arc\left(cos = \pm\frac{c}{a}\right)$
pag. 82 No. 4, II. mit Fig. 441

$x = r\,cos^2\alpha$
pag. 83 No. 5, II. mit Fig. 442

$\varphi = Arc\left(cos^2 = \frac{a}{b}\right)$
pag. 84 No. 6, II. mit Fig. 445

$x = r\cdot cos^2\alpha$
pag. 84 No. 7, II. mit Fig. 446

$x = r\,sin\,\alpha\cdot cos\,\beta$
pag. 85 No. 8, II. mit Fig. 447

$x = r\cdot cos\,\alpha\cdot cos\,\beta$
pag. 86 mit Fig. 448 No. 9, I.

$x = r\,tg\,\alpha\,cot\,\beta$ „ „ No. 9, II.

$x = r\cdot cos\,\alpha\,cot\,\beta$ „ „ No. 9, III.

$x = r\cdot cos\,\alpha\cdot sec\,\beta$ „ „ No. 9, IV.

$x = r\cdot cos\,\alpha\cdot cosec\,\beta$ „ „ No. 9, V.

2. Aus Fig. 437 bis 440, wo $CE = \cos\alpha$ ist, hat man

$$\cos 0 = \cos(-360^\circ) = \sin 90^\circ = +1$$
$$\cos 90^\circ = \cos(-270^\circ) = \sin 0 = 0$$
$$\cos 180^\circ = \cos(-180^\circ) = \sin(-90^\circ) = -1$$
$$\cos 270^\circ = \cos(-90^\circ) = \sin(-180^\circ) = 0$$
$$\cos 360^\circ = \cos(-0) = \sin(-270^\circ) = +1$$

Ist α ein Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder ein Winkel zwischen 0 und 90° so ist

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos - (270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos - (270^\circ - \alpha)$$
$$= \sin(-\alpha) = -\sin\alpha = -\cos(90^\circ - \alpha)$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos - (180^\circ + \alpha)$$
$$= \sin - (90^\circ - \alpha) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(180^\circ + \alpha) = \cos - (180^\circ - \alpha)$$
$$= \sin - (90^\circ + \alpha) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos - (90^\circ + \alpha)$$
$$= \sin - (180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha = -\cos(90^\circ - o)$$
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \cos - (90^\circ - \alpha)$$
$$= \sin - (180^\circ + \alpha) = \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha)$$
$$= \sin - (270^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

3. Aus Fig. 437 bis 440 lassen sich folgende Formeln unmittelbar ableiten: Es ist nämlich

$$CE^2 + DE^2 = CD^2$$

oder $$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (1)$$

ferner $$CE : CD = AC : AG$$

oder $$\cos\alpha : 1 = 1 : \sec\alpha$$

woraus $$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \qquad (2)$$

Will man nun $\cos\alpha$ durch die übrigen trigonometrischen Functionen ausdrücken, so hat man aus 1.

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \qquad (3)$$

Da nun den 4 Figuren nach $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$, so ist aus 2

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \qquad (4)$$

und nach den 4 Figuren $\cot\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$

also $$\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}} \qquad (5)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \qquad (6)$$

aus dem Art. Cosecante, pag. 136 No. 3, Formel 9

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}}{\operatorname{cosec}\alpha} \qquad (7)$$

aus den 4 Figuren

$$\cos\alpha = 1 - \sin v\,\alpha \qquad (8)$$

und da $\sin\alpha = 1 - \cos v\,\alpha$

$$\cos\alpha = \sqrt{\cos v\,\alpha\,(2 - \cos v\,\alpha)} \qquad (9)$$

ferner hat man

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \qquad (10)$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \qquad (11)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \qquad (12)$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (13)$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \qquad (14)$$

$$\sin v\,\alpha = 1 - \cos\alpha \qquad (15)$$

$$\cos v\,\alpha = 1 - \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \qquad (16)$$

4. Pag. 89 bis 96 No. 14 und 15 ist die Formel synthetisch als richtig bewiesen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad (17)$$

und zwar für jeden beliebigen Werth von α und von β.

Desgleichen ist pag. 96 No. 17 die Formel

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (18)$$

welche analytisch aus Formel 17 hervorgeht, wenn man darin $\beta = \alpha$ setzt.

Desgl. pag. 96 No. 18 die Formel

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad (19)$$

welche analytisch wieder aus Formel 18 entspringt, wenn man für $\cos^2\alpha$ den Werth $1 - \sin^2\alpha$ setzt.

Desgleichen pag. 96 No. 19 die Formel

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad (20)$$

welche analytisch aus Formel 18 entsteht, wenn man für $\sin^2\alpha$ den Werth $1 - \cos^2\alpha$ setzt.

Aus Formel 17 erhält man durch Addition und Subtraction beider Formeln unmittelbar

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \qquad (21)$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad (22)$$

Schreibt man in Formel 20 den Werth $\frac{1}{2}\alpha$ für α, so entsteht durch Umformung

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \qquad (23)$$

und für $\alpha = 90^\circ \pm \alpha$ geschrieben, und da $\cos(90^\circ + \alpha)$ nach No. 2 $= -\sin\alpha$, $\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$ ist

$$\cos\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 \mp \sin\alpha}{2}} \qquad (24)$$

Beide Formeln sind pag. 99 und 100 No. 25 und 27 synthetisch bewiesen.

5. Pag. 89 bis 93 No. 14 sind die beiden Formeln

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Durch Subtraction dieser Formeln erhält man nach der nöthigen Umformung

$$\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2\sin\beta} \qquad (25)$$

diese Formel ist pag. 109 No. 46 synthetisch bewiesen.

Aus Formel 21 erhält man durch Umformung

$$\cos\alpha = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2\cos\alpha} \qquad (26)$$

diese Formel ist pag. 109 No. 47 synthetisch erwiesen.

Schreibt man in den Formeln 21 nnd 22:

$$\alpha \text{ für } \alpha+\beta,\ \beta \text{ für } \alpha-\beta$$

so entsteht $\frac{\alpha+\beta}{2}$ für α

nnd $\frac{\alpha-\beta}{2}$ für β

nnd man hat

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (27)$$

$$\cos\beta-\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (28)$$

Beide Formeln sind pag. 111 No. 51 nnd 52 synthetisch bewiesen.

Mnltiplicirt man die beiden Formeln 27 nnd 28 mit einander, so entsteht

$$\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$
$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

da nnn $2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin 2\alpha$,
so hat man

$$\cos^2\beta-\cos^2\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) \quad (29)$$

diese Formel ist pag. 116 No. 62 synthetisch bewiesen.

Mnltiplicirt man die beiden Formeln No. 17 mit einander, so entsteht:

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$$
$$=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha\,[1-\sin^2\beta]-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$

oder

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta \quad (30)$$

diese Formel ist pag. 117 No. 64 synthetisch erwiesen.

6. Setzt man zn der schon cirtirten Formel

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \text{ hinzn}$$
$$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$$

so entsteht

$$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$$

nnd $1-\sin 2\alpha=(\pm\sin\alpha\mp\cos\alpha)^2$

Schreibt man $\frac{1}{2}\alpha$ für α

so ist $\cos\frac{\alpha}{2}>\sin\frac{\alpha}{2}$,

damit also die rechte Seite der 2ten Gleichnng positiv bleibt

$$1+\sin\alpha=(\sin\tfrac{1}{2}\alpha+\cos\tfrac{1}{2}\alpha)^2$$
$$1-\sin\alpha=(\cos\tfrac{1}{2}\alpha-\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2$$

Wenn man nun radicirt, beide Gleichungen addirt nnd mit 2 dividirt so erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}) \quad (31)$$

Diese Formel ist pag. 107 No. 44 synthetisch bewiesen, nnd die Vorzeichen sind für die Werthe von α in allen 4 Qnadranten bestimmt.

7. Dividirt man die beiden Formeln 27 nnd 28 dnrch einander so erhält man

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cot\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (32)$$

$$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}=tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (33)$$

Ans Formel 17 hat man

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Dividirt man Zähler nnd Nennner der rechten Seite mit $\sin\alpha\cdot\cos\beta$ so entsteht

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\cot\alpha-tg\,\beta}{\cot\alpha+tg\,\beta} \quad (34)$$

Dividirt man Formel 17:

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

dnrch $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, so entsteht

$$\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta \quad (35)$$

8. Setzt man zn Formel 18:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$1+\cos 2\alpha=1+\cos^2\alpha-\sin^2=2\cos^2\alpha$$

so hat man dnrch Division

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tfrac{1}{2}(1-tg^2\alpha) \quad (36)$$

Verbindet man eben so

$$1-\cos 2\alpha=1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha$$

mit $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
so erhält man

$$\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\tfrac{1}{2}(\cot^2\alpha-1) \quad (37)$$

ferner

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=tg^2\alpha \quad (38)$$

Aus $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$$=\frac{2}{\sec^2\alpha}-1=\frac{2}{1+tg^2\alpha}-1$$

erhält man

$$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{\cot^2\alpha-1}{\cot^2\alpha+1} \quad (39)$$

9. Es ist die Sehne für den Centriwinkel 60° = dem Radins = 1

folglich $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

nnd $\cos^2 30^\circ=1-\sin^2 30^\circ=\frac{3}{4}$

folglich $\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

daher nach Formel 17:

$$\cos(30^\circ+\alpha)=\tfrac{1}{2}(\cos\alpha\sqrt{3}-\sin\alpha) \quad (40)$$

$$\cos(30^\circ-\alpha)=\tfrac{1}{2}(\cos\alpha\sqrt{3}+\sin\alpha) \quad (41)$$

hieraus

$$\cos(30^\circ+\alpha)+\cos(30^\circ-\alpha)=\cos\alpha\sqrt{3} \quad (42)$$

$$\cos(30^\circ-\alpha)-\cos(30^\circ+\alpha)=\sin\alpha \quad (43)$$

10. Ans Formel 21 hat man

$$\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)$$

Setzt man hierein statt α, nacheinander

$$\alpha+\beta,\ \alpha+2\beta,\ \alpha+3\beta\ldots.\ \alpha+(n-1)\beta$$

so entsteht

$\cos(\alpha+2\beta)=2\cos\beta\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha$
$\cos(\alpha+3\beta)=2\cos\beta\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+\beta)$
$\cos(\alpha+4\beta)=2\cos\beta\cos(\alpha+3\beta)-\cos(\alpha+2\beta)$
. . . .
$\cos(\alpha+n\beta)$
$=2\cos\beta\cos[\alpha+(n-1)\beta]-\cos[\alpha+(n-2)\beta]$ (44)

11. Aus Formel 22 hat man
$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta$
hiermit wie No. 10 verfahren entsteht:
$\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha-2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$
$\cos(\alpha+3\beta)=\cos(\alpha+\beta)-2\sin\beta\sin(\alpha+2\beta)$
$\cos(\alpha+4\beta)=\cos(\alpha+2\beta)-2\sin\beta\sin(\alpha+3\beta)$
. . . .
$\cos(\alpha+n\beta)$
$=\cos[\alpha+(n-2)\beta]-2\sin\beta\sin[\alpha+(n-1)\beta]$ (45)

12. Pag. 89 bis 96 No. 14 und 15 sind die Formeln entwickelt
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$
durch Subtraction entsteht
$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta.$

Schreibt man dafür
$2\sin\beta\cdot\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$
und setzt man hierein für α nacheinander die Werthe $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, ... $\alpha+n\beta$ so erhält man
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha$
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+2\beta)=\sin(\alpha+3\beta)-\sin(\alpha+\beta)$
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+3\beta)=\sin(\alpha+4\beta)-\sin(\alpha+2\beta)$
. . . .
$2\sin\beta\cos[\alpha+(n-2)\beta]$
$\quad=\sin[\alpha+(n-1)\beta]-\sin[\alpha+(n-3)\beta]$
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+(n-1)\beta]$
$\quad=\sin[\alpha+n\beta]-\sin[\alpha+(n-2)\beta]$
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+n\beta)$
$\quad=\sin[\alpha+(n+1)\beta]-\sin[\alpha+(n-1)\beta]$

Addirt man diese $n+1$ Gleichungen mit einander und bezeichnet die Summe $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+n\beta)$ mit S, so hat man

$$2\sin\beta\cdot S=\sin[\alpha+(n+1)\beta]+\sin(\alpha+n\beta)-\sin\alpha-\sin(n-\beta)$$

Nun ist

$$\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha(1+\cos\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}-2\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=2\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$$

Setzt man $\alpha+(n+1)\beta=\gamma$ so hat man die ersten beiden Glieder

$$\sin\gamma+\sin(\gamma-\beta)=2\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\gamma-\frac{\beta}{2}\right)$$

Folglich ist

$$S=\cos\frac{\beta}{2}\,\frac{\sin\left(\gamma-\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\beta}$$
$$=\sin\frac{[\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta]-\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin(\frac{1}{2}\beta).}\qquad(46)$$

Setzt man in den Zähler

$$\begin{array}{r} \alpha+(n+\frac{1}{2})\beta=\alpha^1+\beta^1 \\ \alpha-\frac{1}{2}\beta=\alpha^1-\beta^1 \\ \hline 2\alpha+n\beta=2\alpha^1. \\ (n+1)\beta=2\beta^1 \end{array}$$

so ist

Nun ist wie in No. 12
$\sin(\alpha^1+\beta^1)-\sin(\alpha^1-\beta^1)=2\cos n^1\sin\beta^1$
Man hat daher

$$S=\frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}n\beta)\cdot\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\qquad(47)$$

13. Setzt man in die Formeln No. 10 für β den Werth α, so erhält man

$\cos\alpha=\cos\alpha$
$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$\cos 3\alpha=2\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha-\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
$\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$
$\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$
$\cos 6\alpha=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1$
$\cos 7\alpha=64\cos^7\alpha-112\cos^5\alpha+56\cos^3\alpha-7\cos\alpha$
$\cos 8\alpha=128\cos^8\alpha-256\cos^6\alpha+160\cos^4\alpha-32\cos^2\alpha+1$
. . . .

$$\cos n\alpha=2^{n-1}\cos^n\alpha-\frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha+\frac{n\cdot n-3}{1\cdot 2}2^{n-5}\cos^{n-4}\alpha-\frac{n\cdot n-4\cdot n-5}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}\cos^{n-6}\alpha$$
$$+\frac{n\cdot n-5\cdot n-6\cdot n-7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}\cos^{n-8}\alpha-\ldots.$$

14. Setzt man in Formel 21
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
für β nach einander $\alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots\ldots (n-1)\alpha$, so erhält man

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos 3\alpha=\cos\cdot\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$
$\cos 4\alpha=\cos\alpha\cdot\cos 3\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha$
....
$\cos n\alpha=\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha-\sin\alpha\cdot\sin(n-1)\alpha$

In pag. 89 bis 93 No. 14 ist für alle Werthe von α die Formel erwiesen
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$
woraus für β nach einander α, 2α, $3\alpha\ldots$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\sin 3\alpha=\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha$
$\sin 4\alpha=\sin\alpha\cos 3\alpha+\cos\alpha\cdot\sin 3\alpha$
....
$\sin(n\alpha)=\sin\alpha\cos(n-1)\alpha+\cos\alpha\cdot\sin(n-1)\alpha$

Hiernach erhält man

1. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
   $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2. $\cos 3\alpha=\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-\sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$
   $\sin 3\alpha=\sin\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha$
3. $\cos 4\alpha=\cos\alpha(\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha)-\sin\alpha(3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^3\alpha)$
   $=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$
   $\sin 4\alpha=\sin\alpha(\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha)+\cos\alpha(3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^3\alpha)$
   $=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\sin^3\cos\alpha$

Schreibt man die bis hier gewonnenen Reihen für die $\cos$ und $\sin$ der Vielfachen des Winkels untereinander, so erhält man

$$
\begin{array}{lllll}
\cos 2\alpha=\cos^2\alpha & & -\sin^2\alpha & & \\
\sin 2\alpha= & +2\sin\alpha\cdot\cos\alpha & & & \\
\cos 3\alpha=\cos^3\alpha & & -3\cos\alpha\sin^2\alpha & & \\
\sin 3\alpha= & +3\cos^2\alpha\sin\alpha & & -\sin^3\alpha & \\
\cos 4\alpha=\cos^4\alpha & & -6\cos^2\alpha\sin^2\alpha & & +\sin^4\alpha \\
\sin 4\alpha= & +4\cos^3\alpha\sin\alpha & & -4\cos\alpha\sin^3\alpha &
\end{array}
$$

Zwei Cosinus und Sinus gleichvielfacher Winkel bilden hiernach zusammen eine Reihe der aufeinander folgenden Glieder des Binoms einer mit dem Vielfachen des Winkels gleich hohen Potenz; nur mit dem Unterschied, dafs jede Reihe mit additivem Gliede anfängt und ferner mit subtractiven und additiven Gliedern abwechselt.

Dies Gesetz erweist sich, so weit man mit den Vielfachen fortfährt und allgemein, wenn man das Gesetz für $\cos n\alpha$ und $\sin n\alpha$ als richtig annimmt und hieraus die Reihe für $\cos(n+1)\alpha$ und $\sin(n+1)\alpha$ entwickelt: Ist nämlich

$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-n_2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+n_4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-n_6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha+\ldots$
$\sin n\alpha=n_1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha-n_3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+n_5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha-n_7\cos^{n-7}\alpha\sin^7+\ldots.$

So findet man aus

1. $\cos(\alpha+n\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos n\alpha-\sin\alpha\sin n\alpha$
2. $\sin(\alpha+n\alpha)=\sin\alpha\cos n\alpha+\cos\alpha\cdot\sin n\alpha$

$\cos(n+1)\alpha=\cos\alpha\,[\cos^n\alpha-n_2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+n_4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-n_6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha+\ldots.]$
$\qquad-\sin\alpha\,[n_1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-n_3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+n_5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\ldots.]$

hieraus

$\cos(n+1)\alpha=\cos^{n+1}\alpha-(n_1+n_2)\cos^{n-1}\alpha\sin^2\alpha+(n_3+n_4)\cos^{n-3}\alpha\sin^4\alpha$
$\qquad-(n_5+n_6)\cos^{n-5}\alpha\sin^6\alpha+\ldots..$

Nun ist in dem Art. Binomial-Coefficient No. 2, pag. 368 bewiesen, dafs der $m$te Coefficient vor $(a+b)^{n+1}$ = ist der Summe des $m$ten und des $(m-1)$ten Coefficienten von $(a+b)^n$; demnach hat man

$\cos(n+1)\alpha=\cos^{n+1}\alpha-(n+1)_2\cos^{n-1}\alpha\sin^2\alpha+(n+1)_4\cos^{n-3}\alpha\sin^4\alpha$
$\qquad-(n+1)_6\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^6\alpha+\ldots..$

Eben so erhält man aus 2.

$\sin(n+1)\alpha=\sin\alpha\,[\cos^n\alpha-n_2\cos^{n-2}\sin^2\alpha+n_4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-n_6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha+\ldots]$
$\qquad+\cos\alpha\,[n_1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-n_3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+n_5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\ldots.]$

woraus

$\sin(n+1)\alpha=(1+n_1)\cos^n\alpha\sin\alpha-(n_2+n_3)\cos^{n-2}\alpha\sin^3\alpha+(n_4+n_5)\cos^{n-4}\alpha\sin^5\alpha-..]$

folglich

$$\sin(n+1)\alpha = (n+1)_1 \cos^n\alpha \sin\alpha - (n+1)_3 \cos^{n-2}\alpha \sin^3\alpha + (n+1)_5 \cos^{n-4}\alpha \sin^5\alpha - \ldots.$$

womit das obige Gesetz allgemein bewiesen ist.

15. Wie in No. 13 die Cosinus der vielfachen Bogen in Reihen von Potenzen des einfachen Bogens dargestellt sind, so kann man durch Umformung derselben auch die Potenzen der Cosinus des einfachen Bogens in Reihen von Cosinus der vielfachen Bogen darstellen; man hat nämlich aus 13

1. $\cos\alpha = \cos\alpha$
2. $2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$
3. $4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$
4. $8\cos^4\alpha = \cos 4\alpha + 8\cos^2\alpha - 1$
5. $16\cos^5\alpha = \cos 5\alpha + 20\cos^3\alpha - 5\cos\alpha$
6. $32\cos^6\alpha = \cos 6\alpha + 48\cos^4\alpha - 18\cos^2\alpha + 1$
7. $64\cos^7\alpha = \cos 7\alpha + 112\cos^5\alpha - 56\cos^3\alpha + 7\cos\alpha$
8. $128\cos^8\alpha = \cos 8\alpha + 256\cos^6\alpha - 160\cos^4\alpha + 32\cos^2\alpha - 1$

. . . .

9. $$2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + \frac{n}{1} 2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha - \frac{n \cdot n-3}{1 \cdot 2} 2^{n-5}\cos^{n-4}\alpha + \frac{n \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-7}\cos^{n-6}\alpha - \frac{n \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9}\cos^{n-8}\alpha + \ldots\ldots$$

Aus 2 hat man in 4:

$$8\cos^4\alpha = \cos 4\alpha + 4(\cos 2\alpha + 1) - 1 = \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3$$

Aus 3 hat man in 5:

$$16\cos^5\alpha = \cos 5\alpha + 5(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha) - 5\cos\alpha$$
$$= \cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha$$

Aus 2 und 4 hat man in 6:

$$32\cos^6\alpha = \cos 6\alpha + 6(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3) - 9(\cos 2\alpha + 1) + 1$$
$$= \cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10$$

Aus 3 und 5 hat man in 7:

$$64\cos^7\alpha = \cos 7\alpha + 7(\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha) - 14(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha) + 7\cos\alpha$$
$$= \cos 7\alpha + 7\cos 5\alpha + 21\cos 3\alpha + 35\cos\alpha$$

Aus 6, 4 und 2 hat man in 8:

$$128\cos^8\alpha = \cos 8\alpha + 8(\cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10) - 20(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3) + 16(\cos 2\alpha + 1) - 1$$
$$= \cos 8\alpha + 8\cos 6\alpha + 28\cos 4\alpha + 56\cos 2\alpha + 35$$

Das allgemeine Glied, in welchem die Potenzen zu entwickeln sind ist

$$2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + \frac{n}{1} 2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha - \frac{n \cdot n-3}{1 \cdot 2} 2^{n-5}\cos^{n-4}\alpha + \frac{n \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^{n-7}\cos^{n-6}\alpha - \frac{n \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9}\cos^{n-8} + \ldots$$

16. Entwickelung des Cosinus in eine nach den Potenzen seines Bogens fortlaufende Reihe. Bd. I, pag. 112 gibt die Reihe:

$$Arc \cdot \cos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots.\right)$$

oder

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot \cos^5\alpha}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5\cos^7\alpha}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots.\right)$$

woraus

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot \cos^5\alpha}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot \cos^7\alpha}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots. \qquad \text{I.}$$

Für die unmittelbare Entwickelung der Reihe würde man nun setzen:

$$\cos\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots.$$

wo man dann die unbestimmten Coefficienten A, B, C, D, ... zu bestimmen hätte.

Für $\alpha = 0$ wird $\cos\alpha = 1$; mithin hat man

$$\cos 0 = A = 1$$

Die Entwickelung gibt also, wegen des vorstehenden unbenannten Gliedes $A = 1$, für die Coefficienten A, B, C ... lauter unendliche Reihen, und die Reihe I. ist für den vorliegenden Zweck unbrauchbar.

Es ist aber $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, und man kann die Reihe I. verwandeln in die:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots.$$

oder $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$ gesetzt.

$$\beta = \sin\beta + \frac{\sin^3\beta}{2 \cdot 3} + \frac{3\sin^5\beta}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot \sin^7\beta}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \sin^9\beta}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots.. \qquad \text{II.}$$

Setzt man nun

$\sin\beta = A + B\beta + C\beta^2 + D\beta^3 + \ldots.$

so ist, da *sinus* für $\beta = 0$ ebenfalls $= 0$ wird, $A = 0$; die Reihe wird:

$\sin\beta = B\beta + C\beta^2 + D\beta^3 + E\beta^4 + \ldots.$

und ist der Entwickelung fähig

Diese allgemeine Reihe läfst sich aber noch weiter vereinfachen; denn setzt man $-\beta$ für β, so entsteht

$\sin(-\beta) = -B\beta + C\beta^2 - D\beta^3 + E\beta^4 + F\beta^5 + \ldots.$

Liegt aber $+\beta$ im ersten, im zweiten, im dritten, im vierten Quadrant, so liegt $-\beta$ im vierten, im dritten, im zweiten, im ersten Quadrant, die *sinus* von $+\beta$ und $-\beta$ sind mit entgegengesetzten Vorzeichen einander gleich; wenn also

$\sin(+\beta) = \pm B\beta \pm C\beta^2 \pm D\beta^3 \pm E\beta^4 \pm F\beta^5 \pm \ldots.$

so mufs sein

$\sin(-\beta) = \mp B\beta \mp C\beta^2 \mp D\beta^3 \mp E\beta^4 \mp F\beta^5 \mp \ldots.$

Folglich ist es unmöglich, dafs die Reihe für $\sin\beta$ Glieder mit α in geraden Exponenten haben kann, und die allgemeine Form der Reihe ist

$\sin\beta = A\beta + B\beta^3 + C\beta^5 + D\beta^7 + E\beta^9 + \ldots\ldots$ III.

Substituirt man diese Reihe in die Reihe II und reducirt auf 0, so hat man

$$\begin{array}{lllll}
0 = & -\beta & & & \\
(\sin\beta) & +A\beta + B \cdot \beta^3 & +C\beta^5 & +D\beta^7 & +E\beta^9 \\
\left(\frac{\sin^3\beta}{2 \cdot 3}\right) & +\frac{A^3}{2 \cdot 3} \cdot \beta^3 & +\frac{3A^2B}{2 \cdot 3}\beta^5 & +\frac{3(AB^2 + A^2C)}{2 \cdot 3}\beta^7 & +\frac{B^3 + 6ABC + 3A^2D}{2 \cdot 3}\beta^9 \\
\left(\frac{3\sin^5\beta}{2 \cdot 4 \cdot 5}\right) & & +\frac{3A^5}{2 \cdot 4 \cdot 5}\beta^5 & +\frac{3 \cdot 5 A^4B}{2 \cdot 4 \cdot 5}\beta^7 & +\frac{3(10A^3B^2 + 5A^4C)}{2 \cdot 4 \cdot 5}\beta^9 \\
\left(\frac{3 \cdot 5 \sin^7\beta}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\right) & & & +\frac{3 \cdot 5 A^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\beta^7 & +\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot A^6B}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\beta^9 \\
\left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin^9\beta}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}\right) & & & & +\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot A^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}\beta^9
\end{array}$$

....

Setzt man jede Summe der untereinander stehenden zu einerlei Potenz von β gehörenden Coefficienten $= 0$, so erhält man

$$A - 1 = 0$$

$$\frac{A^3}{2 \cdot 3} + B = 0$$

$$\frac{3A^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3A^2B}{2 \cdot 3} + C = 0$$

$$\frac{3 \cdot 5 A^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 A^4B}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3(AB^2 + A^2C)}{2 \cdot 3} + D = 0$$

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 A^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 A^6B}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3(10A^3B^2 + 5A^4C)}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{B^3 + 6ABC + 3A^2D}{2 \cdot 3} + E = 0$$

....

woraus aus der ersten Gleichung

$A = 1$

Diesen Werth in die zweite Gl. gesetzt, giebt

$$B = -\frac{1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{(3)}$$

Die Werthe von A und B in die dritte Gl. gesetzt, u. s. f. ergibt

$$C = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = +\frac{1}{(5)}$$

$$D = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{1}{(7)}$$

$$E = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = +\frac{1}{(9)}$$

u. s. w.

Man hat also, diese Werthe in Gl. III. substituirt

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{(3)} + \frac{\beta^5}{(5)} - \frac{\beta^7}{(7)} + \frac{\beta^9}{(9)} - \ldots.$$

Eine Gleichung, die für jeden beliebi-

gen Werth von β, nicht nur für den ursprünglichen $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, sondern auch für $\beta = \alpha$ gültig ist; also

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots.. \quad \text{IV.}$$

Um aus dieser Reihe die für $\cos\alpha$ zu entwickeln, verfährt man elementar, wenn man $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ setzt; dann ist

$$\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots..$$

woraus

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \ldots\right)^2$$

und das Quadriren ausgeführt:

$$\cos^2\alpha = 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{3} - \frac{2\alpha^6}{3\cdot 3\cdot 5} + \frac{\alpha^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} - \frac{2\alpha^{10}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots.$$

Bei der successiven Wurzelansziehung erhält man das erste Glied a der $\sqrt{\ } = 1$; um das zweite Glied b zu finden dividirt man mit $2a = 2$ in α^2 und erhält $-\frac{\alpha^2}{2}$, für das dritte mit 2 in α^4 dividirt, erhält man α^4, also eine Reihe mit nur geraden Potenzen von α. Daher setze man

$$\sqrt{1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{3} - \frac{2\alpha^6}{3\cdot 3\cdot 5} + \ldots}$$
$$= 1 + A\alpha^2 + B\alpha^4 + C\alpha^6 + D\alpha^8 + \ldots..$$

also

$$1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{3} - \frac{2\alpha^6}{3\cdot 3\cdot 5} + \ldots$$
$$= (1 + A\alpha^2 + B\alpha^4 - C\alpha^6 + \ldots)^2$$

Nachdem wirklich quadrirt, die Gleichung auf 0 reducirt worden, erhält man die Glieder für die Coefficienten:

$$(2A + 1)\alpha^2 = 0$$
$$\left(A^2 + 2B - \frac{1}{3}\right)\alpha^4 = 0$$
$$\left(2AB + 2C + \frac{2}{3\cdot 3\cdot 5}\right)\alpha^6 = 0$$
$$\left(B^2 + 2AC + 2D - \frac{1}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right)\alpha^8 = 0$$
$$\left(2BC + 2AD + 2E + \frac{2}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\right)\alpha^{10} = 0$$

u. s. w.

Hieraus

$$A = -\frac{1}{2}$$
$$B = +\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{(4)}$$
$$C = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{(6)}$$
$$D = +\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{1}{(8)}$$
$$E = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{(10)}$$

u. s. w. Mithin

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} - \frac{\alpha^{10}}{(10)} + \ldots. \quad \text{V.}$$

Durch Differenziren der Gleichung IV gelangt man auf leichterem Wege zur Gleichung V. Denn es ist

$$\partial\sin\alpha \cdot \partial\alpha = \partial\alpha - \frac{3\alpha^2\partial\alpha}{(3)} + \frac{5\alpha^4\partial\alpha}{(5)} - \frac{7\alpha^6\partial\alpha}{(7)} + \frac{9\alpha^8\partial\alpha}{(9)} - \ldots.$$

oder

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{(2)} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} + \ldots....$$

Vergleiche Cosecante No. 12, Cotangente No. 11, Cosinus versus No. 4.

Cosinus versus eines Bogens oder Winkels α ist der Sinus versus oder Quersinus des Complements von α, eine sogenannte Cofunction.

In den Figuren 437 bis 440 ist AC der feste Schenkel, CD der bewegliche, und dieser liegt in den aufeinander folgenden Figuren im 1, 2, 3 und 4ten Quadrant. Das Stück AE des festen Schenkels zwischen dem Sinus DE und der Tangente AG ist der Sinus versus von α; der Sinv. des $\angle DCB$, des Complements von α ist demnach das Stück BF dessen festen Schenkels BC zwischen dem Sinue DF und der Tangente BH dieses Complementswinkels.

Der $\operatorname{cosv} BF$ Fig. 438 ist = dem $\operatorname{cosv} BF$ Fig. 437; d. h.

$$\operatorname{cosv}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{cosv}\alpha$$

Die $\operatorname{cosv} BF$ Fig. 439 und 440 dagegen sind = in Fig. 437 mit

$$BC + CF = 1 + \sin\alpha = 2BC - BF = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$

d. h.

$$\operatorname{cosv}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{cosv}(360^\circ - \alpha) = 1 + \sin\alpha$$
$$= 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$

Dies ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung: Es ist Fig. 437 augenscheinlich $\operatorname{cosv}\alpha = BF = CB - CF = 1 - \sin\alpha$

Nun ist nach pag. 81, No. 2 der sin im 1. und 2. Quadrant positiv, im 3. und 4. Quadrant negativ, folglich für den ersten und zweiten Quadrant

$$cosv = 1 - sin\,\alpha$$

für den 3. und 4. Quadrant

$$= 1 - (-\,sin\,\alpha) = 1 + sin\,\alpha = 1 + (1 - cosv\,\alpha) = 2 - cosv\,\alpha$$

2. Es ergibt sich aus dem Vorigen

$$cosv\,0 \;\;= cosv - 360^0 = sinv\,90^0 \;\;= 1$$
$$cosv\,90^0 = cosv - 270^0 = sinv\,0 \;\;= 0$$
$$cosv\,180^0 = cosv - 180^0 = sinv - 90^0 = 1$$
$$cosv\,270^0 = cosv - 90^0 = sinv - 180^0 = 2$$
$$cosv\,360^0 = cosv - 0 \;\;= sinv - 270^0 = 1$$

Ist α ein Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder ein Winkel zwischen 0 und 90^0 so ist

$$cosv(90^0 - \alpha) = cosv - (270^0 + \alpha) = sinv\,\alpha$$
$$cosv(90^0 + \alpha) = cosv - (270^0 - \alpha) = sinv\,\alpha$$
$$cosv(180^0 - \alpha) = cosv - (180^0 + \alpha) = cosv\,\alpha$$
$$cosv(180^0 + \alpha) = cosv - (180^0 - \alpha) = 2 - cosv\,\alpha$$
$$cosv(270^0 - \alpha) = cosv - (90^0 + \alpha) = 2 - sinv\,\alpha$$
$$cosv(270^0 + \alpha) = cosv - (90^0 - \alpha) = 2 - sinv\,\alpha$$
$$cosv(360^0 - \alpha) = cosv - \alpha = 2\,cosv\,\alpha$$

3. Will man nun $cosv\,\alpha$ durch die übrigen trigonometrischen Functionen ausdrücken, so hat man:

$$cosv\,\alpha = 1 - sin\,\alpha$$
$$cosv\,\alpha = 1 - \sqrt{1 - cos^2\alpha}$$
$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$
$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + cot^2\alpha}}$$
$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{\sqrt{sec^2\alpha - 1}}{sec\,\alpha}$$
$$cosv\,\alpha = \frac{cosec\,\alpha - 1}{cosec\,\alpha}$$
$$cosv\,\alpha = 1 - \sqrt{sinv\,\alpha\,(2 - sinv\,\alpha)}$$

Ferner hat man

$$sin\,\alpha = 1 - cosv\,\alpha$$
$$cos\,\alpha = \sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}$$
$$tg\,\alpha = \frac{1 - cosv\,\alpha}{\sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}}$$
$$cot\,\alpha = \frac{\sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}}{1 - cosv\,\alpha}$$
$$sec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}}$$
$$cosec = \frac{1}{1 - cosv\,\alpha}$$
$$sinv\,\alpha = 1 - \sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}$$

4. Entwickelung des Cosinus versus in eine nach den Potenzen seines Bogens fortlaufende Reihe.

In dem vor. Art. pag. 144 No 16 ist die Reihe entwickelt

$$sin\,\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots.$$

Nun ist $sin\,\alpha = 1 - cosv\,\alpha$
oder $cosv\,\alpha = 1 - sin\,\alpha$
daher hat man

$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^3}{(3)} - \frac{\alpha^5}{(5)} + \frac{\alpha^7}{(7)} - \frac{\alpha^9}{(9)} + \ldots..$$

Setzt man $\alpha = -\alpha$ so hat man

$$cosv\,(-\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{7} + \ldots.$$

also

$$cosv\,(-\alpha) = 1 + sin\,\alpha = 2 - cosv\,\alpha$$

Zu demselben Resultat gelangt man durch Umkehrung der Reihe Bd. 1, pag. 114 No. 16

$$\alpha = 1 - cosv\,\alpha + \frac{(1 - cosv\,\alpha)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3\,(1 - cosv\,\alpha)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot (1 - cosv\,\alpha)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots.$$

Denn setzt man

$$cosc\,\alpha = A + B\alpha^2 + C\alpha^3 + D\alpha^4 + \ldots\ldots$$

so sieht man bei ähnlichen Betrachtungen wie dort, dafs die Glieder mit den geraden Potenzen von α fortfallen, und da für $\alpha = 0$, $cosv = 1$ wird, so läfst sich die Reihe für $cosv\,\alpha$ vereinfachen in

$$cosv\,\alpha = 1 + A\alpha + B\alpha^3 + C\alpha^5 + D\alpha^7 + E\alpha^9 + \ldots..$$

wo das erste unbenannte Glied nicht wie beim Cosinus die Entwicklung unmöglich macht. Denn man erhält

$$(1 - cosv\,\alpha) = -A\alpha - B\alpha^3 - C\alpha^5 - D\alpha^7 - \ldots.$$
$$\frac{(1 - cosv\,\alpha)^3}{2 \cdot 3} = -\frac{A^3}{2 \cdot 3}\alpha^3 - \frac{3A^2B}{2 \cdot 3}\alpha^5 - \frac{3A}{2 \cdot 3}(B^2 + AC)\alpha^7 - \ldots.$$
$$\frac{3\,(1 - cosv\,\alpha)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} = -\frac{3A^5}{2 \cdot 4 \cdot 5}\alpha^5 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 5}A^4B\alpha^7 - \ldots.$$
$$\frac{3 \cdot 5 \cdot (1 - cosv\,\alpha)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{3 \cdot 5A^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\alpha^7 - \ldots.$$

Hieraus entsteht:

$$0 = -\alpha(A+1) - \alpha^3\left(B + \frac{A^3}{2\cdot 3}\right) - \alpha^5\left(C + \frac{1}{2}A^2B + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 5}A^5\right) -$$
$$-\alpha^7\left(D + \tfrac{1}{2}A(B^2 + AC) + \tfrac{3}{8}A^4B + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}A^7\right) - \ldots.$$

woraus

$$A = -1$$
$$B = +\frac{1}{6} = \frac{1}{(3)}$$
$$C = -\frac{1}{120} = -\frac{1}{(5)}$$
$$D = +\frac{1}{5040} = \frac{1}{(7)}$$

u. s. w. und

$$\cos v\,\alpha = 1 - \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^3}{(3)} - \frac{\alpha^5}{(5)} + \frac{\alpha^7}{(7)} - \ldots.$$

Vergleiche Cosecante No. 12, Cosinus No. 16, Cotangente No. 11.

Cotangente eines Winkels oder Bogens α ist die Tangente des Complements von α, eine sogenannte Cofunction. Die Lagen der Cot als trigonometrische Linien sind in dem Art.: Constructionen, trigonometrische pag. 80 und 81 mit Fig. 437 bis 440 für Winkel oder Bogen, die allen 4 Quadranten angehören, mitgetheilt; eben so ist der Beweis geführt, dafs die C. im ersten und dritten Quadrant positiv, im zweiten und vierten Quadrant negativ sind. Ferner sind in demselben Art folgende Aufgaben durch Zeichnung gelöst. Zu finden:

$\varphi = Arc\left(\cot = \pm\frac{c}{b}\right)$
pag. 82, No. 4, IV. mit Fig. 441

$x = r\cdot\cot^2\alpha$
pag. 82, No. 5, IV. mit Fig. 442

$\varphi = Arc\left(\cot^2 = \frac{a}{b}\right)$
pag. 84, No. 6, IV. mit Fig. 445

$x = r\cdot\cot^3\alpha$
pag. 85, No. 7, IV. mit Fig. 443

$x = r\cdot\sin\alpha\cdot\cot\beta$
pag. 85, No. 8, IV. mit Fig. 447

$x = r\cdot\cos\alpha\cdot\cot\beta$
pag. 86, No. 9, III. mit Fig. 448

$x = r\cdot tg\,\alpha\cdot\cot\beta$
pag. 86, No. 10, II. mit Fig. 449

$x = r\cdot\cot\alpha\cdot\cot\beta$
pag. 87, No. 11. I. mit Fig. 449

$x = r\cdot\cot\cdot\alpha\,\sec\beta$
pag. 87, No. 11. II. mit Fig. 449

$x = r\cdot\cot\alpha\cdot\operatorname{cosec}\beta$
pag. 87, No. 11. III. mit Fig. 449

2. Aus Fig. 437 bis 440, wo $BH = \cot\alpha$ ist, hat man

$\cot 0 \quad = \cot - 360^\circ = tg\,90^\circ = \infty$
$\cot 90^\circ \; = \cot - 270^\circ = tg\,0 = 0$
$\cot 180^\circ = \cot - 180^\circ = tg - 90^\circ = -\infty$
$\cot 270^\circ = \cot - 90^\circ \;\; = tg - 180^\circ = 0$
$\cot 360^\circ = \cot - 0 \quad = tg - 270^\circ = -\infty$

Ist α ein Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder ein Winkel zwischen 0° und 90°, so ist

$\cot(90^\circ - \alpha) \;= \cot - (270^\circ + \alpha) = +\,tg\,\alpha$
$\cot(90^\circ + \alpha) \;= \cot - (270^\circ - \alpha) = -\,tg\,\alpha$
$\cot(180^\circ - \alpha) = \cot - (180^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$
$\cot(180^\circ + \alpha) = \cot - (180^\circ - \alpha) = +\cot\alpha$
$\cot(270^\circ - \alpha) = \cot - (90^\circ + \alpha) \;= +\,tg\,\alpha$
$\cot(270^\circ + \alpha) = \cot - (90^\circ - \alpha) \;= -\,tg\,\alpha$
$\cot(360^\circ - \alpha) = \cot(-\alpha) \qquad\quad = -\cot\alpha$

3. Aus 437 bis 440 lassen sich folgende Formeln unmittelbar ableiten. Es ist nämlich

$$BC^2 + BH^2 = CH^2$$

oder
$$1 + \cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad (1)$$

Ferner ist $BH : DF = BC : CF$
oder $BH : CE = AC : DE$ 1
und $CE : AC = DE : AG$ 2
so ist $BH : AC = AC : AG$ 3
für 1 kommt $\cot\alpha : \cos\alpha = 1 : \sin\alpha$
" 2 " $\cos\alpha : 1 = \sin\alpha : tg\,\alpha$
" 3 " $\cot\alpha : 1 = 1 : tg\,\alpha$

also 1.
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

3.
$$\cot\alpha\cdot tg\,\alpha = 1 \qquad (3)$$

Will man nun $\cot\alpha$ durch die übrigen trigonometrischen Functionen ausdrücken, so hat man

aus 2.
$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \qquad (4)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \qquad (5)$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} \qquad (6)$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} \qquad (7)$$

$$\cot\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 - 1} \qquad (8)$$

$$\cot\alpha = \frac{1 - \sin v\,\alpha}{\sqrt{\sin v\,\alpha\,(2 - \sin v^2\alpha}} \qquad (9)$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{\cos v\,\alpha\,(2 - \cos v^2\alpha)}}{1 - \cos v\,\alpha} \qquad (10)$$

Ferner hat man

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}} \qquad (11)$$

$$\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}} \qquad (12)$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad (13)$$

$$sec\,\alpha = \frac{\sqrt{1+cot^2\alpha}}{cot\,\alpha} \qquad (14)$$

$$cosec\,\alpha = \sqrt{1+cot^2\alpha} \qquad (15)$$

$$sinv\,\alpha = 1 - \frac{cot\,\alpha}{\sqrt{1+cot^2\alpha}} \qquad (16)$$

$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+cot^2\alpha}} \qquad (17)$$

4. Aus den pag. 89 bis 96 entwickelten Formeln:

1) $cos(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta \mp sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$

2) $sin(\alpha \pm \beta) = sin\,\alpha \cdot cos\,\beta \pm cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$

erhält man durch Division

3) $cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{cos\,\alpha \cdot cos\,\beta \mp sin\,\alpha \cdot sin\,\beta}{sin\,\alpha \cdot cos\,\beta \pm cos\,\alpha \cdot sin\,\beta}$

Je nachdem man nun mit einem der 4 Glieder des rechts stehenden Bruchs in die anderen dividirt, hat man

$$4) \quad cot(\alpha \pm \beta) = \frac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta \mp 1}{cot\,\beta \pm cot\,\alpha} = \frac{1 \mp tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}{tg\,\alpha \pm tg\,\beta} = \frac{cot\,\alpha \mp tg\,\beta}{1 \pm cot\,\alpha \cdot cot\,\beta} = \frac{cot\,\beta \mp tg\,\alpha}{cot\,\beta \pm 1} \qquad (18)$$

Diese beide Formeln sind bereits pag. 112, No. 55 und pag. 113 No. 56 synthetisch erwiesen worden.

Aus $\quad cot\,\alpha \pm cot\,\beta = \dfrac{cos\,\alpha}{sin\,\beta} + \dfrac{cos\,\beta}{sin\,\beta} = \dfrac{cos\,\alpha \cdot sin\,\beta \pm cos\,\beta \cdot sin\,\alpha}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta}$

ist

$$cot\,\alpha \pm cot\,\beta = \frac{sin(\beta \pm \alpha)}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta} \qquad (19)$$

Diese beide Formeln sind bereits pag. 114, No. 59 und pag. 115, No. 60 synthetisch erwiesen worden.

5. Aus den 4 Formeln No. 4 erhält man:

1) $sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta) = 2sin\,\alpha \cdot cos\,\beta$

2) $sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta) = 2cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$

3) $cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta) = 2cos\,\alpha \cdot cos\,\beta$

4) $cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta) = 2sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$

Setzt man hierein $\alpha+\beta=\gamma$; $\alpha-\beta=\delta$ so entsteht

5) $sin\,\gamma + sin\,\delta = 2\,sin\dfrac{\gamma+\delta}{2} \cdot cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}$

6) $sin\,\gamma - sin\,\delta = 2\,cos\dfrac{\gamma+\delta}{2} \cdot sin\dfrac{\gamma-\delta}{2}$

7) $cos\,\gamma + cos\,\delta = 2\,cos\dfrac{\gamma+\delta}{2} \cdot cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}$

8) $cos\,\delta - cos\,\gamma = 2\,sin\dfrac{\gamma+\delta}{2} \cdot sin\dfrac{\gamma-\delta}{2}$

Dividirt man die 7te Gleichung durch die 5te, so erhält man

$$cot\frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{cos\,\gamma + cos\,\delta}{sin\,\gamma + sin\,\delta} \qquad (20)$$

Dividirt man die 7te Gl. durch die 6te

$$cot\frac{\gamma-\delta}{2} = \frac{cos\,\gamma + cos\,\delta}{sin\,\gamma - sin\,\delta} \qquad (21)$$

Dividirt man die 6te Gl. durch die 8te

$$cot\frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{sin\,\gamma - sin\,\delta}{cos\,\delta - cos\,\gamma} \qquad (22)$$

Dividirt man die 5te Gl. durch die 8te

$$cot\frac{\gamma-\delta}{2} = \frac{sin\,\gamma + sin\,\delta}{cos\,\delta - cos\,\gamma} \qquad (23)$$

6. Schreibt man in Formel 18, α für β, so erhält man

$$cot\,2\alpha = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{2sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha}$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit $sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$, so erhält man

$$cot\,2\alpha = \tfrac{1}{2}(cot\,\alpha - tg\,\alpha) \qquad (24)$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit $cos^2\alpha$,

$$cot\,2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{2tg\,\alpha} \qquad (25)$$

7. Dividirt man die ersten beiden Gleichungen in 4 durch $sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$, so erhält man

$$\frac{cos(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta} = \frac{cos\,\alpha \cdot cos\,\beta}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta} - 1$$

$$\frac{cos(\alpha-\beta)}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta} = \frac{cos\,\alpha \cdot cos\,\beta}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta} + 1$$

hieraus hat man

$$cot\,\alpha \cdot cot\,\beta = 1 + \frac{cos(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta} = -1 + \frac{cos(\alpha-\beta)}{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta} \qquad (26)$$

8. Aus Art. Cosinus, Formel 19 und No. 6 hat man

$cos\,2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$

oder $\quad 2sin^2\alpha = 1 - cos\,2\alpha$

und $\quad 2sin\,\alpha\,cos\,\alpha = sin\,2\alpha$

Die untere Gleichung durch die zweite dividirt gibt

$$\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = cot\,\alpha = \frac{sin\,2\alpha}{1 - cos\,2\alpha} \qquad (27)$$

Aus dem Art. Cosinus, Formel 37 erhält man

$$cot^2\alpha = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{cos\,2\alpha}{1 - cos\,2\alpha}\right) = \frac{1 + cos\,2\alpha}{1 - cos\,2\alpha} \qquad (28)$$

9. Die beiden Formeln 19 mit einander multiplicirt geben

$$\cot^2\alpha - \cot^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} \quad (29)$$

10. Setzt man in die Gleichungen 3 und 4, No. 4 für α den Werth 45°, so ist

$$tg\,\alpha = \cot\alpha = 1,\ \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$$

und man hat

$$\cot(45^\circ \pm \beta) = tg(45^\circ \mp \beta) = \frac{\cos\beta \mp \sin\beta}{\cos\beta \pm \sin\beta} = \frac{1 \mp tg\,\beta}{1 \pm tg\,\beta} \quad (30)$$

Multiplicirt man in

$$\frac{\cos\beta - \sin\beta}{\cos\beta + \sin\beta} \text{ und } \frac{\cos\beta + \sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$$

Zähler und Nenner mit dem Nenner so erhält man

$$\cot(45^\circ \pm \beta) = \frac{\cos 2\alpha}{1 \pm \sin 2\alpha} \quad (31)$$

Dividirt man beide Gleichungen 31 durch einander so erhält man

$$\frac{\cot(45^\circ + \beta)}{\cot(45^\circ - \beta)} = \cot^2(45^\circ + \beta) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \quad (32)$$

$$\frac{\cot(45^\circ - \beta)}{\cot(45^\circ + \beta)} = \cot^2(45^\circ - \beta) = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \quad (33)$$

11. Entwickelung der C. in eine nach Potenzen des Bogens fortlaufende Reihe.

Die Reihe Bd. I. pag. 113, No. 12 eignet sich zur Umkehrung aus demselben Grunde nicht, wie die für den Cosinus (s. d. No. 16)

Es ist aber $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Nach pag. 145 und 144 hat man

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{(2)} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} - \ldots.$$

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots..$$

Beide Reihen durch einander dividirt werden gleich gesetzt der allgemeinen Form der Reihe

$$\cot\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \ldots\ldots$$

Nun ist $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ beide sind gleich grofs aber mit entgegengesetzten Vorzeichen; es dürfen also die Glieder mit geraden Exponenten von α und das unbenannte Glied A nicht vorhanden sein, weil diese auch für $(-\alpha)$ dasselbe Vorzeichen behalten.

Ferner wird für $\alpha = 0$, $\cot = \infty$ mithin mufs ein Glied vorhanden sein, in welchem α Divisor ist, wie $\frac{P}{\alpha}$ welches für $\alpha = -\alpha$, $-\frac{P}{\alpha}$ wird, also der zuerst gedachten Anforderung entspricht.

Die allgemeine Form der Reihe ist also

$$\cot\alpha = \frac{A}{\alpha} + B\alpha + C\alpha^3 + D\alpha^5 + E\alpha^7 + \ldots..$$

Und man hat die Gleichung:

$$\frac{1 - \frac{\alpha^2}{(2)} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} - }{\frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)}} = \frac{A}{\alpha} + B\alpha + C\alpha^3 + D\alpha^5 + E\alpha^7 + F\alpha^9 + \ldots$$

Nun ist, der Nenner links mit der Reihe rechts multiplicirt:

$$\begin{array}{rl}
\alpha \times = & A + B\alpha^2 + C\alpha^4 + D\alpha^6 + E\alpha^8 + F\alpha^{10} \\
-\frac{\alpha^3}{(3)} \times = & -\frac{A}{(3)}\alpha^2 - \frac{B}{(3)}\alpha^4 - \frac{C}{(3)}\alpha^6 - \frac{D}{(3)}\alpha^8 - \frac{E}{(3)}\alpha^{10} \\
+\frac{\alpha^5}{(5)} \times = & +\frac{A}{(5)}\alpha^4 + \frac{B}{(5)}\alpha^6 + \frac{C}{(5)}\alpha^8 + \frac{D}{(5)}\alpha^{10} \\
-\frac{\alpha^7}{(7)} \times = & -\frac{A}{(7)}\alpha^6 - \frac{B}{(7)}\alpha^8 - \frac{C}{(7)}\alpha^{10} \\
+\frac{\alpha^9}{(9)} = & +\frac{A}{(9)}\alpha^8 + \frac{B}{(9)}\alpha^{10} \\
-\frac{\alpha}{(11)} = & -\frac{A}{(11)}\alpha^{10}
\end{array}$$

Den Zähler links auf die rechte Seite gebracht und addirt gibt:

$$0 = (A-1)\alpha^0 + \left(B - \frac{A}{(3)} + \frac{1}{(2)}\right)\alpha^2 + \left(C - \frac{B}{(3)} + \frac{A}{(5)} - \frac{1}{(4)}\right)\alpha^4 +$$

$$+ \left[D - \frac{C}{(3)} + \frac{B}{(5)} - \frac{A}{(7)} + \frac{1}{(6)}\right]\alpha^6 + \left[E - \frac{D}{(3)} + \frac{C}{(5)} - \frac{B}{(7)} + \frac{A}{(9)} - \frac{1}{(8)}\right]\alpha^8 +$$

$$+ \left[F - \frac{E}{(3)} + \frac{D}{(5)} - \frac{C}{(7)} + \frac{B}{(9)} - \frac{A}{(11)} + \frac{1}{(10)}\right]\alpha^{10} + \ldots.$$

Die einzelnen Coefficienten = 0 gesetzt und entwickelt

$A = 1$

$B = -\frac{1}{3}$

$C = -\frac{2^2}{3(5)} = -\frac{1}{45}$

$D = -\frac{2^5}{3(7)} = -\frac{2}{945}$

$E = -\frac{3 \cdot 2^7}{5(9)} = -\frac{1}{4725}$

$F = -\frac{5 \cdot 2^9}{3(11)} = -\frac{2}{93555}$

u. s. w.

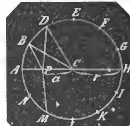
Somit ist

$$\cot \alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{45}\alpha^3 - \frac{2}{945}\alpha^5 - \frac{1}{4725}\alpha^7 - \frac{2}{93555}\alpha^9$$

Vergleiche Cosecante No. 12, Cosinus No. 16, Cosinus versus No. 4.

Cotesischer Lehrsatz (Cotes, ein englischer Mathematiker zur Zeit Newtons). Wenn man auf dem Durchmesser *AH* eines Kreises aufserhalb des Mittelpunkts *C* einen Punkt *P* annimmt, jeden Halbkreisumfang in *n*, also den ganzen Kreis-

Fig. 517.



umfang in $2n$ gleiche Theile theilt, und von *P* aus nach den Theilpunkten gerade Linien zieht, so ist, wenn der Halbmesser $CH = r$, der Abstand $CP = a$ gesetzt wird,

1. $r^n - a^n = PA \times PD \times PF \times PH \times \ldots . PM$
2. $r^n + a^n = PB \times PE \times PG \times PJ \times \ldots . PN$

In 1 ist der erste Factor der Abstand $r - a$, in 2 ist er die nächst folgende Theillinie, der letzte Factor in beiden ist die letzte Theillinie, so dafs *n* Factoren entstehen. Der Punkt *P* kann auch aufserhalb des Kreises in der Verlängerung von *HA* liegen, wo dann aber $a^n - r^n$ statt $r^n - a^n$ gesetzt wird.

Zieht man nämlich von irgend einem der Theilpunkte, z. B. von *D*, den Halbmesser *DC*, so hat man

$PD^2 = CP^2 + CD^2 \mp 2CP \times CD \cos DCP$

oder

$PD^2 = a^2 + r^2 \mp 2ar \cos DCP$

wo das obere Vorzeichen für $\angle DCP$ von 0 bis 90° und von 270° bis 360°, das untere von 90° bis 270° gilt, indem hier die *cos* negativ sind und woher das positive Zeichen fortgelassen werden kann.

Nun ist Bogen

$AB = BD = DE$ u. s. w. $= \frac{1}{n}\pi$

folglich $\cos BCP = \cos \frac{1}{n}\pi$

$\cos DCP = \cos \frac{2}{n}\pi$

$\cos ECP = \cos \frac{3}{n}\pi$ u. s. w.

Bezeichnet man nun die Theillinien von *P* 1 aus nach einander mit s; s_1; s_2; s_3 u. s. w. so hat man

$s^2 = r^2 - 2ar \cdot \cos 0 + a^2 = (r - a)^2$

$s_1^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{1}{n}\pi + a^2$

$s_2^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{2}{n}\pi + a^2$

$s_3^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{3}{n}\pi + a^2$

u. s. w.

Die Bogen haben also alle die Form $\frac{2m}{n}\pi$ und $\frac{2m+1}{n}\pi$

Die Quadrate mit den Bogen der ersten Form gehören zu dem ersten Satz für $r^n - a^n$, die der 2ten Form zu dem zweiten Satz für $r^n + a^n$

Die Quadrate der Factoren von $r^n - a^n$ im ersten Quadrant sind also:

$s^2 = (r - a)^2$

$s_2^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{2}{n}\pi + a^2$

$s_4^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{4}{n}\pi + a^2$

die letzten Glieder sind, wenn *n* gerade ist:

$s^2_{n-4} = r^2 - 2ar \cos \frac{n-4}{n}\pi + a^2$

$s^2_{n-2} = r^2 - 2ar \cos \frac{n-2}{n}\pi + a^2$

$s^2_n = r^2 - 2ar \cos \pi + a^2$
$= r^2 + 2ar + a^2 = (r + a)^2 = HP^2$

dieselben wenn n nngerade ist

$$s^2{}_{n-3} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-3}{n}\pi + a^2$$

$$s^2{}_{n-1} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2 = GP^2$$

Die Quadrate der Factoren von $r^n + a^n$ sind

$$s_1{}^2 = r^2 - 2\,ar\cos\frac{1}{n}\pi + a^2$$

$$s_3{}^2 = r^2 - 2\,ar\cos\frac{3}{n}\pi + a^2$$

$$s_5{}^2 = r^2 - 2\,ar\cos\frac{5}{n}\pi + a^2$$

die letzten Glieder sind, wenn n gerade ist

$$s^2{}_{n-3} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-3}{n}\pi + a^2$$

$$s^2{}_{n-1} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2$$

und wenn n ungerade ist

$$s^2{}_{n-2} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2$$

$$s^{2n} \quad = r^2 + 2\,ar + a^2 = (r+a)^2$$

2. Zn dem Beweise dee C. Lehrsatzes gelangt man nnn auf folgende Weise:

Die Trigonometrie erweist die Richtigkeit der Formel

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1} = \sqrt[n]{[\cos n\alpha \pm \sin n\alpha\sqrt{-1}]} \qquad \text{I.}$$

Setzt man $\cos n\alpha = 1$, eo ist $n\alpha$ entweder $= 0$ oder $= 2\pi$ oder einem Vielfachen von 2π, ñberhanpt $= 2m\pi$, wo $m = 0$ und = jeder beliebigen poeitiven ganzen Zahl sein kann, nnd für jedes m ist $\sin n\alpha = 0$. Es ist demnach für diesen Fall

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1} = \sqrt[n]{1}$$

und
$$\alpha = \frac{2m}{n}\pi$$

für $m = 0$ entsteht $\cos 0 \pm \sin 0\sqrt{-1} = +1$

für $m = \frac{1}{2}n$ (wenn n gerade ist) entsteht

$$\cos\pi \pm \sin\pi\sqrt{-1} = -1$$

Ist n gerade, so sind 2 Wnrzeln von 1^n möglich, nämlich $+1$ nnd -1; ist n nngerade so ist $+1$ die einzige mögliche Wurzel von 1^n. Die übrigen $n-2$ oder $n-1$ Wnrzeln von 1^n sind nnmöglich nnd sie werden durch den Ausdruck $\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1}$ eämmtlich geliefert, wenn man für m die natürlich anfelnander folgenden Zahlen 1 bis $n-1$ setzt, wo dann für den Fall, dafs n gerade ist, auch die zweite mögliche Wurzel (für $m = \frac{1}{2}n$) mit inbegriffen let.

Dafs nicht mehr als diese $n-1$ Wurzeln entstehen ersieht man aus den Wnrzeln wenn man für m die Werthe $m+k$ nnd $m-k$ setzt; denn es ist

$$\cos\frac{2(m+k)}{n}\pi = \cos\frac{2m+2k}{n}\pi = \cos\left(1+\frac{2k}{n}\right)\pi$$

$$\cos\frac{2(m-k)}{n}\pi = \cos\left(1-\frac{2k}{n}\right)\pi$$

Ee ist aber
$$\cos\left(1+\frac{2k}{n}\right)\pi = \cos\left(1-\frac{2k}{n}\right)\pi$$

nnd
$$\sin\left(1+\frac{2k}{n}\right)\pi = -\sin\left(1-\frac{2k}{n}\right)\pi$$

Es ist mithin
$$\cos\frac{2(m+k)}{n}\pi \pm \sin\frac{2(m+k)}{n}\pi\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{2(m-k)}{n}\pi \mp \sin\frac{2(m-k)}{n}\pi\sqrt{-1} \qquad \text{II.}$$

Wenn also $m > n$ genommen wird, so entstehen Werthe der Wurzel, die schon bei m nm eben so viel kleiner als n vorgekommen sind; es ist daher der höchste Werth von $m = n$, nnd es entstehen dann für $m = 0$ bis $m = n$ zwar $n+1$ Wurzeln, aber die erste für $m = 0$, also für $\alpha = 0$ nnd die letzte für $m = n$, also für $\alpha = 2\pi$ sind einander gleich, so dafe ñberhaupt von $m = 0$ bis $m = n - 1$ oder von $m = 1$ bis $m = n$ nnr n Wnrzeln entetehen, in welchen die eine oder die beiden einzigen möglichen Wnrzeln mit inbegriffen sind.

3. Setzt man nnter der Voranssetznng dafs n gerade ist, in die beiden letzten Formeln II. für die Wurzel $\frac{n}{2}$ für m so hat man die beiden gleichen Wnrzeln

$$\cos\frac{2\left(\frac{n}{2}+k\right)}{n}\pi \pm \sin\frac{2\left(\frac{n}{2}+k\right)}{n}\pi\sqrt{-1} \qquad \text{III.}$$

und

$$\cos\frac{2\left(\frac{n}{2}-k\right)}{n}\pi \mp \sin\frac{2\left(\frac{n}{2}-k\right)}{n}\pi\sqrt{-1} \qquad \text{IV.}$$

von welchen die beiden Wurzeln mit den oberen und die mit den beiden unteren Vorzeichen einander gleich sind. Multiplicirt man also die beiden Wurzeln für $+k$ in No. III, ebenso die beiden Wurzeln für $-k$ in No. IV, so entstehen 2 einander gleiche Producte; demnach hat man nur eins dieser Producte als eine Doppelwurzel zu nehmen. Wählt man die untere, so hat man vereinfacht die 2 Wurzeln in einer Doppelwurzel:

$$\left[\cos\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi + \sin\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi\sqrt{-1}\right]\left[\cos\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi - \sin\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi\sqrt{-1}\right]$$
$$= \cos^2\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi + \sin^2\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi \qquad \text{V.}$$

Setzt man in Formel IV. statt k nach einander die Werthe $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}-1$, $\frac{n}{2}-2$, .. $\frac{n}{2}-\frac{n}{2}$, so erhält man

$\cos 0 \quad \pm \sin 0\sqrt{-1} = +1 \mp 0$

$\cos 2\frac{\pi}{n} \mp \sin 2\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$

$\cos 4\frac{\pi}{n} \mp \sin 4\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$

. . . .

$\cos 2\cdot\left(\frac{n}{2}-3\right)\frac{\pi}{n} \mp \sin 2\cdot\left(\frac{n}{2}-3\right)\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$

$\cos 2\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\frac{\pi}{n} \mp \sin 2\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$

$\cos 2\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{n} \mp \sin 2\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$

$\cos n\cdot\frac{\pi}{n} \mp \sin n\cdot\frac{\pi}{n}\sqrt{-1} = -1 \mp 0$

Die erste und die letzte Wurzel sind einfach, die übrigen $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ Wurzeln sind mit + und − sämmtlich doppelt und es entstehen überhaupt n Wurzeln, von denen nur die erste und die letzte mögliche Wurzeln sind.

4. Setzt man $\cos n\varphi = a^n$ statt 1^n, so hat man jeder einzelnen der vorstehenden Wurzeln noch den Factor a zu geben.

Ist nun, um auf den Cotesischen Lehrsatz zurück zu kommen

$$r^n - a^n = 0$$

also $\quad r^n = + a^n$

so sind die Wurzeln für a^n auch die für r^n. Bezeichnet man diese mit w; w_1; w_2; .... w_n so ist die Differenz zwischen r und jeder derselben, wie $(r - w_m)$ ein Factor von $r^n - a^n$ und folglich (s. algebraische Gleichung 11, 15, 17 u. s. w.) ist $r^n - a^n = (r-w)(r-w_1)(r-w_2).....(r-w_n)$

Man hat also die einzelnen Factoren von $r^n - a^n$

$r - a\left[\cos 0 \pm \sin 0\sqrt{-1}\right]$

$r - a\left[\cos\frac{2}{n}\pi \pm \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1}\right]$

$r - a\left[\cos\frac{4}{n}\pi \pm \sin\frac{4}{n}\pi\sqrt{-1}\right]$

. . . .

$r - \left[\cos\frac{n-2}{n}\pi \pm \sin\frac{n-2}{n}\pi\sqrt{-1}\right]$

$r - \left[\cos\frac{n}{n}\pi \pm \sin\frac{n}{n}\pi\sqrt{-1}\right]$

Multiplicirt man nun je 2 zusammengehörige nämlich je 2 durch ± vereinigte Wurzeln zu einem Doppelfactor wie IV zu der Doppelwurzel V so erhält man

$$\left[r - a\left(\cos 0 + \sin 0\sqrt{-1}\right)\right]\left[r - a\left(\cos 0 - \sin 0\sqrt{-1}\right)\right]$$
$$\left[r - a\left(\cos\frac{2}{n}\pi + \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1}\right)\right]\left[r - a\left(\cos\frac{2}{n}\pi - \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1}\right)\right]$$

u. s. w. woraus

1) $r^2 - 2ar + a^2 = (r-a)^2$

$$2)\quad r^2 - ar\left(2\cos\frac{2}{n}\pi + \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1} - \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1}\right) + a^2\left(\cos^2\frac{2}{n}\pi + \sin^2\frac{2}{n}\pi\right)$$

$$= r^2 - 2ar\cos\frac{2}{n}\pi + a^2$$

$$3)\quad r^2 - 2ar\cos\frac{4}{n}\pi + a^2$$

. . . .

$$\left.\frac{n}{2} - 1\right)\quad r^2 - 2ar\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2$$

$$\left.\frac{n}{2}\right)\quad r^2 - 2ar\cos\pi + a^2 = r^2 + 2ar + a^2 = (r+a)^2$$

5. Diese Factoren stimmen nnn genau mit den für s^2, s_2^2... bis s_n^2 überein, nnd es ist nur noch zu bemerken, dafs der erste Factor = PA^2, der letzte = PH^2 ist, dafs also die quadrirten Linien nur dem ersten halben Kreis angehören. Dagegen liegt jeder Theillinie des ersten Halbkreises eine ihr gleiche in dem zweiten Halbkreis gegenüber, wie der PD die PM; es ist also $s_2^2 = PD^2 = PD \times PM$. Da nnn, wie am Schlufs No. 3 bemerkt worden, der erste nnd der letzte Factor, hier PA nnd PH nnr einfach genommen werden darf, wenn nicht $n + 2$ statt n Wnrzeln entstehen sollen, was unmöglich ist, so ist der 1. Satz, nämlich

$$r^n - a^n = PA \times PD \times PF \times \ldots PM$$

erwiesen.

6. Wenn der Halbkreis in eine nngrade Anzahl Theile getheilt ist (n ungerade) so fällt für den ersten Satz keine Theillinie wie PH in den Durchmesser, sondern zu beiden Seiten derselben, in PG und PJ. Man sieht, dafs beide einander gleich sind und dafs man wieder nur die Quadrate der Theillinien des ersten Halbkreises erhält. Für diesen Fall kann man in Gl. II nicht $\frac{n}{2}$ für m setzen, sondern nur $\frac{n \pm 1}{2}$.

Für $m = \frac{n+1}{2}$ hat man den allgemeinen Ausdruck des Bogens

statt Formel IV. $$\alpha = \frac{2\left(\frac{n+1}{2} - k\right)}{n}\pi = \left(1 + \frac{1-2k}{n}\right)\pi$$

für $m = \frac{n-1}{2}$ $$\alpha = \frac{2\left(\frac{n-1}{2} - k\right)}{n}\pi = \left(1 - \frac{1+2k}{n}\right)\pi$$

Setzt man für den ersten, die Werthe von k nacheinander

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-3}{2}\ \ldots.\ \frac{6}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{2}{2},\ 0$$

so erhält man für α nach einander

$$0;\ \frac{2}{n}\pi;\ \frac{4}{n}\pi;\ \ldots.\ \frac{n-3}{n}\pi;\ \frac{n-1}{n}\pi;\ \frac{n+1}{n}\pi$$

Setzt man für den 2ten Bogen die Werthe von k

$$\frac{n-1}{2},\ \frac{n-3}{2},\ \ldots.\ \frac{6}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{2}{2},\ 0$$

so erhält man für α

$$0,\ \frac{2}{n}\pi,\ \frac{4}{n}\pi\ \ldots.\ \frac{n-3}{n}\pi,\ \frac{n-1}{n},$$

für $k = -1$ entsteht erst $\alpha = \frac{n+1}{n}\pi$

Man hat von beiden Werthen für m also nur einen derselben zu Grunde zu legen, weil man für beide dieselben Bogen α erhält, nnd zwar dieselben wie No. 3 für $m = \frac{n}{2}$, nnr dafs der letzte nicht π sondern $\frac{n-1}{n}\pi$ ist; und dieselben Doppelfactoren, nur dafs der letzte nicht wie No. 5 $= (r+a)^2 = PH^2$ sondern

$$= r^2 - 2ar\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2 = PG^2 = PG \times PJ$$

so dafs auch in diesem Falle

$$r^n - a^n = PA \times PD \times PF \times \ldots. PM$$

7. Zum Beweise des 2ten Satzes:

$$r^2 + a^2 = PB \times PE \times PG \times \ldots.. PN$$

setze man in Gl. I. $\cos n\alpha = -1$ so ist $n\alpha$ entweder $= \pi$ oder = einem nngeraden Vielfachen von π, überhanpt $(2m+1)\pi$, wo $m = 0$ und jede beliebige ganze positive Zahl sein kann. Für jedes m ist $\sin n\alpha = 0$ demnach ist

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1} = \sqrt[n]{-1}$$

und $\alpha = \frac{2m+1}{n} \pi$

für $m = 0$ entsteht $\cos \frac{1}{n} \pi \pm \sin \frac{1}{n} \pi \sqrt{-1}$

für $m = 1$ $\cos \frac{3}{n} \pi \pm \sin \frac{3}{n} \pi \sqrt{-1}$

für $m = 2$ $\cos \frac{5}{n} \pi \pm \sin \frac{5}{n} \pi \sqrt{-1}$

u. s. w.

Ist n ungerade so sind die letzten Glieder

. . . .

für $m = \frac{n-3}{2}$; $\cos \frac{n-2}{n} \pi \pm \sin \frac{n-2}{n} \pi \sqrt{-1}$

für $m = \frac{n-1}{2}$; $\cos \pi \pm \sin \pi \sqrt{-1}$

Die hierzu gehörige Theillinie ist PH, $\cos \pi \pm \sin \pi \sqrt{-1} = -1 \pm 0 = -1$. Diese Theillinie als Wurzel bleibt einfach, weil sie keine ihr correspondirende hat, die vorhergehenden $\frac{n-1}{2}$ Wurzeln werden quadrirt und es entstehen zusammen $2 \cdot \frac{n-1}{2} + 1 = n$ einfache Wurzeln, wie es die Potenz erfordert.

Ist n gerade, so sind die letzten Glieder

für $m = \frac{n}{2} - 2$; $\cos \frac{n-3}{n} \pi \pm \sin \frac{n-3}{n} \pi \sqrt{-1}$

für $m = \frac{n}{2} - 1$; $\cos \frac{n-1}{n} \pi \pm \sin \frac{n-1}{n} \pi \sqrt{-1}$

Die zu dem letzten Gliede gehörige Theillinie ist PG, ihr correspondirt die Linie PJ, in H fällt keine Theillinie, sämmtliche $\frac{n}{2}$ Theillinien von $m = 0$ bis $m = \frac{n}{2} = 1$ werden quadrirt und es entstehen wieder n einfache Wurzeln. Die Doppelwurzeln hieraus sind also wie aus No. 4:

1. $r^2 - 2ar \cos \frac{1}{n} \pi + a^2$

2. $r^2 - 2ar \cos \frac{3}{n} \pi + a^2$

3. $r^2 - 2ar \cos \frac{5}{n} \pi + a^2$

. . . .

Das letzte Glied entweder $r + a$

oder $r^2 - 2ar \cos \frac{n-1}{n} \pi + a^2$

Mit der Uebereinstimmung dieser Glieder und der Glieder für $z_1{}^2, z_3{}^2, z_5{}^2$ u. s. w. ist der 2te Satz bewiesen, nämlich

$r^n + a^n = PB \times PE \times PG \times \ldots\ldots PN$

Cubikcubische Wurzel für 6te Wurzel aus einer Zahl ist eine nicht mehr gebräuchliche Bezeichnung. Die Ausziehung derselben aus einer Zahl kann nach der Bd. 1, pag. 243 No. 15 angegebenen Methode geschehen; bequemer ist es, erst die 3te Wurzel und aus dieser die zweite, oder erst die 2te und aus dieser die dritte Wurzel zu ziehen; es ist nämlich $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}$ Anweisung dazu gibt Bd. 1, pag. 240, No. 2 bis 8 für die $\sqrt[2]{}$; pag. 242, No. 9 bis 12 für die Cubikwurzel.

Cubikcubische Zahl, Cubocubus, eine nicht mehr gebräuchliche Bezeichnung für die 6te Potenz einer Zahl (a^6).

Cubik-Einheit ist der Würfel als Einheit zu Vermessung und Berechnung körperlicher Räume. Für diesen Würfel wird zur Seite eine irgend wo gesetzlich festgesetzte Länge zur Einheit angenommen; z. B. 1 Fufs zur Seite gibt den Würfel: Cubikfufs genannt, 1 Meter zur Seite den Cubikmeter u. s. w., und jeden körperlichen Raum drückt man in die Anzahl dieser C aus, welche er enthält. So z. B. hat ein rechtwinkliges Parallelepipedum von der Länge l Fufs, der Breite b Fufs und der Höhe h Fufs den körperlichen Inhalt von $l \times b \times h$ Cubikfufs. (Vergleiche Cubisches Maafs und Cubus.)

Cubik-Inhalt, Körperlicher Inhalt eines Körpers oder eines körperlichen Raumes ist die Anzahl der Cubik-Einheiten, welche er enthält.

Cubikmaafs ist eine bestimmte Cubik-Einheit, als Cubikfufs, Cubikruthe, Cubikzoll u. s. w.

Cubiktafeln sind Tafeln, in welchen die Cubi der natürlich aufeinander folgenden Zahlen angegeben sind; wie in Vega's gröfseren logarithmischen und trigonometrischen Tafeln.

Diese Tafeln sind mit Hülfe von Differenzenreihen berechnet: hat man die ersten 5 Cuben $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$ ermittelt, schreibt diese Zahlen als arithmetische Reihe höherer Ordnung neben einander und bildet die Differenzenreihen so erhält man

1		8		27		75		125
	7		19		37		61	
		12		18		24		

und ersieht, dafs die zweite Differenzenreihe eine Reihe der ersten Ordnung mit der constanten Differenz 6 ist.

125 ⁄← 216 343 512 729 1000 1331 1728 ...
61 ⁄← 91 127 169 217 271 331 397 .....
24 ⁄— 30 36 42 48 54 60 66 ....

Nun rechnet man $24+6=30$, $30+61=91$, $91+125=216$ und hat 216 als 6^3; ferner $30+6=36$, $36+91=127$, $127+216=343=7^3$; weiter $36+6=42$, $42+127=169$, $169+343=512=8^3$ u. s. f. Eine Prüfung und Versicherung der Richtigkeit ergiebt sich nach je 10 Zahlen, nämlich bei den Wurzeln 10, 20, 30, 40, deren Cuben 1000, 8000, 27000, 64000 .... sind.

Cubikwurzel einer Zahl ist diejenige Zahl, welche 3mal mit sich selbst multiplicirt jene Zahl hervorbringt. Die wenigsten Zahlen sind Cuben, wie z. B. 1, 8, 27, 64; alle dazwischen liegenden Zahlen sind keine Cuben, so z. B. existirt keine Zahl, welche 3mal mit sich selbst multiplicirt die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 u. s. w. hervorbringt. Dagegen kann man durch Decimalen der $\sqrt[3]{\ }$ solcher Zahlen möglichst nahe kommen und daher nennt man eine Zahl von der die $\sqrt[3]{\ }$ angegeben werden soll, aber nur näherungsweise angegeben werden kann, einen unvollständigen Cubus.

Bd. I, pag. 242, No. 9 und 10 lehrt das Ausziehen der $\sqrt[3]{\ }$ aus ganzen Zahlen, No. 11 aus Decimalbrüchen auf elementarem Wege, No. 13 mit Hülfe von Logarithmen, No. 14 aus trigonometrischen Functionen, No. 15 bis 21 durch Reihen-Entwickelung auch für andere Wurzeln als $\sqrt[3]{\ }$. Von pag. 250 ab das Ausziehen aller Wurzeln aus Buchstabengrößen und pag. 252 No. 6 das Ausziehen der $\sqrt[3]{\ }$ aus unvollständigen Cuben von Buchstabengrößen.

Als Beispiel von näherungsweiser Auffindung der $\sqrt[3]{\ }$ aus einem unvollständigen Cubus von Zifferzahlen diene $\sqrt[3]{2}$. Es ist

$\sqrt[3]{2}$ nahe 1; $1^3=1$
näher $1{,}2$; $1{,}2^3=1{,}728$
näher $1{,}25$; $1{,}25^3=1{,}953125$
näher $1{,}259$; $1{,}259^3=1{,}995616979$
näher $1{,}2599$; $1{,}2599^3=1{,}9998997$
näher $1{,}25992$; $1{,}25992^3=1{,}999981$
näher $1{,}259021$; $1{,}259921^3=1{,}999985$

Vergl. auch Art. Cubus, No. 2, III.

2. Hat man aus einer Zahl die $\sqrt[3]{\ }$ ausgezogen und sie geht auf, so ist jene Zahl ein vollständiger Cubus. Will man sich von der Richtigkeit der Rechnung überzeugen, so cubirt man die erhaltene $\sqrt{\ }$ und sie muſs bei richtiger Rechnung den zuerst gegebenen Cubus liefern. Die sogenannte Neunerprobe, von der schon Bd. I, pag. 28, Art. Addition No. 4 die Rede gewesen ist, führt schneller zum Ziel. Man nennt den Ueberschuſs der Summe der Ziffern einer Zahl über 0, 9 oder über ein Vielfaches von 9 die Probezahl und zu jeder Probezahl einer Wurzel gehört eine ganz bestimmte Probezahl ihres Cubus. Z. B. der Cubus von 5 ist 125; die $\sqrt{\ }=5$ hat den Ueberschuſs $=5$ über 0, also die Probezahl 5; der Cubus 125 hat die Summe der Ziffern $=1+2+5=8$ also die Probezahl 8 und es gehört zur Probezahl 5 der $\sqrt{\ }$ die Probezahl 8 des Cubus. Eben so ist $6^3=216$; die Probezahl der Wurzel ist $=6$, die des Cubus $=0$.

Man erhält die Probezahlen, die natürlich von 0 bis 8 nur existiren, wie folgt:

Wurzel,	Probezahl;	Cubus,	Probezahl.
1	1	1	1
2	2	8	8
3	3	27	0
4	4	64	1
5	5	125	8
6	6	216	0
7	7	343	1
8	8	512	8
9	0	729	0

Die Wurzeln haben also alle Probezahlen von 0 bis 8, die Cubi nur die Probezahlen 0, 1 und 8.

Beispiele.

Wurzel,	Probezahl;	Cubus,	Probezahl.
36	0	46656	0
145	1	3048625	1
317	2	31855013	8
723	3	377933067	0
643	4	265847707	1
194	5	7301384	8
681	6	315821241	0
358	7	45882712	1
584	8	199176704	8

Daſs auch mehrziffrige Zahlen dem Gesetz der einziffrigen Wurzeln folgen müssen beweist sich folgendermaaſsen:

Jede noch so groſse Zahl kann zerlegt werden in $9N+n$ wo n eine einziffrige Zahl oder $=0$ ist. Nun ist

$$(9N+n)^3=9^3\cdot N^3+3\cdot 9^2\cdot N^2\cdot n+3\cdot 9\,N\cdot n^2+n^3$$

Ist mithin der Ueberschuſs der Summe der Ziffern einer mehrziffrigen Zahl über ein Vielfaches von $9=$ einer einziffrigen Zahl n, also auch $=$ dem Ueberschuſs dieser Zahl n über 0, so ist auch der Ueberschuſs der Summe der Ziffern des Cubus jener mehrziffrigen Zahl über ein Vielfaches von $9=$ dem Ueberschuſs der Ziffern des Cubus der einziffrigen Zahl n über ein Vielfaches von 9.

3. Dieselbe Probe kann man mit Nutzen anwenden, um die Richtigkeit der Rechnung bei der Ausziehung der $\sqrt[3]{\ }$ aus einem unvollkommenen Cubus zu prüfen z. B.

$\sqrt[3]{79} = 4{,}290940\ldots$

64

15000

$3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 9600$
$3 \cdot 5 \cdot 2^2 = 480$
$2^3 = 8$

10088

4912000

$3 \cdot 42^2 \cdot 9 = 4762800$
$3 \cdot 42 \cdot 9^2 = 102060$
$9^3 = 729$

4865589

46411000000

$3 \cdot 4290^2 \cdot 8 = 44169840000$
$3 \cdot 4290 \cdot 8^2 = 8236800$
$8^3 = 512$

44178077312

2232922688000

$3 \cdot 42908^2 \cdot 4 = 2209315756800$
$3 \cdot 42908 \cdot 4^2 = 20595840$
$4^3 = 64$

2209336352704

23586335296

u. s. w.

Zum Versuch, ob die Wurzel 42 richtig ist hat man

$79000 - 4912 = 74088$ als 42^3.

Die Probezahl 0 von 74088 stimmt mit der 6 von 42.

Zum Versuch ob die Wurzel 429 richtig ist, hat man

$79000000 - 46411 = 78953589$ als 429^3.

Die Probezahl 0 des Cubus stimmt mit der Probezahl 6 von 429.

Zum Versuch, ob die Wurzel 42908 richtig ist, hat man

$$\begin{array}{r} 79000000000000 \\ -\quad 2232922688 \\ \hline = 78997767077312 \end{array}$$ als 42908^3.

Die Probezahl 8 des Cubus stimmt mit der Probezahl 5 von 42908.

Zum Versuch endlich, ob die Wurzel 429084 richtig ist, hat man

$$\begin{array}{r} 79000000000000000 \\ -\quad 23586335296 \\ \hline = 78999976413664704 \end{array}$$ als 429084^3

Die Probezahl 0 des Cubus stimmt mit der Probezahl 0 von 429084 u. s. w.

Aber auch diese Prüfungsweise kann man sich noch erleichtern:

Der Cubus von 42 ist $= 79000 - 4912$; man hat also nicht diese Differenz zu bilden, sondern nur die Differenz deren Ziffernsummen $= 7 + 9 - (4 + 9 + 1 + 2) = 16 - 16 = 0$ und die Probezahl 6 von 42 stimmt mit der Probezahl 0 des Cubus.

Ebenso stimmt die Probezahl 6 der Wurzel 429 mit der von $79 - 46411$, nämlich mit $16 - 16 = 0$ des Cubus.

Desgleichen die Probezahl 5 der Wurzel 42908 mit der von $79 - 2232922688$ nämlich mit $16 - 44 = -28 = -4 \cdot 9 + 8$ oder mit 8 des Cubus.

Endlich die Probezahl 0 der Wurzel 429084 mit der von $79 - 23586335296$, nämlich mit $16 - 52 = -36$ also mit $+0$ des Cubus.

4. Die Cubikwurzel aus a^3 ist $= a$; es hat aber die Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ als cubische Gleichung 3 Wurzeln (s. Bd. I, pag. 50, No. 13), und es mufs folglich $\sqrt[3]{a^3}$ aufser a noch 2 Werthe haben, so dafs wenn diese b und c sind:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - a^3$$

Man erhält also diese beiden Werthe wenn man $x^3 - a^3$ durch $x - a$ dividirt nämlich

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2 = 0$$

woraus die Wurzeln nach Bd. I, pag. 49, No. 9:

$$x = -\tfrac{1}{2}a\left(1 \pm \sqrt{-3}\right)$$

Die 3 Kubikwurzeln von a^3 sind demnach

$$a;\ -\tfrac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{-3}\right);\ -\tfrac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{-3}\right) \quad (1)$$

Ist a^3 irrational z. B. von der Form $b \pm \sqrt{c}$, so hat man natürlich die 3 Cubikwurzeln von a^3

$$\sqrt[3]{b \pm \sqrt{c}};\ -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm \sqrt{c}}\,(1 + \sqrt{-3});$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm \sqrt{c}}\,(1 - \sqrt{-3}) \quad (2)$$

Ist a^3 unmöglich, etwa von der Form $b^3\sqrt{-1}$ so ist die eine Wurzel offenbar $-b\sqrt{-1}$ denn $(-b\sqrt{-1})^2$ ist $= -b^2$ und $(-b^2) \times (-b\sqrt{-1}) = +b^3\sqrt{-1}$

und dividirt man $x^3 - b^3\sqrt{-1}$ durch $x + b\sqrt{-1}$ so erhält man

$$x^2 + xb\sqrt{-1} - b^2 = 0$$

woraus $\quad x = \tfrac{1}{2}b\,(\sqrt{-1} \pm \sqrt{3}) \quad (3)$

die 3 Wurzeln aus $b^3\sqrt{-1}$ sind daher

$$-b\sqrt{-1};\ \tfrac{1}{2}b\left(\sqrt{-1} + \sqrt{3}\right);\ \tfrac{1}{2}b\left(\sqrt{-1} - \sqrt{3}\right)$$

Hat das unmögliche a^3 die Form $b \pm c\sqrt{-1}$ so ist die erste Wurzel $= \sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}}$ und die andern beiden sind

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}} \cdot (1 \pm \sqrt{-3})$$

Die 3 Cubikwurzeln von $b \pm c\sqrt{-1}$ sind daher

$$\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}};\ -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}}\,(1 + \sqrt{-3});$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}}\,(1 - \sqrt{-3}) \quad (4)$$

5. Die Cubikwurzel aus imaginären Gröfsen von der Form $\sqrt[2]{-a}$ erregen bisweilen Bedenken und veranlassen Un-

richtigkeiten, daher hier folgende kurze Erläuterungen:

Jede imaginäre Gröfse von der Form $b\sqrt{-a}$ läfst sich umändern in $b\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ und da $b\sqrt{a}$ als Factor nichts bedenkliches hat, so soll nur von der Gröfse $\sqrt{-1}$ die Rede sein.

Es ist $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt[2]{(-1)^2} = -1$

daher $(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \times \sqrt{-1} = -1\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$ (1)

folglich auch $\sqrt[3]{(-\sqrt{-1})} = \sqrt{-1}$ (2)

ferner ist $(-\sqrt{-1}) \times (-\sqrt{-1}) = (-\sqrt{-1})^2 = +(\sqrt{-1})^2 = -1$

daher $(-\sqrt{-1})^3 = (-\sqrt{-1})^2 \times (-\sqrt{-1}) = -1 \times (-\sqrt{-1}) = +\sqrt{-1}$ (3)

folglich auch $\sqrt[3]{(+\sqrt{-1})} = -\sqrt{-1}$ (4)

6. Band I, pag. 253, No. 8 ist die $\sqrt[3]{}$ aus einem Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$ bestimmt worden. Dies veranlafst auch $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ bestimmen zu wollen.

Es sei $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm y\sqrt{s}$ so ist s jedenfalls ein Factor von B und man kann setzen

$$\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = x \pm y\sqrt{B} \qquad (1)$$

woraus $A \pm \sqrt{B} = (x \pm y\sqrt{B})^3$ (2)

und $A^2 - B = (x^2 - By^2)^3$ (3)

Eine Bedingung ist demnach, dafs $A^2 - B$ ein vollständiger Cubus sei; sollte es nicht sein, so läfst sich eine Zahl n finden, so dafs $n(A^2 - B)$ zum vollständigen Cubus wird. Es sei dieser Cubus $= m^3$ so ist

$$m = x^2 - By^2 \qquad (4)$$

Nun ist aus Gl. 2:

$$A + \sqrt{B} = x^3 + 3x^2y\sqrt{B} + 3xy^2B + y^3B\sqrt{B}$$

hiervon das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich gesetzt:

$$A = x^3 + 3Bxy^2$$
$$1 = 3x^2y + y^3B$$

oder aus Gl. 4:

$$y^2 = \frac{x^2 - m}{B}$$

also $A = x^3 + 3x(x^2 - m)$

woraus $x^3 - \frac{3}{4}mx - \frac{A}{4} = 0$

eine Gleichung, die mittelst der Cardanischen Formel, Bd. I, pag. 52, No. 21 aufzulösen ist.

Diese Entwickelung befindet sich in Klügels math. Wörterbuch Bd. I, pag. 577, wo nur $\sqrt[6]{A \pm \sqrt{B}}$ nicht $= x \pm y\sqrt{B}$ sondern $= (n + \sqrt{q})\sqrt{\alpha}$ gesetzt ist, welches zu demselben Endresultat führt, nämlich zu der cubischen Gleichung

$$A = 4p^3\alpha - 3mp\alpha$$

oder geordnet $p^3 - \frac{3}{4}mp - \frac{A}{4\alpha} = 0$

Geht man auf diese allgemeine cubische Gleichung näher ein, entwickelt nämlich x nach der Cardanischen Formel, so erhält man nach Reduction:

$$x = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt[3]{A + \sqrt[2]{A^2 - m^3}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{A^2 - m^3}}\right]$$

Setzt man hierein für m seinen ursprünglichen Werth $A^2 - B$ so hat man

$$x = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}\right]$$

d. h. das Resultat, welches man aus der ersten Annahme, Gleichung 1 findet, nämlich

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = x + y\sqrt{B}$$
$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x - y\sqrt{B}$$

folglich addirt und mit 2 dividirt:

$$\tfrac{1}{2}\left[\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}\right] = x$$

Die Entwickelung hat nur einen Cirkel gemacht, und die von Klügel hinterher gegebenen Beispiele

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$
$$\sqrt[3]{5 \pm 3\sqrt{3}} = (1 \pm \sqrt{3})\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

sind mit Hülfe der obigen cubischen Gl. nicht berechnet.

Cubikzahl ist die dritte Potenz einer Zahl. Vergl. Cubiktafeln.

Cubisch ist zunächst das was sich auf den Würfel, den Cubus bezieht; hiernächst, weil der Würfel die Körper- oder Cubikeinheit ist, was sich auf die Körperlichkeit eines Gegenstandes bezieht, also körperlich. So ist in dem Art. Ausdehnung der Körper durch die Wärme (Bd. I, pag. 187) die Ausdehnung als Längen-A oder lineare A, als Flächen-A oder quadratische A und als Körper-A oder cubische A betrachtet worden.

Da der cubische Raum in 3 Ausdehnungen oder Hauptrichtungen begriffen wird, von denen jede eine Längenausdehnung ist, die zu Bestimmung der cu-

bischen Gröfse mit einander multiplicirt werden, so nennt man auch in der Arithmetik jede Gröfse, welche 3 Elemente zu Factoren hat, cubisch, namentlich die Gröfse von 3 gleichen Factoren den Cubus des Elements, weil die Gröfse des Würfels oder des Cubus das Product seiner 3 gleichen Hauptausdehnungen ist, und eine Gleichung, in welcher eine Unbekannte in dritter Potenz vorkommt oder in welcher mehrere Unbekannte zu 3 Factoren mit einander verbunden sind, eine cubische Gleichung.

Curven, die durch cubische Gleichungen gegeben werden, nennt man allgemein nicht cubische Curven sondern Linien dritter Ordnung; dagegen nennt man speciell die Parabel, deren Gleichung $y^3 = a^2x$ oder $y^3 = ax^2$ ist, cubische Parabel, eben so die Hyperbel von der Gleichung $xy^2 = a^3$ cubische Hyperbel.

Cubische Ausdehnung ist die A eines Körpers oder eines körperlichen Raumes nach unendlich vielen Längenrichtungen, die sich jedoch in 3 verschiedene Hauptrichtungen zusammen fassen lassen (s. Ausdehnung Bd. 1, pag. 186).

Cubische Gleichung s. u. cubisch und algebraische Gleichung.

Cubische Gröfse ist die Gröfse der cubischen Ausdehnung eines Körpers oder eines körperlichen Raumes, s. cubische Ausdehnung.

Cubische Hyperbel s. u. cubisch.

Cubisches Maafs s. v. w. Cubikmaafs, d. i. eine der verschiedenen Cubik-Einheiten, wie für die Längen der Maafsstab. Wenn man von einem Gegenstande die Gröfse wissen will, mufs man ihn messen, und der Maafsstab kann mit dem zu messenden Gegenstande nur einerlei Natur sein: Längen werden durch Längen, Flächen durch Flächen, Körper durch Körper gemessen. Aber nicht alles kann gemessen werden; dann tritt die Berechnung hinzu, wie bei unzugänglichen Linien, die durch Vermessung von zugänglichen Linien mit Hülfe von Triangulation und Zeichnung oder Berechnung ermittelt werden. Flächenmaafse werden nur bei geringfügigen Gegenständen angelegt, sonst werden nur Längen gemessen und hieraus die Flächen berechnet. Cubische Maafse sind nur im Gebrauch für Bedarf an Waaren; für sonstige körperliche Räume mifst man bestimmte Längen und berechnet aus diesen deren cubischen Inhalt.

Bekanntlich sind Linien mal Linien Flächen und Flächen mal Linien sind Körper; dies hat folgenden Grund: Denkt man sich einen Punkt, der einen endlichen geraden Weg zurücklegt, so hat derselbe eine gerade Linie beschrieben. Macht nun diese Linie eine solche Bewegung, dafs jeder ihrer Punkte einen gleich grofsen Weg zurücklegt, und dafs jeder dieser Wege eine gerade Linie ist, so beschreibt die Linie eine Ebene.

Hält die Linie ihre Bewegung irgend wo an, so hat sie offenbar so viele gleich grofse grade Linien zurückgelegt, als Punkte in ihr vorhanden sind. Weifs man die Anzahl dieser Punkte, so hat man diese Zahl nur mit der gleich grofsen Länge der Bewegung jedes einzelnen Punkts zu multipliciren um die summarische Länge der ganzen Bewegung zu erhalten. Da aber die Punkte der Linie unendlich nahe an einander liegen, so drückt die Länge der ursprünglichen Linie selbst die Anzahl ihrer Punkte aus und folglich ist die summarische Bewegung gleich dem Product, wenn man die bewegte Linie mit der Länge der Bewegung multiplicirt.

Man hat also in dem neu gefundenen Raum ein Zusammengesetztes, nämlich Linie mal Linie oder Länge mal Breite, eine Ebene.

Bewegt sich nun die Ebene wiederum so dafs jeder deren Punkte einen gleich grofsen gradlinigen Weg zurücklegt, so ist die Summe der Punkte, aus welchen die Ebene besteht mit deren Bewegungslänge multiplicirt der summarische Weg aller Punkte, diese aber unendlich nahe an einander sind in Summe gleich der Ebene selbst zu setzen und man hat Ebene mal Linie gleich dem körperlichen Raum den die Ebene mit ihrer Bewegung gebildet hat.

Cubische Parabel s. u. cubisch.

Cubus. 1. Der bekannte Körper, Würfel genannt, der einzige regelmäfsige Körper, dessen Seitenflächen aus regelmäfsigen Vierecken, aus Quadraten bestehen. Er hat 6 Seitenflächen, 12 Kanten und 8 Ecken.

Enthält die Kante a Längeneinheiten, so hat nach dem Art. cubisches Maafs die Seitenfläche $a \cdot a = a^2$ Flächeneinheiten, der Cubus $a^2 \cdot a = a^3$ Körpereinheiten. Hat also die Kante eine Längeneinheit, so hat der Cubus eine Körpereinheit. Es ist hieraus ersichtlich, dafs dem Begriff von Cubikeinheit gemäfs kein Körper geeigneter ist die Cubikeinheit zu bilden als der Cubus selbst, obgleich die Kugel der Form nach ein viel einfacherer Körper oder vielmehr der einfachste Körper ist.

2. Die dritte Potenz n^3 einer Zahl n.
I. der Cubus einer zweitheiligen Gröfse $(a+b)$ ist nach dem Art. „Binomischer Lehrsatz" Bd. I, pag. 374, oder wenn man dieselbe 2 mal mit sich selbst multiplicirt

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sind a oder b negativ, so werden dieselben Gröfsen im Cubus gleichfalls negativ gesetzt, z. B.

$$(-a+b)^3 = -a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$
$$(+a-b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3$$

II. Ist ein Polynom zu cubiren, so erhält man durch zweimalige Multiplication mit sich selbst dessen Cubus z. B.

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + kx^8)^3 = a^3 + 3a^2bx + (3a^2c + 3ab^2)x^2$$
$$+ (3a^2d + 6abc + b^3)x^3$$
$$+ (3a^2e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2c)x^4$$
$$+ (3a^2f + 6abe + 6acd + 3b^2d + 3bc^2)x^5$$
$$+ (3a^2g + 6abf + 6ace + 3ad^2 + 3b^2e + 6bcd + c^3)x^6$$
$$+ (3a^2h + 6abg + 6acf + 6ade + 3b^2f + 6bce + 3bd^2 + 3c^2d)x^7$$

Das Gesetz der Factoren vor den Potenzen von x ist folgendes: 1) die Coefficienten der Wurzel sind überall zu 3 und 3 verbunden in der Art wie die Combinationen mit Wiederholungen der dritten Klasse. 2) Diese 3 Factoren irgend eines zu x^n gehörenden Coefficienten des Cubus liefern in der Wurzel mit einander multiplicirt ebenfalls x^n und 3) stehen vor den Buchstabengröfsen entweder die Zahlen 1, 3 oder 6; die Zahl 1 vor jedem Cubus, die Zahl 3 vor jedem Product eines Quadrats mit einer einfachen Buchstabengröfse, die Zahl 6 vor dem Product dreier einfachen Buchstabengröfsen.

III. Die obige Reihe gibt ein Mittel an die Hand, aus einem unvollständigen Cubus die $\sqrt[3]{\ }$ auszuziehen, wie an dem folgenden Beispiel erläutert werden soll.

Der Cubus sei 355, so setze

$$355 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots\ldots$$

Ist nun nach der obigen Formel

$$355 = (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots)^3$$

und wird dieses Polynom in dem decadischen System ausgedrückt, so ist $x = \frac{1}{10}$;

$$A = a^3 = 7^3 = 343$$
$$B = 3a^2b$$
$$C = 3a^2c + 3ab^2$$
$$D = 3a^2d + 6abc + 6^3$$

u. s. w.

Nun hat man zunächst

$$355 - 343 = 12 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

$$Bx\ (< 12) = 3a^2bx = \frac{3 \cdot 7^2}{10} \cdot b = 14{,}7 \times b$$

folglich $\quad b\left(< \frac{12}{14{,}7}\right) = 0$

und $\quad \sqrt[3]{355} = 7{,}0cdef\ldots$

2. $Cx^2\ (< 12) = (3a^2c + 3ab^2)x^2$
$= (3a^2c + 0)\,x^2 = 1{,}47 \cdot c$

folglich $\quad c < \frac{12}{1{,}47} = 8$

und $\quad \sqrt[3]{355} = 7{,}08\,def\ldots.$

Jedenfalls ist nun noch

$$12 - 8 \times 1{,}47 = 0{,}24 = Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots..$$

3. $Dx^3\ (< 0{,}24) = \frac{3a^2d + 0}{1000} = 0{,}147\,d$

woraus

$$d\left(< \frac{0{,}24}{0{,}147}\right) = 1$$

und $\quad \sqrt[3]{355} = 7{,}081\,efg\ldots.$

ferner

$$0{,}24 - 0{,}147 \times 1 = 0{,}093 = Ex^4 + Fx^5 + \ldots.$$

4. $Ex^4\ (< 0{,}093) = \frac{3a^2e + 3ac^2 + 0}{10000}$
$= 0{,}0147 \cdot e + 0{,}1344$

woraus $\quad e < \frac{0{,}093 - 0{,}1344}{0{,}0147} = -\frac{0{,}0314}{0{,}0147}$

e ist also negativ, folglich ist $d = 1$ genommen, zu grofs, mithin $d = 0$

und $\quad \sqrt[3]{355} = 7{,}080\,efg\ldots..$

ferner $\quad 0{,}24 = Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \ldots..$

und statt No. 4:

5. $Ex^4\ (< 0{,}24) = \frac{3a^2e + 3ac^2}{10000}$
$= 0{,}0147 \cdot e + 0{,}1344$

woraus $\quad e < \frac{0{,}24 - 0{,}1344}{0{,}0147} = 7 + \frac{27}{147}$

Aus dem geringen Rest $\frac{27}{147}$ läfst sich übersehen, dafs 7 zu grofs ist, woher $e = 6$ genommen worden mufs.

Es ist also $\sqrt[3]{355} = 7{,}0806\,fgh\ldots.$

ferner

$$0{,}24 - Ex^4 = 0{,}24 - (0{,}0147 \times 6 + 0{,}1344)$$

oder $\quad 0{,}0174 = Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + \ldots.$

6. $Fx^5\ (< 0{,}0174) = \frac{3a^2f + 0}{100000} = 0{,}00147\,f$

woraus $\quad f < \frac{0{,}0174}{0{,}00147} = 10 + \frac{27}{147}$

Es kann nur die höchste einziffrige Zahl $= 9$ genommen werden, mithin

$$\sqrt[3]{355} = 7{,}08069\,gh\ldots.$$

ferner $0{,}0174 - Fx^5 = 0{,}0174 - 0{,}00147 \times 9$
$= 0{,}00417 = Gx^6 + Hx^7 + Jx^8 + \ldots..$

7. $Gx^6 (< 0{,}00417) = \frac{3a^2g + 6ace + c^3}{1000000}$
$= 0{,}000147\, g + 0{,}002528$

woraus
$$g < \frac{0{,}00417 - 0002528}{0{,}000147} = \frac{0{,}001642}{0{,}000147} = 10$$
woher $g = 9$
$$\sqrt[3]{355} = 7{,}080699\, hik\ldots$$
ferner $0{,}00417 - Gx^6$
$= 0{,}00417 - (9 \times 0{,}000147 + 0{,}002528)$
$= 0{,}000319 = Hx^7 + Jx^8 + Kx^9 + \ldots..$

8. $Hx^7 (< 0{,}000319) = \frac{3a^2h + 6acf}{10000000}$
$= 0{,}0000147 \cdot h + 0{,}0003024$

woraus $h = \frac{0{,}0000166}{0{,}0000147} = 1$

daher $\sqrt[3]{355} = 7{,}0806991\, ik\ldots$
ferner
$0{,}000319 - Hx^7 = 0{,}000319 - 0{,}0003171$
$= 0{,}0000019 = Jx^8 + Kx^9 + \ldots..$

9. $Jx^8 (< 0{,}0000019)$
$= \frac{3a^2i + 6acg + 3ae^2 + 3c^2e}{100000000}$
$= 0{,}00000137\, i + \left(\frac{3024 + 756 + 1152}{100000000}\right)$
$= 0{,}00004932$

woraus
$i = \frac{0{,}00000190 - 0{,}00004932}{0{,}00000147}$, also negativ
mithin ist h mit 1 zu grofs und $= 0$
$$\sqrt[3]{355} - 7{,}0806990\, ikl\ldots$$
ferner
$0{,}000319 - Hx^7 + 0{,}000319 - 0{,}0003024$
$= 0{,}0000166 = Jx^8 + kx^9 + \ldots.$

10. $Jx^8 (< 0{,}0000166)$
$= 0{,}00000147\, i + 0{,}00004932$

woraus $i = \frac{0{,}00001660 - 0{,}000004932}{0{,}00000147}$,
wieder negativ; und es ist mithin auch g noch zu grofs, und mufs 8 statt 9 gesetzt werden, demnach hat man statt No. 7
$$\sqrt[3]{355} = 7{,}080698\, hik\ldots.$$
ferner $0{,}00417 - Gx^6$
$= 0{,}00417 - (8 \times 0{,}000147 + 0{,}002528)$
$= 0{,}000466 = Hx^7 + Jx^8 + Kx^9 + \ldots.$

11. $Hx^7 (< 0{,}000466)$
$= 0{,}0000147 \times h + 0{,}0003024$

woraus $h = \frac{0{,}0001636}{0{,}0000147} = 11$
wofür natürlich nur 9 gesetzt werden kann.

Demnach $\sqrt[3]{355} = 7{,}0806989\, ik\ldots.$
ferner $0{,}000466 - Hx^7$
$= 0{,}000466 - (9 \times 0{,}0000147 + 0{,}0003024)$
oder $0{,}0000313 = Jx^8 + Kx^9 + \ldots..$

12. $Jx^8 (< 0{,}0000313)$
$= 0{,}00000147 \cdot i + 0{,}00004932$
woraus wieder i negativ wird und woher h mit 9 zu grofs ist. Aher auch $h = 8$ ist, wie sich übersehen läfst, noch zu grofs, demnach ist statt No. 11
$$\sqrt[3]{355} = 7{,}0806987$$
ferner $0{,}000466 - Hx^7$
$= 0{,}000466 - (7 \times 0{,}0000147 + 0{,}0003024)$
oder $0{,}0000607 = Jx^8 + Kx^9 + \ldots.$

13. $Jx^8 (< 0{,}0000607)$
$= 0{,}00000147 \times i + 0{,}00004932$

woraus $i = \frac{0{,}00001138}{0{,}00000147} = 8$

u. s. w.

Man hat demnach
$$\sqrt[3]{355} = 7{,}08069878\ldots..$$

Das vorstehende Beispiel ist deshalb so weit und streng durchgeführt, damit man bei den dabei oft vorkommenden Hindernissen durch zu grofs gewählte Zahlen nicht auf Rechnungsfehler schliefse; bei einiger Uebung verschafft man sich mehrere Erleichterungen.

Culmination eines Gestirns (culmen das Oberste einer Sache) ist der Durchgang des Gestirns durch die Mittagslinie, oder der augenblickliche Stand des Gestirns im Meridian des Beobachtungsorts. Fixsterne haben einen ungeänderten Culminationspunkt am Himmel; Sonne, Mond und Planeten ändern mit jedem Tage ihre Culminationshöhe in der Meridianlinie. Circumpolarsterne (s. den Art.) gehen innerhalb eines Sterntages 2 mal durch den Meridian des Orts, sie haben 2 Culminationen, eine obere C, von der gröfsten Höhe, und eine untere C, von der kleinsten Höhe.

In dem Art. correspondirende Höhen ist angegeben, wie man die Mittagslinie eines Orts genau bestimmen kann. Hat man diese nun fixirt, entweder durch ein Fernrohr, welches nur in der Verticalen drehbar ist, oder durch ein Fadendreieck, indem man das vordere Ende einer über eine Rolle geleiteten Schnur mit einem Gewicht beschwert, so dafs es vertical hängt und das hintere Ende derselben innerhalb des Meridians befestigt, so dafs beide Schnur-Enden den Meridian visiren, so kann man die C eines Gestirns unmittelbar beobachten und dessen Zeitpunkt unmittelbar an der Uhr ablesen.

Die Sonne und der Mond culminiren in dem Augenblick, wo deren Mittelpunkte in dem Meridian sich befinden; geschieht dies durch die Sonne, so hat man den Zeitpunkt des wahren Mittags.

Sterne, die zu gleicher Zeit culminiren, haben gleiche Rectascension (s. Aufsteigung und Absteigung eines Gestirns); Sterne, die 12 Stunden später culminiren, sind von den vorigen um 180° an Rectascension unterschieden. Circumpolarsterne, die 2 mal culminiren, haben 2 Rectascensionen, die um 180° unterschieden sind. Sterne, die in den Sonnenwenden culminiren, haben einerlei Rectascension und Länge, weil dieser Meridian sowohl auf dem Aequator als auf der Ekliptik senkrecht steht.

Culminationspunkt oder Punkt im Meridian, in welchem ein Gestirn culminirt (s. den vor. Art.).

Curven, krumme Linien. Es gibt 2 Klassen derselben: Curven einfacher Krümmung und C. doppelter Krümmung. Die ersten sind solche, deren sämmtliche Punkte in einerlei Ebene liegen; die letzten solche, deren Punkte in verschiedenen Ebenen liegen, und zwar der Art, dafs jeder auch noch so kleine Theil der C in verschiedenen Ebenen liegt. Die C. erster Klasse entstehen durch Zeichnung von krummen Linien auf einer ebenen Oberfläche, die der zweiten Klasse durch Zeichnung von Linien auf krummen Oberflächen, als auf Cylindern, Kegeln, Paraboloiden u. dergl. Eben so entstehen dieselben als Durchschnittslinien sich schneidender krummer Flächen. Z. B. bei Kappen in Gewölben, bei Ausbauten an krummlinigen Bedachungen, bei Zusammensetzung technischer Geräthe u.s.w.

Unter C in der Wissenschaft versteht man aber nicht jede willkührlich gezeichnete und nach Laune beliebig abzuändernde krumme Linie, sondern eine solche, bei deren Form und Fortgang ein bestimmtes Gesetz obwaltet. Der kurze Art: Coordinaten gibt darüber eine klare Vorstellung; und wie hier eine Coordinatengleichung für den Kreis aufgestellt ist, so hat jede andere aufser dem Kreis noch mögliche C. ihr eigenthümliches Gesetz, welches bei C. einfacher Krümmung durch nur eine, bei C. doppelter Krümmung durch zwei Gleichungen ausgesprochen wird.

Curven einfacher Krümmung.

I. Allgemeines.

1. In dem Art. Coordinaten ist die Gleichung für den Kreis

$$y^2 = 2rx - x^2$$

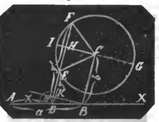
oder auf 0 reducirt

$$y^2 + x^2 - 2rx = 0 \qquad (1)$$

Diese Gleichung ist entstanden, indem der Durchmesser zur Abscissenlinie, einer dessen Endpunkte (A) zum Anfangspunkt der Abscissen gemacht und der Coordinatenwinkel als rechter genommen worden ist. Diese 3 Einschränkungen haben die obige Gleichung offenbar ebenfalls eingeschränkt, vereinfacht, und sie kann als allgemeine Coordinatengleichung für den Kreis nicht gelten.

Es sei Fig. 518 EFG ein Kreis, C dessen Mittelpunkt, dessen Radius wie CE, $CF = r$. Eine beliebige gerade Linie AX sei die Abscissenlinie, ein beliebiger Punkt A in derselben der Anfangspunkt der Abscissen und der Coordinatenwinkel wie


Fig. 518.



$\angle ADF = \alpha$, so mufs zuerst die Lage des Kreises gegen A und AX festgestellt werden, und dies geschieht angemessen, wenn man vom Mittelpunkt C auf AX unter dem $\angle \alpha$ die gerade Linie CB zieht und die Abstände $AB = a$ und $CB = b$ setzt.

Nimmt man nun den beliebigen Abstand $AD = x$, setzt die beiden Ordinaten $DE = y$, $DF = y_1$, zieht die Hülfslinien $CH = BK$ normal auf DF so hat man

$$CE^2 = r^2 = CH^2 + EH^2$$
$$CF^2 = r^2 = CH^2 + FH^2$$

Nun ist

$$CH = BK = BD \sin \angle BDK = (a - x) \sin \alpha$$
$$EH = DH - DE = HK + DK - DE$$
$$FH = - DH + DF = -(HK + DK) + DF$$

Da nun

$$HK = BC = b$$

und $DK = BD \cos \angle BDK = -(a - x) \cos \alpha$

so ist $EH = b - (a - x) \cos \alpha - y$

$$FH = - b + (a - x) \cos \alpha + y$$

und

$$CE^2 = r^2 = (a - x)^2 \sin^2\alpha + [b - (a - x) \cos \alpha - y]^2$$
$$CH^2 = r^2 = (a - x)^2 \sin^2\alpha + [- b + (a - x) \cos \alpha + y_1]^2$$

woraus zu ersehen, dafs y^2 und y_1^2 eine und dieselbe Function von x ist, und zwar ist

$$y^2 + 2(a - x)y \cos\alpha + (a - x)^2 - 2by - 2b(a - x)\cos\alpha + b^2 - r^2 = 0$$

oder die Klammern aufgelöst

$$y^2 - 2yx\cos\alpha + x^2 + 2y(a\cos\alpha - b) - 2x(a - b\cos\alpha) + (a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2 - r^2) = 0 \quad (2)$$

Sobald $\alpha = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ genommen wird, entsteht die Gl.

$$y^2 + (a - x)^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \quad (3)$$

für $b = 0$, also wenn AX durch den Mittelpunkt C geht

$$y^2 + (a - x)^2 - r^2 = 0 \quad (4)$$

und für $a = r$, wenn nämlich A in den Umfang des Kreises liegt,

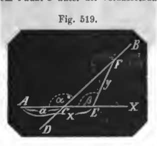
$$y^2 + x^2 - 2rx = 0 \quad (5)$$

wie Gleichung 1.

2. Es ist der Kreis die einfachste krumme Linie, und dennoch wird sie schon durch eine Gleichung des zweiten Grades bestimmt; die einfachste unter allen Linien ist offenbar die gerade, und wenn man diese als Curve behandelt und eine Gleichung für dieselbe ermittelt, so erhält man diese vom ersten Grade wie folgt:

Es sei Fig. 519, BD die gegebene Richtung einer geraden Linie, AX eine beliebige Abscissenlinie in derselben Ebene, so schneiden sich beide Linien in irgend einem Punkt C unter der Voraussetzung,

Fig. 519.



dafs sie nicht $\mp$ sind. Nimmt man den beliebigen Punkt A als Anfangspunkt der Abscissen, setzt den Abstand $AC = a$, den Schneidungswinkel $ACB = \alpha$, so ist die Linie BD gegen A und AX bestimmt. Setzt man nun den constanten Coordinatenwinkel wie $\angle AEF = \beta$, so ist zwischen der beliebigen Länge $AE = x$ und der zugehörigen Ordinate $EF = y$

$$CE : EF = \sin CFE : \sin FCE$$

oder $\quad x - a : y = \sin(\alpha - \beta) : \sin\alpha$

woraus

$$y\sin(\alpha - \beta) - x\sin\alpha + a\sin\alpha = 0 \quad (1)$$

für $\beta = 90^\circ$ entsteht

$$y\cos\alpha + x\sin\alpha - a\sin\alpha = 0 \quad (2)$$

für $a = 0$, wenn also die Abscissen vom Durchschnittspunkt C anfangen

$$y - x\,tg\,\alpha = 0 \quad (3)$$

3. Es gibt auch C. deren Bestimmung nur mit Hülfe von Gleichungen geschieht, in welchen die Coordinaten von Kreisbogen oder Logarithmen abhangen, also von transcendenten Gleichungen wie z. B. in dem Art. berührende gerade Linie No. 4, pag. 343 die Gleichungen für die Cycloide:

$$x = r(1 - \cos\varphi)$$
$$y = r(\varphi - \sin\varphi)$$

Curven, deren Gesetzen algebraische Gleichungen zu Grunde liegen nennt man algebraische Curven, Curven, die durch transcendente Gleichungen bestimmt werden, transcendente Curven. Unter den letzten heifsen diejenigen, in welchen eine der Coordinaten als Exponent erscheint exponentiale Curven, wie die logarithmische Linie, deren Gleichung ist: $y = a^x$.

Die in einer Gleichung vorkommenden unveränderlichen Gröfsen heifsen die Parameter der C., weil diese den Maafsstab der C. bestimmen, dergestalt, dafs mit der Abänderung dieser Parameter nicht die Form, sondern nur die Abmessung der C. geändert wird.

4. Wie die Gleichungen für die gerade Linie No. 4 eine Gleichung vom ersten Grade, die für den Kreis No. 2 vom 2ten Grade, so hat man auch Gleichungen vom 3ten, vom 4ten, ..., vom $n$ten Grade, zu welchen Curven von einfacher Krümmung gehören. Die gerade Linie, zu welcher eine Gl. vom ersten Grade gehört, bildet die erste Ordnung der Linien überhaupt; die Curven, welchen Gleichungen vom 2ten Grade zugehören, sind Linien zweiter Ordnung; Curven zu Gleichungen vom 3ten, 4ten .... $n$ten Grade sind Linien der 3ten, 4ten, $n$ten Ordnung. Dagegen betrachtet man auch die Curven mit Ausnahme der geraden Linie für sich und nennt C. zu Gleichungen vom 2ten Grade Curven erster Classe, die zu Gleichungen vom 3ten, 4ten .... $n$ten Grade sind C. 2ter, 3ter, ... $(n-1)$ter Classe.

Die Gleichungen 1 No. 4 und 2 No. 2, wenn man in dieser noch die Klammern auflöst, heifsen vollständige Gleichungen. Die erste hat die allgemeine Form:

$$ay + bx + c = 0 \quad (1)$$

die zweite die allgemeine Form:

$$ay^2 + bx^2 + cyx + dy + ex + f = 0 \quad (2)$$

Eine Gleichung vom 3ten Grade ist vollständig bei folgenden vorhandenen Gliedern

$$ay^3 + bx^3 + cy^2x + dx^2y + ey^2 + fx^2 + gxy + hy + ix + k = 0 \qquad (3)$$

Ueberhaupt ist eine auf 0 reducirte Gleichung vom $n$ten Grade vollständig, wenn x und y in der $n$ten, der $(n-1)$ten, der $(n-2)$.... 2ten, 1ten Potenz, wenn ferner die Producte von x und y vorkommen, deren Exponentensummen n, $n-1$, $n-2$, ... 3, 2 betragen, + dem bekannten Gliede.

Um die Anzahl der zu einer vollständigen Gl. vom $n$ten Grade gehörenden Glieder zu finden, hat man

x und y in sämmtlichen Potenzen von der 1 bis $n$ten	$2n$
x und y in den Producten	$\frac{1}{2}(n-1)n$
das unbenannte Glied	1
gibt die Summe der Glieder $2n + \frac{1}{2}(n-1)n + 1 =$	$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

Es hat also Glieder die Gleichung
vom 1. Grade $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$
„ 2. „ $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$
„ 3. „ $= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$
„ 4. „ $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$
u. s. w.

5. Setzt man in die allgemeine Gleichung des 1ten Grades

$$ay + bx + c = 0$$

$x = 0$, so erhält man

$$y = -\frac{c}{a}$$

für $x = +x$ ist

$$y = -\frac{bx + c}{a}$$

für $x = -x$

$$y = \frac{bx - c}{a}$$

Setzt man für a, b, c die Werthe aus Gl. 1 No. 2 mit Bezug auf Fig. 520, so hat man

für $x = +x$; $y = (x - a)\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

für $x = 0$; $y = -a\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

für $x = -x$; $y = -(x + a)\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

Setzt man $a = 0$, d. h. verlegt man den Anfangspunkt der Abscissen in den Durchschnittspunkt beider Linien, so ist

für $x = +x$; $y = x\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

für $x = 0$; $y = 0$

für $x = -x$; $y = -x\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

d. h. bei beliebiger Annahme der Abscisse rechts oder links sind die Ordinaten gleich grofs, aber in Beziehung auf die Abscissenlinie AX in entgegengesetzter Lage.

6. Aus der allgemeinen Gleichung 2 No. 4

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

y entwickelt gibt für $x = +x$

$$y = -\frac{bx+d}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bx+d}{2a}\right)^2 - \frac{cx^2+ex+f}{a}} \qquad (1)$$

für $x = 0$

$$y = -\frac{d}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{f}{a}} \qquad (2)$$

für $x = -x$

$$y = -\frac{d-bx}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{d-bx}{2a}\right)^2 - \frac{cx^2-ex+f}{a}} \qquad (3)$$

Setzt man aus Gl. 2 No. 1 die Werthe für die allgemeinen Coefficienten a bis f in diese 3 Gleichungen, so hat man die Wurzelgröfse in 1:

$$[(a-x)\cos\alpha - b]^2 - x^2 + 2(a - b\cos\alpha)x - a^2 + 2ab\cos\alpha - b^2 + r^2 = r^2 - (a-x)^2\sin^2\alpha$$

Dieselbe in 2:

$$(a\cos\alpha - b)^2 - a^2 + 2ab\cos\alpha - b^2 + x^2 = r^2 - a^2\sin^2\alpha$$

Dieselbe in 3:

$$[(a+x)\cos\alpha - b]^2 - x^2 - 2(a - b\cos\alpha)x + 2ab\cos\alpha - b^2 + r^2 = r^2 - (a+x)^2\sin^2\alpha$$

Aus der allgemeinen Gleichung hat man nun die Ordinate für positive Abscissen $(+x)$

$$y = b - (a-x)\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - (a-x)^2\sin^2\alpha} \qquad (4)$$

für $x = 0$

$$y = b - a\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

für negative Abscissen $(-x)$

$$y = b - (a+x)\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - (a+x)^2\sin^2\alpha} \qquad (6)$$

Für rechtwinklige Coordinaten, also für $\alpha = 90°$ hat man für positive Abscissen $(+x)$

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (a-x)^2} \qquad (7)$$

für $x = 0$

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - a^2} \qquad (8)$$

für negative Abscissen $(-x)$

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (a+x)^2} \qquad (9)$$

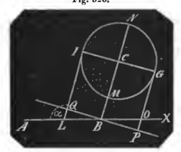
7. A. In Gl. 4 ist (Fig. 518) $b = CB$, $(a - x) \cos \alpha = - DK$ also die Gröſse vor dem $\sqrt{}$zeichen die Linie DH, die Wurzelgröſse= $HE = HF$, so daſs

$$y = DH \begin{matrix} + HF \\ - HE \end{matrix} = DF \text{ oder } DE \text{ ist.}$$

B. Für $(a - x) \sin \alpha = r$; d. h. für $BK = CJ = r$ muſs H in die Peripherie in J fallen; dann wird $HE = HF = 0$ nnd $DE = DF$ die Tangente in J. Es existirt also nur diese eine Ordinate $= b - (a - x) \cos \alpha = b + (a - x) \cos BDK = HK + DK$ walche jena Tangente in $J + CB$ ist, die bis in AX fällt, nämlich die Ordinate LJ, Fig. 520.

C. Für $(a - x) \sin \alpha > r$, also wenn D zwischen A nnd L fällt, wird dia $\sqrt{}$gröſse negativ, y ist nnmöglich, wie anch Fig. 520 nachweiſst.

Fig. 520.



D. Für $x = a$, also $a - x = 0$; d. h. wenn $AB = x$, ist
$y = b \pm r$ also Fig. 520:

$$y = BC \begin{matrix} + CN \\ - CM \end{matrix} \Big\} = BN \text{ oder } BM.$$

E. Für $x = a + x$, d. h. wenn x über B hinans, also zwischen B und X fällt, wird $a - x = a - (a + x) = - x$ daher die $\sqrt{}$gröſse $r^2 - (-x)^2 \sin^2\alpha = r^2 - x^2 \sin^2\alpha$ und

$$y = b + x \cos \alpha \pm \sqrt{r^2 - x^2 \sin^2\alpha}$$

So lange nnn $x \sin \alpha < r$ bleibt, erhält man Doppelordinaten zwischen B nnd O, für $x \sin \alpha = r$ wird die $\sqrt{}$gröſse $= 0$,
$y = b + x \cos \alpha = b + r \cot \alpha = b - BP \operatorname{tg} BOP = GP - GO = GO$; die letzte Ordinate ist also wieder die zweite Tangente GO an G und für $x \sin \alpha > r$, nämlich für x über O hin existiren keina Ordinaten mehr.

8. Für $x = 0$ in Gl. 5 existiren nur Ordinaten wenn $a \sin \alpha < r$, wann also der Pnnkt A innerhalb LO liegt. Wird A in L angenommen, so ist $a = BL$ und es existirt die einzige Ordinate, die Tangente in $J = b - BL \cos \alpha = b + BL \cos BLJ = JQ + LQ = JL$.

Wird A in B genommen, so ist $a = 0$;

$$y = b \pm r = BC \begin{matrix} + NC \\ - MC \end{matrix} \Big\} = NB \text{ oder } MB.$$

Wird A in O angenommen, so ist $a = - BO$ nnd
$y = b + a \cos \alpha = b - BO \cos BOP = GP - OP = GO$ die einzige Tangente in G.

Für $+ a \sin \alpha > r$, wenn also der Pnnkt A in den Verlängerungen von BL und BO liegt, wird die $\sqrt{}$gröſse negativ nnd y ist unmöglich.

9. Wenn x negativ ist, wenn also x in der Verlängerung von LA liegt, gibt es keine Ordinaten, weil schon $a \sin \alpha > r$ ist. Es existiren die No. 7 gedachten Ordinaten, wenn der Punkt A innerhalb LO oder in der Verlängerung von BO gelegen ist; im arsten Fall für positive und negative, im 2ten nnr für negative Abscissen.

10. Die zu beiden Gleichungen 1 No. 2 nnd 2 No. 1 gehörenden Curven unterscheiden sich also auch wesentlich darin, daſs bei jener für alle positiven nnd negativen Werthe von x bis ins Unendliche Ordinaten existiren, bei dieser dagegan die Abscissen für mögliche Ordinaten beschränkt sind. Da die Curve ein Stetiges ist nnd da wegen der Unendlichkeit des Raumes kein Grnnd für die Annahme vorbanden ist, daſs die C. irgendwo aufhöre, so mnſs da, wo die Abscisse für Ordinaten eine Grenze hat, die C. in eine dem Fortschreiten der Abscissen entgegengesetzte Richtnng sich wenden nnd entwedar in sich zurückkehren, wie beim Kreise Fig. 519 oder sich schneiden. Diese Aenderung im Fortgange characterisirt sich dadurch, daſs an solcher Stelle statt 2 Ordinaten aus der Gleicbnng nnr e i n a hervorgeht, welche die Richtungsänderung varmittelt, wie in Gl. 4 No. 6 für $(a - x) \sin \alpha = r$ oder für $x = a - r \operatorname{cosec} \alpha$ nnd $x = a + r \operatorname{cosec} \alpha$ oder bei rechtwinkligen Ordinaten Gl. 7 No. 6 wenn $x = a - r$ nnd $= a + r$ ist. In jedem der beiden Pnnkte geschieht eina Umwendnng der Curve.

11. Bei Curven, welche znrückkehren, heiſsen diejenigen Theile, welche einer anderen Folge von Ordinaten angehören, Z w e i g e. Haben diese die Eigenschaft, daſs sämmtliche Ordinaten von der Abscissenlinie aus nach entgegengesetzten Richtnngen genommen paarweise zu einer Abscisse gehörig gleich lang werden, so heiſst die Abscissenlinie ein D u r c h m e s s e r der C.; sind die Coordinaten rechtwinklig, so heiſst dar Durchmesser be-

sonders **Axe** und ihr Durchschnittspunkt mit der C. **Scheitelpunkt**.

Die beiden **geschlossenen** Curven, der Kreis und die Ellipse werden durch jeden Durchmesser in Zweige geschieden, das Oval ist eine geschlossene Linie, die nur einen Durchmesser und 2 ganz bestimmte Zweige hat. Man gebraucht den Ausdruck Zweige vornehmlich von Curventheilen, die von einem **Scheitelpunkt** aus, nach verschiedenen Richtungen ins Unendliche auslaufen, wie bei der Parabel; bisweilen laufen sie durch einen Punkt, den **Knoten**, in welchem sie sich durchkreuzen. Hiervon sollen die beiden folgenden Sätze Beispiele liefern.

12. Die Gleichung

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0 \qquad (1)$$

gibt eine C. der zweiten Klasse oder eine Linie der 3ten Ordnung.

Für $x = 0$ wird $y = 0$; der Anfangspunkt der Abscissen ist also zugleich ein Punkt der C.

Entwickelt man y so erhält man

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$$

Es existiren also für jedes x (mit Ausnahme für $x = 0$) 2 gleich grofse entgegengesetzt liegende Ordinaten, die einen positiven z. B. über, die anderen negativen unterhalb der Abscissenlinie.

Setzt man x negativ, so entsteht

$$y = \pm \sqrt{-\frac{x^3}{a+x}}$$

Es existiren also für negative Abscissen keine Ordinaten und der Anfangspunkt der Abscissen ist der Scheitelpunkt der C.

$$\text{Es ist } y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$
$$= \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{a(a-x)}$$
$$= \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \frac{x^5}{a^2(a-x)}$$
$$= \frac{x^3}{a}\left[1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \dots\right]$$

Das Quadrat der Ordinate wächst also in einem noch höheren Maafse als mit dem Cubus der Abscisse und beide Zweige der C. sind gegen die Abscissenlinie convex.

Endlich ist a die Grenze der positiven Abscissen und für $x = a$ wird y unendlich, folglich diese letzte Ordinate eine Asymptote an beiden Zweigen der C. Die C. der aufgestellten Gleichung ist die **Cissoide** (κισσος, Epheu) des Diokles und soll nun construirt werden.

Aus Gl. 1 erhält man

$$x^3 = y^2(a - x)$$

woraus $\quad x : a - x = y^2 : x^2 \qquad (1)$

Nun hat man, wenn Fig. 521, $AFHB$ ein Halbkreis ist, EF die lothrechte Ordinate in E; AF, BF Sehnen, nach Euklid X, 34:

$$AE : BE = AF^2 : BF^2$$

Nimmt man vom Mittelpunkt C das Stück $CG = CE$, errichtet die Ordinate GH, zieht die Sehne AH, welche die Ordinate EF in K schneidet, so ist

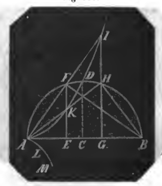
$\quad \angle BAH = \angle ABF$

daher $\quad \triangle EAK \sim \triangle FBA$

und $\quad AF : BF = EK : AE$

folglich $\quad AE : BE = EK^2 : AE^2$

Fig. 521.



Setzt man nun den Durchmesser $AB = a$, $AE = x$ so ist $BE = a - x$, und es ist

$$x : a - x = EK^2 : x^2$$

folglich ist nach Gl. I, EK die Ordinate y für $x = AE$.

Nimmt man eine Abscisse $AG > \frac{1}{2}a$ dann ist nach Euklid

$$AG : BG = AH^2 : BH^2$$

Verlängert man nun GH und AF bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt J, so ist

$\quad \angle JAG = \angle ABH$

also $\quad \triangle JAG \sim \triangle ABH$

und $\quad AH : BH = GJ : AG$

also $\quad AG : BG = GJ^2 : AG^2$

oder $\quad x : a - x = GJ^2 : x^2$

und $\quad GJ = y$ für $x = AG$

Der obere Zweig der Cissoide für positive Ordinaten hat ungefähr die Form $JDKA$, der untere Zweig für die negativen Ordinaten hat dann die ihr gleiche Form ACM.

13. Die **Konchoide** (κογχη, Muschelschale) **Muschellinie** ist eine Linie der 4ten Ordnung oder eine L. der 3ten Klasse.

Ihre auf 0 reducirte Gleichung ist

$$y^4 + 2cy^3 + (x^2 - a^2 + c^2)y^2 - 2a^2cy - a^2c^2 = 0 \quad (1)$$

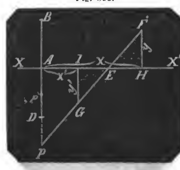
Die K. besteht aus 2 einzelnen Linien, die eine gemeinschaftliche Asymptote haben und die also in den beiden einander entgegengesetzten unendlich fernen Punkten sich berühren.

Setzt man in die Gl. $-y$ für y so erhält man die Gl.

$$y^4 - 2cy^3 + (x^2 - a^2 + c^2)y^2 + 2a^2cy - a^2c^2 = 0 \quad (2)$$

Die erste Gleichung ist für die obere, die zweite für die untere K., und diese untere enthält unter gewissen Bedingungen einen Knoten, um dessen Willen die Linie als Beispiel hier aufgeführt wird.


Fig. 522.



Es sei Fig. 522, XX' die gemeinschaftliche Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Abscissen. In den beiden Gleichungen kommt x nur im Quadrat vor, die C. ist also für $+x$ und $-x$ dieselbe und daher die obere und die untere K. von A aus zu beiden Seiten symmetrisch.

Es sei BP normal in A auf XX', P unter dem Abstande c von A ein fester Punkt, $AB = AD$ eine constante Länge a, B und D sind die Anfangspunkte, oder wenn die zu beiden Seiten von A liegenden 4 Zweige der K. betrachtet werden, die Mittelpunkte der oberen und der unteren K. Die Construction ist folgende:

Man zieht, um Punkte der K. zu erhalten, von jedem beliebigen Punkt z. B. E der Abscisse eine gerade Linie EP nach dem Punkt P, dem Pol der K. mit Verlängerung nach oben und nimmt auf dieser Linie von E aus zu beiden Seiten die Längen $EF = EG = a$, so ist F ein Punkt der oberen und G ein Punkt der unteren K.

Aus dieser einfachen Construction ersieht man, dafs B und D die entferntesten Punkte von XX' sind und dafs die Punkte F und G, je weiter E von A genommen wird, je schräger also die Linie PE ausfällt, immer näher aneinander rücken, die Linie XX' aber nie erreichen. Die Normalen FH und GJ sind die gleich grofsen Ordinaten und die Abstände AH und AJ, welche um $JH = 2JE$ unterschieden sind, die Abscissen für die Punkte F und G.

Die Gleichung für die K. ergibt sich nun folgendermaafsen:

Es ist $PA : AE = GJ : EJ = FH : EH$

oder $c : x^1 + JE = y : JE = y : JE$

oder $c : x - JE = y : JE$

daher $JE = \frac{x^1 y}{c - y} = \frac{xy}{c + y}$

Für $x^1 = x$ hat man also

$$JE = \frac{xy}{c \pm y} \quad (3)$$

wo das obere Vorzeichen für die obere, das untere für die untere K. gilt.

Nun ist

$$EG^2 = EF^2 = FH^2 + EH^2 = GJ^2 + JE^2$$

oder $$a^2 = y^2 + \left(\frac{xy}{c \pm y}\right)^2 \quad (4)$$

woraus die Gleichung

$$y^4 \pm 2cy^3 + (x^2 - a^2 + c^2)y^2 \mp 2a^2cy - a^2c^2 = 0 \quad (5)$$

Wenn A, B, C, D die 4 Wurzeln der Gleichung für y sind, so hat man

$$(y - A)(y - B)(y - C)(y - D) = 0$$

woraus entwickelt:

$$y^4 - (A + B + C + D)y^3 + (AB + AC + AD + BC + BD + CD)y^2 - (ABC + ABD + ACD + BCD)y + ABCD = 0$$

Es ist mithin $ABCD = -a^2c^2$

$-(A + B + C + D) = +2c$

folglich sind für die obere K die Wurzeln

$A = +a$; $B = -a$; $C = -c$; $D = -c$

für die untere K.

$A = +a$; $B = -a$; $C = +c$; $D = +c$

Die beiden Wurzeln $\pm c$ enthalten der Figur nach einen Widerspruch; denn da y entweder = oder $< a$ ist, so kann y weder $+c$ noch $-c$ werden. Sollen also diese Wurzeln gelten, so mufs P nach p innerhalb AD verlegt werden.

Die Gleichungen 1 und 2 sowie Gl. 4 sind zu complicirt, als dafs man die Form der C. aus ihnen unmittelbar entnehmen könnte; sie sind auch erst der vorangegangenen Construction entsprechend aufgefunden worden. Man kann aber aus Gl. 4 mit Hülfe von Gl. 3 eine einfachere Relation für die Veränderlichen ableiten:

Bezeichnet man nämlich den jedesmaligen Abstand AE mit z so hat man aus 3

Für die obere K.

$$z = x - \frac{xy}{c+y} = \frac{c}{c+y}\,x \qquad (6)$$

und $$x = \frac{c+y}{c}\,z \qquad (7)$$

Für die untere K.

$$z = x + \frac{xy}{c-y} = \frac{c}{c-y}\,x \qquad (8)$$

und $$x = \frac{c-y}{c}\,z \qquad (9)$$

Diese Werthe von x in Gl. 4 gesetzt, gibt für die obere und untere K.

$$y^2 = \frac{a^2c^2}{c^2+z^2} \qquad (10)$$

$$z^2 = \frac{a^2-y^2}{y^2}\cdot c^2 \qquad (11)$$

und $$z = \frac{c}{y}\sqrt{a^2-y^2} \qquad (12)$$

Nun ist, wenn $y = \pm a$ ist, $z = 0$ d. h. E fällt in A und die Ordinaten sind $AB = +a$ und $AD = -a$

Für $y = \pm a$ hat man $z = \pm\sqrt{a^2-c^2}$

Es mufs also $c <$ sein als a und es entstehen die Ordinaten

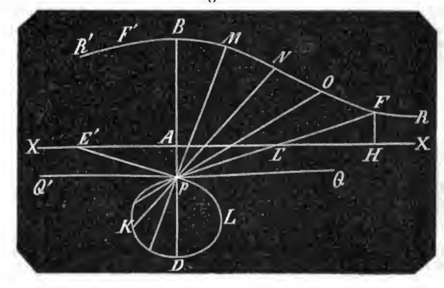
$FH = -c$ und $Ap = +c$

(Ap ist $= +c$ gegeben)

wenn $Ep = EF = a$ ist.

Für $z = \sqrt{a^2-c^2}$ wird also für die untere K. $x = 0$ und $Ap = +c$ ist eine Doppelordinate weil sie 2 mal entsteht, nämlich wenn E rechts und wenn E links von A genommen wird.

Fig. 523.



Bei $z = \sqrt{a^2-c^2}$ für die obere K. wird $x = AH = 2z$ wie auch Gl. 7 besagt, nämlich

$$x = \frac{c+y}{c}\,z = \frac{2c}{c}\,z = 2z$$

Bei $z < AE$ entstehen für die obere K. der Reihenfolge nach wie M, N, O; für die untere K. durchkreuzen sich die Zeigerlinien in p, deren Endpunkte bilden eine Rundung pKD, von welcher pD der Durchmesser ist. Geht nun E von A links weiter, so wird von D ab rechts eine Krümmung DLp beschrieben, welche der Krümmung $DKp \cong$ ist. Ist E nach E' gerückt, so dafs $E'A = EA$, so fällt die C. wieder in p und von E rechts und von E' links entstehen unendliche Zweige pQ und pQ' so wie FR und $F'R'$ welche sich der XX' immer mehr nähern ohne sie jemals zu erreichen.

Die Konchoide, wenn $c > a$ ist, hat 4 Zweige: die beiden unteren wie die beiden oberen BFR und $BF'R'$; wenn $c < a$, 5 Zweige: BFR, $BF'R'$, KpQ, LpQ' und KDL.

14. Die Abscisse kann eine Curve in höchstens so vielen Punkten schneiden, als die höchste Potenz von x in der Gleichung Einheiten enthält, weil für ein bestimmtes y, hier $= 0$, x^n höchstens n Wurzeln haben kann. Sie kann aber die Curve in wenigeren Punkten schneiden, weil einige unmögliche Wurzeln von x^n bei $y = 0$ existiren könnten, oder auch in keinem Punkt, wenn n gerade ist und alle Wurzeln unmöglich sind. Ist n ungerade, so schneidet die Abscisse die C. in wenigstens einem Punkt.

Eine Ordinate kann die C. höchstens in so vielen Punkten schneiden, als die höchste Potenz von y, die in der Gl. vorkommt, Einheiten enthält, aber auch in weniger Punkten und in gar keinem Punkt aus denselben obigen Gründen.

Beisp 1. Gleichung 1 No. 2:

$$y \sin(\alpha - \beta) - x \sin \alpha + a \sin \alpha = 0$$

gibt für $y = 0$ einen reellen Werth für x, nämlich $x = a$. Daher schneidet die Abscisse die gerade Linie, aber nur in einem Pnnkt. y entwickelt gibt

$$y = \frac{(x - a) \sin \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$$

also für jedes x, auch für $x = 0$, einen reellen Werth für y entweder positiv oder negativ, und also schneidet jede Ordinate die gerade Linie in einem Pnnkt.

Beisp. 2. Gleichnng 2, No. 1 ist für $y = 0$

$$x^2 - 2x(a - b\cos\alpha) + a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2 - r^2 = 0$$

woraus

$$x = + a - b\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - b^2 \sin^2\alpha}$$

Beide Werthe von x sind unmöglich, weil $r < b \sin \alpha$

daher schneidet x den Kreis nicht. Liegt dagegen die Abscissenlinie durch den Kreis, so ist $r > b \sin \alpha$

so entstehen 2 reelle Werthe nnd AX schneidet den Kreis in 2 Pnnkten. Unter welchen Bedingungen y (bei unmöglichen Wurzeln) den Kreis nicht schneidet, nnd (bei möglichen Wurzeln) nur einmal und höchstens 2mal schneidet, ist No. 7 nnd 8 mit Bezng auf Gl. 4, 5, 6 No. 7 nachgewiesen worden.

Beisp. 3. Gl. 1, No. 12:

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$$

gibt für $y = 0$ nur den einen Werth $x = 0$, mithin wird die Cissoide von der Abscissenlinie nur in einem Punkte und zwar in dem Anfangspunkt A der Abscissen geschnitten. Dafs und wie weit y die Curve in 2 entgegengesetzten Pnnkten schneidet, zeigt No. 12 selbst.

15. Aus dem bisherigen Vortrag ist zu entnehmen, dafs Gleichungen vollständig nnd unvollständig sein können, um eine Linie von der Ordnnng des Grades der Gleichnng zu geben; es gehört aber dazu noch die wesentliche Bedingung, **dafs die auf Null reducirte Gleichung nicht in rationale Factoren sich auflösen lasse.**

Die Gleichnng

$$y^2 + (a + c)xy + acx^2 + (b + d)y + (ad + bc)x + bd = 0 \qquad (1)$$

gibt keine Linie der zweiten Ordnung, weil sie, wie schon aus den Coefficienten ersichtlich ist, aus zweien rationalen Factoren besteht, nämlich aus

$$(y + ax + b)(y + cx + d) = 0$$

Es ist also $y + ax + b = 0$

und $y + cx + d = 0$

Jede von beiden Gl. gibt eine gerade Linie, und somit gibt die obige quadratische Gl. 2 sich durchschneidende grade Linien; deren Durchschnittspunkt liegt unter der Abscisse x, die man erhält, wenn man setzt

$$ax + b = cx + d$$

also unter $x = \dfrac{d - b}{a - c}$ (2)

nnd hierbei ist $y = \dfrac{ad - bc}{a - c}$ (3)

Man untersucht die Gleichung auf rationale Factoren, wenn man nach einander y nnd $x = 0$ setzt nnd die beiden dadurch erhaltenen Gleichungen untersucht.

Für $y = 0$ entsteht aus Gl. 1

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = 0$$

Diese geordnet gibt

$$x^2 + \left(\frac{d}{c} + \frac{b}{a}\right)x + \frac{d}{c} \times \frac{b}{a} = 0$$

woraus man die Wurzeln $-\dfrac{d}{c}$ nnd $-\dfrac{b}{a}$ erkennt.

Für $x = 0$ entsteht aus Gl. 1.

$$y^2 + (b + d)y + bd = 0$$

woraus die Wurzeln $-b$ und $-d$ hervorgehen.

Beispiel. Die Gleichung

$$y^2 - xy - 6y^2 + 2y + 9x - 3 = 0 \qquad (4)$$

ergibt für $x = 0$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

woraus $y = +1$ nnd -3

Diese Fig. 524 in A, dem Anfangspunkt der Abscissen aufgetragen ergeben die Curvenpunkte B nnd C.

Für $y = 0$ entsteht

$$-bx^2 + 9x - 3 = 0$$

woraus $x = +1$ nnd $+\frac{1}{2}$.

Fig. 524.

Diese Längen in XX' von A ab nach AD und AE aufgetragen, ergeben die Curvenpunkte D und E.

Für $x = 1$ entsteht aus Gl. 4:

$$y^2 + y = 0$$

woraus $y = 0$ und $= -1$

Der Punkt D für $y = 0$ ist schon bezeichnet; für $y = 1$ entsteht der Curvenpunkt F.

Für $x = 2$ entsteht aus Gl. 4

$$y^2 - 9 = 0$$

also $\quad y = +3$ und -3

Nimmt man $AG = 2$, so erhält man die Punkte H und J, und wenn man die Punkte B, E, F, J und C, D, H zusammenzieht, die in K sich schneidenden geraden Linien BJ und CH, die für weitere Abscissen $\pm x$ verlängert werden.

Um den Durchschnittspunkt K aus Gl. 2 und 3 zu bestimmen, hat man erst die Werthe von a, b, c, d aufzufinden.

Vergleicht man Gl. 1 mit Gl. 4 so ist

$$a + c = +1 \qquad b + d = +2$$
$$ac = -6 \qquad bd = -3$$

Hieraus erhält man (s. algebr. Gleichung pag. 61, C.)

$$a = +2;\ b = -1;\ c = -3;\ d = +3$$

also für K:

$$x = \frac{d - b}{a - c} = {}^4/_5$$

$$y = \frac{ad - bc}{a - c} = {}^3/_5$$

Außer dieser practisch geometrischen Darstellung kann man auch die Gleichung auf gerade Linien prüfen, wenn man in die Gl. erst $x = 1$ und dann $x = n$ setzt. Liefert die Gl. statt einer krummen Linie 2 gerade Linien, so muss für $x = n$ auch das $n$fache y entstehen, wenn nämlich im Anfangspunkt der Abscissen die Curve anfängt, wenn also $y = 0$ für $x = 0$

$x = 1$ in Gleichung 1 gesetzt gibt

$$y^2 + (a + b + c + d)\, y + (a + b)(c + d) = 0$$

hieraus

$$y = -\frac{a + b + c + d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a + b + c + d}{2}\right)^2 - (a + b)(c + d)}$$

Die Wurzelgröße findet man $\pm \dfrac{(a + b) - (c + d)}{2}$

mithin y entweder $\quad -(a + b)$ oder $-(c + d)$ $\quad$ (5)

$x = n$ in Gl. 1 gesetzt gibt

$$y^2 + [n(a + c) + (b + d)]\, y + acn^2 + (ad + bc)n + bd = 0$$

woraus

$$y = -\frac{n(a + c) + (b + d)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n(a + c) + (b + d)}{2}\right)^2 - acn^2 - (ad + bc)n - bd}$$

Die Wurzelgröße findet man

$$\pm \frac{n(a - c) + (b - d)}{2}$$

mithin

y entweder $= -(na + b)$ oder $-(nc + d)$ (6)

Es ist oben gefunden worden, dafs für $x = 0$ die Wurzeln der Gleichung für $y =$ sind $-b$ und $-d$. Die Curve beginnt also erst dann in dem Anfangspunkt der Abscissen, wenn man die XX' nach der Minusseite um die Entfernung b oder d verlegt, und die Ordinaten für $x = 1$ sind nicht wie ad 5:

$$(a + b) \text{ und } -(c + d)$$

sondern

$-(a + b - a) = -a$ und $-(c + d - d) = -c$ und die Ordinaten für $x = n$ sollen sein $-na$ und $-nc$. Von der ursprünglichen Abscissenlinie XX' sind dann diese Ordinaten

$$-(na + b) \text{ und } -(nc + d)$$

wie sie ad 6 entwickelt worden sind.

Eine Gleichung vom 3ten Grade, die in 3 rationale Factoren

$$(y + ax + b)(y + cx + d)(y + ex + f) = 0$$

sich auflösen läfst, gibt ein System von 3 geraden Linien.

Sind die Factoren

$$(y + ax + b)(y^2 + x^2 - dx) = 0$$

so ist der erste Factor die Gleichung für eine gerade Linie, der zweite Factor die Gleichung für einen Kreis vom Durchmesser d und die aus beiden Factoren hervorgehende Gleichung vom 3ten Grade gibt statt einer Curve die gerade Linie und den Kreis. Eben so kann eine Gleichung vom 4ten Grade 4 gerade Linien, 2 Linien der 2ten Ordnung, eine grade Linie und eine der dritten Ordnung liefern.

16. Die Anzahl der geometrischen Bestimmungsstücke jeder besonderen C. zu wissen ist eben so wichtig wie bei den geradlinigen Figuren und man findet dieselbe aus folgender Betrachtung.

Wenn man die Bestimmungsgleichung einer C. mit einer bestimmten Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt die Gleichung und also auch die durch sie bestimmte C. dieselbe; z. B. die Gl. für die gerade Linie

$$ay + bx + c = 0$$

liefert dieselbe Linie in Beziehung auf ihre Lage zu einer gegebenen anderen wie die Gl.

$$y + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Schreibt man diese Gl. allgemein:

$$y + Ax + B = 0$$

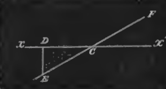
so ersieht man, dafs die gerade Linie bekannt ist, sobald die Zahlen A und B bekannt sind. Denn

für $x = 0$ ist $y = -B$

und für $y = 0$ ist $x = -\frac{B}{A}$



Fig. 525.



Soll man also die gerade Linie der vorstehenden Gl. gegen eine andere gegebene grade Linie XX' Fig. 525 bestimmen, und ist angleich der Punkt C in XX' gegeben, in welcher beide Linien sich schneiden sollen, so hat man von C aus die Länge $CD = \frac{B}{A}$ und die Ordinate $DE = -B$ auftragen und erhält die gesuchte Linie EF durch C.

Es sind also zu Bestimmung einer geraden Linie EF 2 Punkte (C und E) erforderlich, also so viele Punkte als Coefficienten zu bestimmen sind, wenn der von $y = 1$ gesetzt wird, oder so viele Punkte als die vollständige Gleichung Glieder hat weniger einem.

Die Gleichung für den Kreis ist, der Coefficient von $y = 1$ gesetzt:

$$y^2 + ayx + bx^2 + cy + dx + e = 0 \quad (1)$$

Gesetzt nun, es wäre ein Punkt des Kreises gegen eine gerade Linie XX' der Art gegeben, dals in einem Abstande α vom Punkt C die rechtwinklige Ordinate $= A$ ist,

so hat man für $x = \alpha$, $y = A$.

Diese Werthe in die allgemeine Gleichung gesetzt, erhält man

$$A^2 + \alpha A \times a + \alpha^2 \times b + A \cdot c + \alpha \cdot d + e = 0 \quad (2)$$

Subtrahirt man Gl. 1 von Gl. 2, so fällt e fort und man erhält eine Gleichung von nur 4 unbekannten Coefficienten a, b, c, d nämlich

$$(A^2 - y^2) + (\alpha A - yx)\,a + (\alpha^2 - x^2)\,b + (A - y)\,c + (\alpha - x)\,d = 0 \quad (3)$$

Kennt man nun einen 2ten Punkt des Kreises, so dafs für den Abstand β von C die Ordinate $= B$ ist und setzt diese Werthe in Gl. 3, so erhält man die Gl.:

$$(A^2 - B^2) + (\alpha A - \beta B)\,a + (\alpha^2 - \beta^2)\,b + (A - B)\,c + (\alpha - \beta)\,d = 0 \quad (4)$$

multiplicirt man Gl. 3 mit $(\alpha - \beta)$, Gl. 4 mit $(\alpha - x)$ und subtrahirt, so fällt α fort und man erhält eine Gl. von nur 3 unbekannten Coefficienten a, b, c u. s. w.

Um also alle 5 unbekannten Coefficienten der ursprünglichen Gl. finden und den Kreis construiren zu können, müssen 5 Punkte desselben gegeben sein. Hieraus ist die Regel ersichtlich, dafs zu einer C. so viele geometrische Bestimmungsstücke gehören, als die für sie erforderliche vollständige Gleichung Glieder hat weniger einem Nach No. 4 ist diese Anzahl der Glieder für eine Gleichung vom $n$ten Grade

$$= \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$$

daher die Anzahl der Bestimmungsstücke für eine Linie der $n$ten Ordnung oder eine L. der $(n - 1)$ten Classe

$$= \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 1 = \tfrac{1}{2}n(n + 3).$$

Erleichterungen für die Construction der C. erhält man, wenn man die Abscissenlinie durch 2 der gegebenen Punkte legt, wodurch die beiden angehörigen Ordinaten = Null werden.

II. Linien der ersten Ordnung.

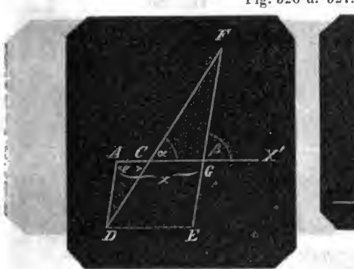
1. Diese bestehen nach I. No. 2 nur in der einzigen geraden Linie. Die Coordinatengleichung für dieselbe ist No. 2 mit Fig. 520 entwickelt. Es ist noch zu bemerken, dafs mit α und β auch die Winkel auf der Plusseite wie Fig. 526 u. 527 bezeichnet werden und dann hat man

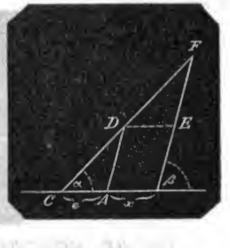
$$y = (x \mp e)\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \quad (1)$$

Für $e = 0$, d. h. wenn der Anfangspunkt der Abscissen in dem Durchschnittspunkt C beider Linien liegt

$$y = x \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \quad (2)$$

Fig. 526 u. 527.





Wenn $\beta = 90°$ genommen wird, so ist Für Gl. 1.

$$y = (x \mp e)\, tg\, \alpha \quad (3)$$

Für Gl. 2:

$$y = x\, tg\, \alpha \quad (4)$$

2. In der allgemeinen Gleichung für die grade Linie

$$y = a + bx \quad (5)$$

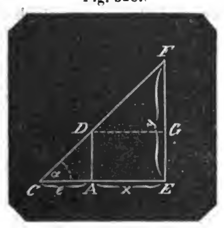
bedentet a die Ordinate (AD) im Anfangspunkt der Abscissen, und der Coefficient b von x ist der Quotient, wenn man dieselbe Ordinate AD durch den Abstand e zwischen dem Durchschnittspunkt beider Linien und dem Anfangspunkt dividirt.

Sind die Coordinaten rechtwinklig, so ist das bekannte Glied a in Gl. 5 die Normale AD im Anfangspunkt A der Abscissen bis zur verlangten geraden Linie $= e\, tg\, \alpha$, und der Coefficient b des zweiten Gliedes ist

$$\frac{FG}{DG} = tg\, \alpha$$

so dafs $bx = x \cdot tg\, \alpha = FG$ ist.

Fig. 528.

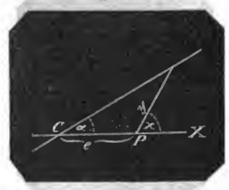


Ist $\alpha = 0$ so ist $y = a$, und die gerade Linie läuft mit der Abscissenlinie in dem Abstande a parallel. Ist $a = 0$, so fängt die Linie in dem Anfangspunkt A der Abscissen an und schneidet dieselbe dort unter dem $\angle\, \alpha$.

3. Die Polargleichung für die gerade Linie bestimmt sich wie folgt.

Es sei CX die Polaraxe, C deren Durchschnittspunkt mit der verlangten geraden Linie, α der Winkel zwischen beiden, der Abstand des Pols P vom Durchschnittspunkt $C = e$, $\angle\, x$ eine Polarabscisse, y

Fig. 529.



die zugehörige Polarordinate, so ist

$$e : y = \sin(x - \alpha) : \sin \alpha$$

woraus

$$y = e\, \frac{\sin \alpha}{\sin(x - \alpha)} \quad (1)$$

Beispiele.

1. Beisp. $y = x$

Im Vergleich mit Gl. 5 No. 2 ist hier $a = 0$, mithin beginnt die gerade Linie in dem festgesetzten Anfangspunkt der gegebenen Abscissenlinie;
ferner ist $b = tg\, \alpha = 1$, mithin $\alpha = 45°$

Ist also (Fig. 528) CE die gegebene Abscissenlinie mit dem Anfangspunkt C, so zeichne CF unter $\alpha = 45°$, und CF ist die verlangte Linie.

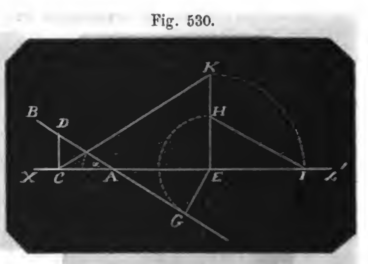
2. Beisp. $y = -\cos \alpha + x \sin \alpha \sqrt{3}$

Es sei A in XX' der Anfangspunkt der Abscissen; zeichne nach der Minusseite hin

$\angle BAX = \alpha$, nimm $AD = 1$, fälle das Loth DC so ist $AC = -\cos\alpha$, folglich C der Durchschnittspunkt der verlangten Linie mit XX'.

Nimm ein beliebiges $x = AE$, verlängere BA, fälle das Loth EG, so ist $EG = x \sin\alpha$ errichte das Loth EF, zeichne $EH = EG$, schneide EX' aus H mit $HJ = 2\,EH$, mache $EK = EJ$ so ist CK die verlangte Linie.

Fig. 530.



Denn es ist

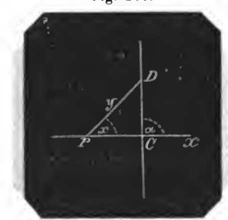
$$EK^2 = HJ^2 - HE^2 = (2HE)^2 - HE^2 = 3\,HE^2 = 3x^2 \sin^2\alpha$$

folglich $EK = x \sin\alpha \sqrt{3}$.

3. Beisp. $y = \dfrac{1}{\cos x}$

Ist (Fig. 531) CX die Polaraxe, C der gegebene Durchschnittspunkt zwischen dieser und der verlangten Linie, so ist die verlangte gerade Linie die Normale auf CX in C. Denn es ist

Fig. 531.



$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin(90^\circ - x)} = -\frac{\sin 90^\circ}{\sin(x - 90^\circ)}$$

Also in Formel 1: $\alpha = 90^\circ$.

Nimmt man nun auf der Minusseite $CP = 1$, so ist für ein beliebiges

$$x = \angle DPC,\ PD = y$$

und man hat auch

$$PD : PC = \sin\alpha : \sin PDC$$
$$y : 1 = 1 : \cos x$$

woraus $y = \dfrac{1}{\cos x}$

III. Linien der zweiten Ordnung oder Curven der ersten Klasse.

Von diesen Curven ist No. 1 die Coordinatengleichung des Kreises beispielsweise entwickelt und theilweise untersucht worden. Es sollen nun hier aus der der ganzen Klasse zugehörigen allgemeinen Gleichung

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dx + ex + f = 0 \quad (1)$$

die verschiedenen Arten der hierher gehörigen Curven und deren besondere Eigenschaften ermittelt werden.

1. Da y und x in der 2ten Potenz vorkommen, so hat sowohl y wie x zwei Wurzeln; d. h. es existiren für jede Abscisse x zwei Ordinaten und für jede Ordinate y zwei Abscissen x. Nur bei Unvollständigkeit der Gl. ist dies nicht: Wenn $a = 0$, so existirt für jedes x nur ein y und wenn $c = 0$, so existirt für jedes y nur ein x.

2. Für $b = 0$ und $d = 0$, also bei der Gl.:

$$ay^2 + cx^2 + ex + f = 0 \quad (2)$$

existiren für jedes x zwei gleich grofse aber entgegengesetzt liegende Ordinaten

$$y = \pm\sqrt{-\frac{cx^2 + ex + f}{a}}$$

d. h. die Abscissenlinie ist ein Durchmesser der C.

Für $b = 0$ und $e = 0$, also bei der Gl.

$$ay^2 + cx^2 + dy + f = 0 \quad (3)$$

existiren für jedes y zwei gleich grofse aber entgegengesetzt liegende Abscissen

$$x = \pm\sqrt{-\frac{ay^2 + dy + f}{c}}$$

d. h. jede beliebige Ordinate ist ein Durchmesser der C., wenn man dieselbe als Abscissenlinie und die der Abscissenlinie parallele x als Ordinaten betrachtet.

3 Setzt man $x = 0$ in die Formel für y, so erhält man

$$y = \pm\sqrt{-\frac{f}{a}}$$

Wenn also f und a gleiche Vorzeichen haben, also da a immer positiv ist, wenn f positiv ist, so existirt für $x = 0$ keine Ordinate, aber für ein negatives f existi-

ren 2 gleich grofse entgegengesetzte Ordinaten.

Setzt man in die Formel für x, $y=0$, so erhält man

$$x = \pm \sqrt{-\frac{f}{c}}$$

Für $y=0$ existirt also keine Abscisse wenn f und c einerlei Vorzeichen haben, für verschiedene Vorzeichen aber existiren 2 gleich grofse und entgegengesetzte Abscissen.

4. Ist $f=0$ also die Gleichung:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = 0 \quad (4)$$

so ist für $x=0$ auch ein Werth von $y=0$, und der Aufangspunkt der Coordinaten liegt in einem Punkt der Curve.

5. In Gl. 4: $y=0$ gesetzt gibt

$$cx^2 + ex = 0$$

Mithin entweder $x=0$ oder $x = -\frac{e}{c}$

und $-\frac{e}{c}$ ist die Entfernung zwischen beiden Durchschnittspunkten der Abscissenlinie und der Curve.

In Gl. 4: $x=0$ gesetzt gibt

$$ay^2 + dy = 0$$

woraus entweder $y=0$ oder $y = -\frac{d}{a}$

6. Setzt man in Gl. 1 $y=0$, so erhält man

$$cx^2 + ex + f = 0$$

woraus $x = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}$

Ist $e^2 > 4cf$ so entstehen 2 ungleiche Abscissen

$$x = \frac{-e + \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c} \text{ und } x^1 = \frac{-e - \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}$$

Ist $e^2 < 4cf$ so entstehen nur 2 Abscissen wenn cf subtractiv ist.

Für $e^2 = 4cf$ entsteht nur eine Abscisse $x = -\frac{e}{2c}$

Für $e=0$ und auch für $f=0$ oder bei der Gl.

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy = 0 \quad (5)$$

wird für $y=0$, x nur $=0$, aber für $x=0$ wird $y=0$ und $= -\frac{d}{a}$

7. Setzt man in Gl. 1. $x=0$ so entsteht:

$$ay^2 + dy + f = 0$$

woraus $y = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}$

Für $d^2 > 4af$ entstehen 2 ungleiche Ordinaten

$$y = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4af}}{2a} \text{ und } y^1 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}$$

Ist $d^2 < 4af$ dann existiren nur Ordinaten wenn af subtractiv ist, wenn also da a immer positiv ist, f negativ ist.

Ist $d^2 = 4af$ so existirt nur eine Ordinate $y = -\frac{d}{2a}$

8. Setzt man nun noch $d=0$ so hat man die Gl.:

$$ay^2 + byx + cx^2 = 0 \quad (6)$$

woraus $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,x \quad (7)$

Für diesen Fall ist mit $x=0$ auch $y=0$ und gegenseitig.

9. Die bisherigen Betrachtungen haben nur die Bedeutung und den Einflufs der einzelnen Coefficienten für sämmtliche in diese Klasse gehörenden Curven anzeigen sollen; es ist nur noch zu bemerken, dafs da x und y Linien sind, alle Glieder der allgemeinen Gleichung von einerlei also von 2 Dimensionen sein müssen; demnach sind a, b, c abstracte Zahlen; d, e Linien und f ist eine Fläche.

Der Character der Curven ist aber nur aufzufassen, wenn man den Zusammenhang der Abscissen von beliebiger Länge mit deren zugehörigen Ordinaten betrachtet, und hierzu eignet sich ganz besonders Formel 7. Dagegen geht diese letzte aus einer unvollkommenen Gleichung 6 hervor.

10. Aus der allgemeinen Gl. 1 erhält man

$$y = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ae)x + d^2 - 4af}}{2a} \quad (8)$$

Diese Gleichung gilt nun für jedes x, so grofs man es nehmen mag, und um den Einflufs der Glieder bei beliebig grofsem x besser zu übersehen dividirt man mit x und erhält

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left[-\left(b + \frac{d}{x}\right) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) + \frac{2(bd - 2ae)}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}}\right] \quad (9)$$

Je gröfser x genommen wird, desto kleiner werden die veränderlichen Glieder zur Rechten, weil diese sämmtlich x im Nenner haben, während die Zähler constant sind und für $x = \infty$ fallen dieselben als 0 fort. Es ist demnach für $x = \infty$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right] \quad (10)$$

d. i. Formel 7 für den Fall, dafs d, e, $f = 0$ sind.

Da die Seite rechts eine endliche Gröfse ist, so ist $\frac{y}{x} = \frac{y}{\infty}$ nicht $= 0$, welches daher kommt, dafs y mit $x = \infty$, ebenfalls unendlich ist und dafs zugleich zwischen $x = \infty$ und $y = \infty$ ein endliches Verhältnifs statt findet.

Sämmtliche Curven der ersten Klasse zerfallen also in 3 Hauptgattungen,

1. die, für welche die Wurzelgröfse $b^2 - 4ac$ positiv ist,
2. die für welche sie negativ ist und
3. die für welche sie Null ist.

Hat b einen wirklichen Werth, ist also b nicht $= 0$, so ist es für den ersten Fall gleichgültig, ob c additiv oder subtractiv ist; in den beiden letzten Fällen mufs c additiv sein. Ist für die Gleichung 2, No. 2, wo die Abscissenlinie ein Durchmesser ist, $b = 0$, so ist für den ersten Fall c subtractiv, für den zweiten Fall c additiv und für den dritten Fall $c = 0$.

11. Die C. des zweiten Falles: $b^2 < 4ac$ unterscheiden sich dadurch, dafs für $x = \infty$, y unmöglich wird, auffallend von den C. der beiden anderen Fälle; es kommt nun darauf an, den Unterschied der Curven des ersten und dritten Falles zu bestimmen.

Geht man auf Gl. 9 zurück, so hat man, wenn zugleich die beiden ungleichen Ordinaten mit y und y' bezeichnet werden:

1. Für $b > 4ac$

$$\frac{y - y^1}{x} = \frac{1}{a}\sqrt{(b^2 - 4ac) + \frac{2bd - 4ae}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}} \quad (11)$$

2. Für $b = 4ac$

$$\frac{y - y^1}{x} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2bd - 4ae}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}} \quad (12)$$

In dem ersten Fall, wo die beiden letzten Glieder der Wurzelgröfse für $x = \infty$ verschwinden, ist

$$y - y^1 : x = \sqrt{b^2 - 4ac} : a$$

In dem zweiten Fall ist

$$y - y^1 : x = \sqrt{\left(\frac{2bd - 4ae}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}\right)} : a$$

In dem ersten Fall, für $b > 4ac$, steht also die Differenz beider unendlichen Ordinaten mit der unendlichen Abscisse in einem endlichen Verhältnifs

$$\sqrt{b^2 - 4ac} : a$$

In dem zweiten Fall, für $b = 4ac$ steht die Differenz beider unendlichen Ordinaten mit der unendlichen Abscisse in einem unendlichen Verhältnifs. Denn es ist

$$\sqrt{\left(\frac{2bd - 4ae}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}\right)} : a = \sqrt{(2bd - 4ae)x + (d^2 - 4af)} : ax$$

Gegen das unendliche erste Glied der Wurzelgröfse verschwindet das endliche zweite Glied, und es ist das Verhältnifs

$$y - y^1 : x = \sqrt{(2bd - 4ae)\,x} : ax = \sqrt{(2bd - 4ae)} : a\sqrt{x} = 1 : \frac{a}{\sqrt{2bd - 4ae}}\sqrt{x} = 1 : \infty$$

12. Es kommt nun darauf an, die 3 Gattungen der Curven erster Klasse näher kennen zu lernen, und dies geschieht am geeignetsten, wenn man die allgemeine Gleichung für dieselben dergestalt einschränkt, dafs für jede beliebige Abscisse x eine mögliche Ordinate existirt. Demnach ist nach No. 4 in Gl. 1 zunächst $f = 0$ zu setzen, und man hat die Gl.:

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex = 0 \quad (13)$$

Sämmtliche 3 Gattungen der Curve haben nach No. 2 die gemeinschaftliche Eigenschaft, für $b = 0$ und $d = 0$ in der Abscissenlinie einen Durchmesser zu besitzen und man hat daher die eingeschränktere Gleichung

$$ay^2 + cx^2 + ex = 0 \quad (14)$$

so dafs für jedes x (mit Ausnahme von $x = 0$ und von $x = -\frac{e}{c}$, s. No. 5) zwei gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten entstehen, und zwar ist

$$y = \pm\sqrt{-\frac{cx^2 + ex}{a}}$$

Für $c = 0$ wird nun $y = \pm\sqrt{-\frac{e}{a}x}$ und da a immer positiv ist, so existiren

für die Gleichung 14 bei $c = 0$ für ein positives e nur Ordinaten für negative Abscissen. Damit diese Einschränkung nicht statt finde, soll das Glied ex in Gl. 14 subtractiv gesetzt werden und man hat die Gl.

$$ay^2 + cx^2 - ex = 0 \qquad (15)$$

Ist nun (1. Fall) $b^2 > 4ac$; also $0 > 4ac$ so ist c subtractiv, und die Gleichung dafür ist

$$\text{I.} \quad ay^2 - cx^2 - ex = 0 \qquad (16)$$

Ist (2. Fall) $b^2 < 4ac$; also $0 < 4ac$ so ist c additiv und die Gleichung dafür ist

$$\text{II.} \quad ay^2 + cx^2 - ex = 0 \qquad (17)$$

Ist (3. Fall) $b^2 = 4ac$; also $0 = 4ac$ so ist $c = 0$ und die Gleichung dafür ist

$$\text{III.} \quad ay^2 - ex = 0 \qquad (18)$$

Da nach I. No. 16 eine C. dieselbe bleibt, wenn deren Gleichung durch eine constante Zahl multiplicirt oder dividirt wird, so hat man durch a dividirt, y entwickelt, und wenn man $\frac{e}{a}$ mit A und $\frac{c}{a}$ mit B bezeichnet

I. Für $b^2 > 4ac$

$$y^2 = Ax + Bx^2 \qquad (19)$$

II. Für $b^2 < 4ac$

$$y^2 = Ax - Bx^2 \qquad (20)$$

III. Für $b^2 = 4ac$

$$y^2 = Ax \qquad (21)$$

wobei zu bemerken, (s. No. 9), dafs A eine Linie und B eine abstracte Zahl bedeutet.

13. Die beiden Curven I und III haben für eine unendliche Abscisse 2 unendliche Ordinaten, die C. II. hat für eine unendliche Abscisse unmögliche Ordinaten, und da eine C. nie aufhört, so mufs die C. II. Rückkehrungen machen (s. I. No. 10.) Nun ist für $y = 0$, x entweder $= 0$ oder $= \frac{A}{B}$; es existirt also nur für 2 bestimmte Werthe von x ein einziger Werth und zwar $= 0$ für y; ferner hat für alle übrigen Werthe von x, jedes y zwei und nicht mehr als zwei Werthe, mithin kann die C. nur eine Umkehrung machen und die C. II. mufs eine geschlossene C. sein, von welcher zugleich $\frac{A}{B}$ der Durchmesser ist.

Um diese geschlossene C. näher zu untersuchen, setzt man

$$x_1 = \frac{A}{B} - x$$

so dafs die Abscisse x_1 am zweiten Nullpunkt von y anfängt und der ersten Abscisse x entgegengeht. Dann erhält man

$$y_1^2 = A\left(\frac{A}{B} - x_1\right) - B\left(\frac{A}{B} - x_1\right)^2$$

woraus

$$y_1^2 = Ax_1 - Bx_1^2$$

Es ist mithin die geschlossene C. von beiden Endpunkten ab symmetrisch und y in der Mitte ein Maximum, nämlich für

$$x = x_1 = \frac{A}{2B}$$

oder für die Gleichung

$$y^2 = A \cdot \frac{A}{2B} - B \cdot \left(\frac{A}{2B}\right)^2$$

woraus

$$y = \pm \frac{A}{2\sqrt{B}} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{A^2}{B}}$$

Es ist demnach die C. II. eine Ellipse, $\frac{A}{B}$ und $\frac{A}{\sqrt{B}}$ sind bei rechtwinkligen Coordinaten deren Axen. Ist $B > 1$ so ist $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die grofse, $\frac{A}{B}$ die kleine Axe; ist $B < 1$ so ist $\frac{A}{B}$ die grofse und $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die kleine Axe; für $B = 1$ sind beide Axen gleich grofs und die C. ist ein Kreis und IV:

$$y^2 = Ax - x^2 \qquad (22)$$

14. Setzt man in die Formeln I bis IV (19 bis 22) $(-x)$ für x, so entsteht

$$\text{I.} \quad y_1^2 = -Ax_1 + Bx_1^2$$

woraus $y_1 = \pm\sqrt{-Ax_1 + Bx_1^2}$

$$\text{II.} \quad y_1^2 = -Ax_1 - Bx_1^2$$

woraus $y_1 = \pm\sqrt{-Ax_1 - Bx_1^2}$

$$\text{III.} \quad x_1^2 = -Ax$$

woraus $y_1 = \pm\sqrt{-Ax_1}$

$$\text{IV.} \quad y_1^2 = -Ax_1 - x_1^2$$

woraus $y_1 = \pm\sqrt{Ax_1 - x_1^2}$

Gleichung I. ist also die einzige der 4 Gleichungen, in welcher y einen reellen Werth erhält.

Für $x = -\frac{A}{B}$, also für den negativen Werth der Ellipsenaxe wird $y = 0$ und die Abscissenlinie schneidet die C. Sonst hat die Abscissenlinie mit der C. keinen Durchschnittspunkt weiter.

Setzt man in den beiden Gleichungen I, $y_1 = y$, so erhält man

$$Ax + Bx^2 = -Ax_1 + Bx_1^2$$

oder $(x_1^2 - x^2)B - (x_1 + x)A = 0$

oder $(x_1 - x)B - A = 0$

woraus $x_1 = x + \frac{A}{B}$

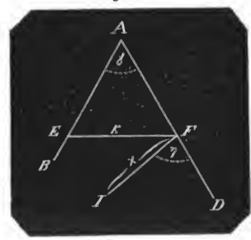
so dafs nach der entgegengesetzten Richtung der x von der constanten Länge $\frac{A}{B}$ ab dieselbe C. wie für die positiven x, aber nach entgegengesetzter Richtung der positiv gelegenen C. beginnt, eine

Eigenschaft, welche der einzigen Hyperbel angehört. Da ferner eine C. von der Gl. III. nur eine Parabel sein kann, die Gleichung II. aber entweder eine Ellipse oder einen Kreis liefert, so bestehen die Curven erster Klasse nur in den 4 Kegelschnittslinien.

15. Die Kegelschnittslinien sind in dem Art. Brennpunkte der Kegelschnitte pag. 420 mit Hülfe von Fig. 257 durch ihre Gleichungen entwickelt, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, die Abscissenlinie die Axe ist und der Anfangspunkt der Abscissen im Scheitelpunkt liegt.

Fig. 532 zeigt Fig. 257 in den hier nothwendigen Umrissen: ABD ist der Axendurchschnitt eines Kegels, γ (statt α) dessen Winkel an der Spitze, F der Scheitelpunkt sämmtlicher Kegelschnitte, so gelegen, dafs wenn $AE = AF$ genommen wird die Länge $EF = k$ ist.

Fig. 532.



η (statt β) bezeichnet allgemein den Winkel, den die Axe FJ jedes Kegelschnitts mit der Kegelseite AD bildet, in welcher der Scheitelpunkt F liegt. Setzt man nun in den Formeln sub. A, B, C Bd. I. pag. 420 u. f. für $\alpha = \gamma$ und für $\beta = \eta$, so erhält man

(A) Für die Parabel

$$y^2 = 2k \sin \frac{\gamma}{2} \cdot x \tag{23}$$

(B) Für die Ellipse

$$y^2 = k \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} x - \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin \eta \, x^2 \tag{24}$$

(C) Für die Hyperbel

$$y^2 = k \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} x + \frac{\sin(\gamma - \eta)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin \eta \cdot x^2 \tag{25}$$

Für die Parabel ist $\eta = \gamma$, für die Ellipse $\eta > \gamma$, für die Hyperbel $\eta < \gamma$.

Für den Kreis fällt FJ in FE, es ist

$$\eta = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung 24 für die Ellipse setzt, so erhält man die Gleichung für den Kreis

$$y^2 = kx - x^2 \tag{26}$$

Es ist demnach in den Gleichungen 19, 20 und 21

$$A = k \cdot \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} \tag{27}$$

$$B = \frac{\pm \sin(\eta - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \sin \eta \tag{28}$$

16. Sollen nun die Gleichungen 19 bis 22 in ganz allgemeine wie I. Gl. 1 verwandelt werden, so hat man Art. Coordinatengleichung mit Fig. 516 die Gleichungen

I. $y \sin \alpha + (b + u) \sin \beta = z \sin(\beta + \delta)$

II. $x - y \cos \alpha - z \cos(\beta + \delta) = a - (b + u) \cos \beta$

Es sollen also hiermit die mit x, y und $\alpha = 90^\circ$ gegebenen Gl. 19 bis 22 auf andere für u, z, δ gewählte Gleichungen reducirt werden.

Setzt man $\alpha = 90^\circ$ und ändert die Constanten a und b in p und g um sie mit den Coefficienten a und b nicht zu verwechseln, so hat man

I. $y + (g + u) \sin \beta = z \sin(\beta + \delta)$

II. $x - z \cos(\beta + \delta) = p - (g + u) \cos \beta$

Nun hat man

I. Für die Parabel

$$y^2 = Ax$$

Setzt man in diese Gl. die Werthe von y und x aus Gleichung I. und II., so erhält man:

$$[z \sin(\beta + \delta) - (g + u) \sin \beta]^2 = Ap + Az \cos(\beta + \delta) - A(g + u) \cos \beta$$

II. Für die Hyperbel.

$$y^2 = Ax + Bx^2$$

wie vorher verfahren gibt

$$[z \sin(\beta+\delta) - (g+u) \sin \beta]^2 = A[p + z \cos(\beta+\delta) - (g+u) \cos \beta] + B[p + z \cos(\beta+\delta) - (g+u) \cos \beta]^2$$

III. Für die Ellipse.

$$y^2 = Ax - Bx^2$$

$$[z \sin(\beta+\delta) - (g+u) \sin \beta]^2 = A[p + z \cos(\beta+\delta) - (g+u) \cos \beta] - B[p + z \cos(\beta+\delta) - (g+u) \cos \beta]^2$$

IV. Für den Kreis

$$y^2 = Ax - x^2$$

$$[s \sin(\beta+\delta) - (g+u)\sin\beta]^2 = A[p + s\cos(\beta+\delta) - (g+u)\cos\beta] - [p + s\cos(\beta+\delta) - (g+u)\cos\beta)^2$$

Diese 4 Gleichungen aufgelöst und geordnet findet man:

I. Die allgemeine Gleichung für die Parabel:

$$\sin^2(\beta+\delta)\, s^2 - 2\sin(\beta+\delta)\sin\beta \cdot su + \sin^2\beta\, u^2 - [\cdot 2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta)]s$$
$$+ (2g\sin^2\beta + A\cos\beta)\, u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0 \qquad (29)$$

II. Die allgemeine Gleichung für die Hyperbel.

$$[\sin^2(\beta+\delta) - B\cos^2(\beta+\delta)]s^2 - 2[\sin(\beta+\delta)\sin\beta + B\cos(\beta+\delta)\cos\beta]su$$
$$+ (\sin^2\beta - B\cos^2\beta)u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta) + 2B\cos(\beta+\delta)(p - g\cos\beta)]s$$
$$+ [2g\sin^2\beta + A\cos\beta + 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) - B(p - g\cos\beta)^2 = 0 \qquad (30)$$

III. Die allgemeine Gleichung für die Ellipse.

$$[\sin^2(\beta+\delta) + B\cos^2(\beta+\delta)]s^2 - 2[\sin(\beta+\delta)\sin\beta - B\cos(\beta+\delta)\cos\beta]\, su$$
$$+ (\sin^2\beta + B\cos^2\beta)u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta) - 2B\cos(\beta+\delta)(p - g\cos\beta)]s$$
$$+ [(2g\sin^2\beta + A\cos\beta - 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) + B(p - g\cos\beta)^2 = 0 \qquad (31)$$

IV. Die allgemeine Gleichung für den Kreis.

$$s^2 - 2\cos\delta \cdot su + u^2 - [2g\cos\delta + (A - 2p)\cos(\beta+\delta)]s + [2g + (A - 2p)\cos\beta]u$$
$$+ g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) + (p - g\cos\beta)^2 = 0 \qquad (32)$$

17. Setzt man $\beta = 0$, so erhält man die Axen der Kegelschnitte zu Abscissenlinien, die Ordinaten unter dem beliebigen $\angle\,\delta$ und Fig. 516 verwandelt sich in Fig. 533. Man erhält demnach die Gleichungen:

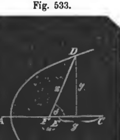


Fig. 533.

I. Für die Parabel.

$$\sin^2\delta \cdot s^2 - A\cos\delta \cdot s + Au - A(p - g) = 0 \qquad (33)$$

II. Für die Hyperbel.

$$(\sin^2\delta - B\cos^2\delta)s^2 - 2B\cos\delta \cdot su - Bu^2$$
$$- [A + 2B(p - g)]\cos\delta \cdot s + [A + 2B(p - g)]u$$
$$- A(p - g) - B(p - g)^2 = 0 \qquad (34)$$

III. Für die Ellipse.

$$(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)s^2 + 2B\cos\delta \cdot su + Bu^2$$
$$- (A - 2B(p - g)]\cos\delta \cdot s + [A - 2B(p - g)]u$$
$$- A(p - g) + B(p - g)^2 = 0 \qquad (35)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 - 2\cos\delta \cdot su + u^2 - [2g + (A - 2p)]\cos\delta \cdot s + [2g + A - 2p]u - A(p - g) + (p - g)^2 = 0 \quad (36)$$

18. Setzt man in die Gleichungen 33 bis 36 für s den Werth $(s + h)$, so erhält man die schiefwinkligen Coordinatengleichungen für eine Abscissenlinie, die mit den Axen der Kegelschnitte in der Entfernung $c \sin\delta \mp$ läuft.

I. Für die Parabel.

$$\sin^2\delta \cdot s^2 - (A\cos\delta - 2h\sin^2\delta)s + Au - A(p - g + h\cos\delta) + h^2\sin^2\delta = 0 \qquad (37)$$

II. Für die Hyperbel.

$$(\sin^2\delta - B\cos^2\delta)s^2 - 2B\cos\delta \cdot su - Bu^2 + [2(\sin^2\delta - B\cos^2\delta)h - A\cos\delta - 2B(p - g)\cos\delta]s$$
$$+ [A + 2B(p - g) - 2Bh\cos\delta]u - A(p - g) - B(p - g)^2 + (\sin^2\delta - B\cos^2\delta)h^2$$
$$- [A + 2B(p - g)]h\cos\delta = 0 \qquad (38)$$

III. Für die Ellipse.

$$[\sin^2\delta + B\cos^2\delta]s^2 + 2B\cos\delta \cdot su + Bu^2 - \big[[A - 2B(p - g)]\cos\delta - 2(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)h\big]s$$
$$+ [A - 2B(p - g) + 2Bh\cos\delta]u - A(p - g) + B(p - g)^2 - [A - 2B(p - g)]h\cos\delta$$
$$+ (\sin^2\delta + B\cos^2\delta)h^2 = 0 \qquad (39)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 - 2\cos\delta \cdot su + u^2 - [(A - 2[p - g])\cos\delta - 2h]s + [A - 2(p - g) - 2h\cos\delta]u$$
$$- A(p - g) + (p - g)^2 - [A - 2(p - g)]h\cos\delta + h^2 = 0 \qquad (40)$$

19. Setzt man in Gleichnng 29 bis 32 statt δ den Werth $(90^\circ - \beta)$ so erhält man Coordinatengleichnngen für eine beliebige Abscissenlinie nnd Ordinaten die normal den Axen der Kegelschnitte sind.

I. Für die Parahel.

$$s^2 - 2\sin\beta\cdot su + \sin^2\beta\cdot u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + (2g\sin^2\beta + A\cos\beta)u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0 \quad (41)$$

II. Für die Hyperhel.

$$s^2 - 2\sin\beta\cdot su + (\sin^2\beta - B\cos^2\beta)u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + [2g\sin^2\beta + A\cos\beta + 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) - B(p - g\cos\beta)^2 = 0 \quad (42)$$

III. Für die Ellipse.

$$s^2 - 2\sin\beta\cdot su + (\sin^2\beta + B\cos^2\beta)u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + [2g\sin^2\beta + A\cos\beta - 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) + B(p - g\cos\beta)^2 = 0 \quad (43)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 - 2\sin\beta\cdot su + u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + [2g + (A - 2p)\cos\beta]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) + (p - g\cos\beta)^2 = 0 \quad (44)$$

20. Setzt man in die Gleichnngen 37 bis 40 den Werth 90° für δ, so erhält man die rechtwinkligen Coordinatengleichnngen für die Kegelschnitte, wenn die Abscissenlinie mit den Axen in der Entfernung $h \pm$ läuft.

I. Für die Parabel.

$$s^2 + 2hs + Au - A(p - g) + h^2 = 0 \quad (45)$$

II. Für die Hyperbel.

$$s^2 - Bu^2 + 2hs + [A + 2B(p - g)]u - A(p - g) - B(p - g)^2 + h^2 = 0 \quad (46)$$

III. Für die Ellipse.

$$s^2 + Bu^2 + 2hs + [A - 2B(p - g)]u - A(p - g) + B^2(p - g)^2 + h^2 = 0 \quad (47)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 + u^2 + 2hs + [A - 2(p - g)]u - A(p - g) + (p - g)^2 + h^2 = 0 \quad (48)$$

21. Setzt man in die Gleichnngen 33 bis 36 den Werth 90° für δ, oder in die Gleichungen 41 bis 44 für β den Werth $= 0$, oder in die Gleiehnngen 45 his 48 für $h = 0$, so erhält man die rechtwinkligen Coordinatengleichnngen für die Kegelschnitte, wenn deren Axen die Abscissenlinien sind und bei dem Anfangspunkt A in der Entfernung p vom Scheitel.

I. Für die Parabel.

$$s^2 + Au - A(p - g) = 0 \quad (49)$$

II. Für die Hyperhel.

$$s^2 - Bu^2 + [A + 2B(p - g)]u - A(p - g) - B(p - g)^2 = 0 \quad (50)$$

III. Für die Ellipse.

$$s^2 + Bu^2 + [A - 2B(p - g)]u - A(p - g) + B(p - g)^2 = 0 \quad (51)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 + u^2 + [A - 2(p - g)]u - A(p - g) + (p - g)^2 = 0 \quad (52)$$

22. Setzt man in diese letzten 4 Gleichungen für u den Werth $(p - g - u)$ so erhält man (vergl. Gl. 19 bis 22):

I. Für die Parabel.

$$s^2 - Au = 0 \quad (53)$$

II. Für die Hyperbel.

$$s^2 - Au - Bu^2 = 0 \quad (54)$$

III. Für die Ellipse.

$$s^2 - Au + Bu^2 = 0 \quad (55)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 - Au + u^2 = 0 \quad (56)$$

23. Aus den Gleichnngen 29 bis 56 ist nun die Bedentung der Coefficienten in der allgemeinen Coordinatengleichung für die Kegelschnitte

$$as^2 + bsu + cu^2 + ds + eu + f = 0$$

zn ermitteln.

I. Der Coefficient a von s^2 ist allein abhängig von dem Winkel zwischen deu Ordinaten und der Axe des Kegelschnitts, indem $(\beta + \delta)$ als Aufsenwinkel von β nnd δ jenen Winkel jederzeit mifst (s. Gl. 29 bis 40). Ist dieser Winkel $= 90^\circ$ so ist $a = 1$ (s. Gl. 41 bis 52). Bei dem Kreise ist a jederzeit $= 1$, weil jeder

Durchmesser des Kreises zugleich Axe des Kreises ist, also jede beliebig gelegene Ordinate auf irgend einer der Axen des Kreises normal steht. Dividirt man daher eine mit as^2 gegebene Gleichung durch a, so verwandelt man sie in eine Gleichung für dieselbe C., in welcher die Ordinaten rechtwinklig auf der Axe stehen. Aus diesem Grunde sind die Gleichungen 29 bis 40 nicht mehr in Betracht zu ziehen, sondern nur noch die 4 Gattungen No. 41 bis 44, 45 bis 48, 49 bis 52 und 53 bis 56; und es sollen von jetzt ab die Coefficienten b bis f für $a = 1$ gelten.

II. Der Coefficient b von su ist für alle 4 Kegelschnitte = dem doppelten negativen Sinus des zwischen der Abscissenlinie und der Axe des Kegelschnitts befindlichen Winkels β (s. Gl. 41 bis 44).

Liegt die Abscissenlinie $\ddagger$ der Axe oder ist sie die Axe selbst, ist also $\beta = 0$, so fehlt das Glied su (s. Gl. 45 bis 56 und vergl. No. 2); nach No. I. fehlt es also jederzeit beim Kreise.

III. Der Coefficient c von u^2 ist in allen Kegelschnitten von dem gedachten $\angle \beta$ abhängig, aber er ist in jedem Kegelschnitt verschieden:

A. Bei der Parabel ist c allgemein $= + \sin^2\beta$; ist die Abscissenlinie $\ddagger$ der Axe oder die Axe selbst, so ist $\beta = 0$ und das Glied u^2 fehlt.

B. Bei der Hyperbel ist

$$c = \sin^2\beta - B \cos^2\beta$$

C. Bei der Ellipse ist

$$c = \sin^2\beta + B \cos^2\beta$$

Ist nun die Abscissenlinie $\ddagger$ der Axe oder die Axe selbst, so ist

bei der Hyperbel $c = - B$

bei der Ellipse $c = + B$

beim Kreise ist deshalb c immer = 1.

Die Bedeutung von B s. No. 15 u. 24.

IV. Der Coefficient d von s ist = der doppelten Entfernung des Anfangspunkts A der Abscissen von der Axe; positiv, wenn die Abscissenlinie zwischen der Axe und der Curve liegt, wie Gl. 45 bis 48, wo die Ordinaten s um h kleiner sind; negativ wenn die Axe zwischen der C. und der Abscissenlinie liegt wie Gl. 37 bis 40. Setzt man in die Gl. 33 bis 36 den Werth $(s - h)$ für s so werden die Ordinaten s in den Gl. 37 bis 40 und 45 bis 48 um h größer, die Abscissenlinie rückt also um eben so viel von der C. weiter ab und wie jetzt jedes Glied mit den Factoren hs additiv ist, so wird es dann subtractiv. Liegt die Abscissenlinie in der Axe, so fällt das Glied s fort, wie in Gl. 49 bis 56 (vergl. No. 2).

V. Der Coefficient e von u hängt von 3 Elementen ab. Von dem $\angle \beta$ zwischen der Axe und der Abscissenlinie, von der Entfernung des Anfangspunkts A der Abscissen oder dessen Projection auf die Axe von dem Schaitelpunkt des Kegelschnitts und von den Paramatern A und B der Kegelschnitte.

Ist die Axe zugleich Abscissenlinie und der Scheitelpunkt Anfangspunkt der Abscissen so ist bei allen Kegelschnitten $e = - A$ (s. Gl. 53 bis 56).

Ist die Axe Abscissenlinie oder diese $\ddagger$ der Axe und die Entfernung zwischen A und dem Scheitel $= p - g = s$ so ist

bei der Parabel $e = + A$

" " Hyperbel $e = + A + 2Bs$

" " Ellipse $e = + A - 2Bs$

beim Kreise $e = + A - 2s$

Die Bedeutung von A und B s. No. 15 und 24.

In Gleichung 41 bis 44 ist

$$p - g \cos \beta = s$$

und man hat also, wenn die Abscissenlinie mit der Axe den $\angle \beta$ bildet:

bei der Parabel $e = + 2g \sin^2\beta + A \cos\beta = N$

" " Hyperbel $e = N + 2B \cos\beta \cdot s$

" " Ellipse $e = N - 2B \cos\beta \cdot s$

beim Kreise $e = N - 2 \cos\beta \cdot s$

Anmerk. Für den Kreis erhält man die Formel, wenn man in den Factor von u in Gl. 44: für $2g$ den Werth setzt

$$2g \sin^2\beta + 2g \cos^2\beta.$$

VI. Der Coefficient f, das unbenannte Glied wird nach No. 4 = 0 wenn ein Punkt der C. zugleich Anfangspunkt der Abscissen ist (s. Gl. 53 bis 56). Liegt der Anfangspunkt der Abscissen in der Entfernung $(p - g) = s$ vom Scheitel in der Axe (s. Gl. 49 bis 52) so ist

bei der Parabel $f = - As$

" " Hyperbel $f = - As - Bs^2$

" " Ellipse $f = - As + Bs^2$

beim Kreise $f = - As + s^2$

Liegt die Abscissenlinie in der Entfernung h von der Axe, so ist

bei der Parabel $f = - As \pm h^2$

" " Hyperbel $f = - As - Bs^2 \pm h^2$

" " Ellipse $f = - As + Bs^2 \pm h^2$

beim Kreise $f = - As + s^2 \pm h^2$

Das obere Vorzeichen von h^2 gilt, wenn die Abscissenlinie der C. näher, das untere wenn sie der C. entfernter liegt (s. Gl. 45 bis 48).

Schneidet die Abscissenlinie die Axe in Entfernung p vom Scheitel, und liegt der Anfangspunkt A der Abscissen von

dem Durchschnittspunkt in der Entfernung g, der Winkel zwischen Abscissenlinie und Axe $= \beta$,

so ist $g \sin \beta = h_1$

die Entfernung des Punkts A von der Axe und $(p - g \cos \beta) = s_1$

die Entfernung der Projection des Punkts A von dem Scheitelpunkt. Man hat sodann (s. Gl. 41 bis 44)

bei der Parabel $f = h_1^2 - As_1$

„ „ Hyperbel $f = h_1^2 - As_1 - Bs_1^2$

„ „ Ellipse $f = h_1^2 - As_1 + Bs_1^2$

„ beim Kreise $f = h_1^2 - As_1 + s_1^2$

24. Bestimmung der Parameter A und B (No. 15).

Es ist
$$A = \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} k \qquad (1)$$

$$B = \frac{\pm \sin(\eta - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \sin \eta \qquad (2)$$

Der Winkel γ Fig. 534 hat die Grenzen 0 und 180°; bei 0° fällt der Kegel mit seiner Axe in eine gerade Linie zusammen, $\angle \eta$ wird ebenfalls $= 0$ und A und B werden $= 0$; bei 180° geht der Kegel in eine Kreisebene über; A und B werden ∞.

Der Winkel η hat seine Grenzen 0 und 180°. Für beide Werthe fallen die Kegelschnitte mit den Seitentheilen FD und FA zu geraden Linien zusammen; A und B werden $= 0$.

Für $\eta = 90° + \frac{\gamma}{2}$ fällt FJ in FE, der Kegelschnitt wird ein Kreis.

Es ist
$$A = \frac{\sin\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos \frac{\gamma}{2}} k = k$$

$$B = \frac{+\sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) = 1$$

Für $\eta > \gamma$ ist der Kegelschnitt eine Ellipse, also in allen Lagen, wenn FJ um F von $FM \perp AB$ ab, links herum bis in die Richtung FA sich bewegt, mit Ausnahme von $\eta = 90° + \frac{\alpha}{2}$ wo die Ellipse in einen Kreis übergeht. In diesen Fällen gilt für B das additive Vorzeichen.

A wird ein Maximum für $\eta = 90°$, nämlich $A = \frac{k}{\cos \frac{\gamma}{2}}$.

Hierbei wird

$$B = \pm \frac{\sin(90° - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \sin 90° = \pm \frac{\cos \gamma}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \pm \left(1 - tg^2 \frac{\gamma}{2}\right)$$

Es wird also B positiv und der Kegelschnitt eine Ellipse für $\gamma < 90°$, und B negativ und der Kegelschnitt eine Hyperbel für $\gamma > 90°$.

Für $\gamma = 90°$ wird $B = 0$ und der Kegelschnitt eine Parabel.

Zwischen

$$\eta = \left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) \text{ und } \eta = \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$$

wird $A > k$, für alle anderen Werthe von η wird $A < k$.

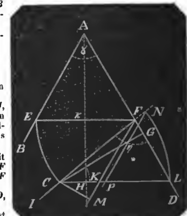
Für $\eta < \gamma$, also in allen Lagen von FJ, von $FM \perp AB$ ab, um F rechts bis in die Richtung FD gedreht, ist der Kegelschnitt eine Hyperbel und für B gilt das subtractive Vorzeichen.

25. Fig. 534 ist in den Umrissen mit Fig. 533 gleich. Beschreibt man aus F mit $FE = k$ den Bogen EC zieht $CL \parallel EF$ so ist CL der Parameter A.

Denn fällt man das Loth CG auf AD, so ist $CG = CF \sin \eta = k \sin \eta$

Halbirt man nun $\angle \gamma$ durch AH so ist AH normal mit EF und CL,

Fig. 534.



also $\angle ALC = 90° - \frac{\gamma}{2}$

und da $\angle CGL = 90°$

so ist $\angle GCL = \frac{\gamma}{2}$

Nun ist

$$CG = CL \cdot \cos \angle GCL = CL \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

folglich $CL \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = k \sin \eta$

und $$CL = \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} k = A \qquad (1)$$

Bei einerlei γ wächst A von $\eta = 0$ bis $\eta = 90°$ wo A ein Maximum $= \frac{k}{\cos \frac{\gamma}{2}}$ wird. Je gröfser γ desto gröfser wird A, bei $\gamma = 180°$ wird $A = \infty$.

Zieht man $FM \pm AB$, so ist $\angle JFM = \eta - \gamma$ und fällt man die Normale CM auf FM, so ist $CM = CF \sin(\eta - \gamma) = k \sin(\eta - \gamma)$

Es ist zugleich $\angle LCM = \angle LCG = \frac{\gamma}{2}$

daher $CK \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = CM$

daher $CK \cos \frac{\gamma}{2} = k \sin(\eta - \gamma)$

und $$\frac{CK}{k} = \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

Nun ist

$$B = \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{A}{K} \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos \frac{\gamma}{2}} \qquad (2)$$

daher $$B = \frac{CK}{k} \cdot \frac{A}{k} = \frac{A \cdot CK}{k^2}$$

oder $$B = \frac{CK \cdot CL}{EF^2}$$

Verlängert man CF, nimmt $CN = CL = A$, zieht $NP \mp FM$ so ist

$$CF : CN = CK : CP$$

woraus $$CP = \frac{CN \cdot CK}{CF} = \frac{CL \cdot CK}{EF}$$

mithin $$B = \frac{CP}{EF} = \frac{CP}{k} \qquad (3)$$

26. Sind die Parameter, A als Linie und B als abstracte Zahl gegeben, oder sind beide aus einer gegebenen Gleichung ermittelt, so existirt der aus beiden Parametern hervorgehende Kegelschnitt in jedem beliebigen Kegel, d. h. in einem Kegel mit beliebigem $\angle \gamma$ an der Spitze des Axenquerschnitts.

Denn aus Gl. 1. No. 24 hat man

$$A \cos \frac{\gamma}{2} = k \sin \eta$$

und je nachdem B positiv oder negativ gegeben ist hat man in Gl 2: $\eta >$ oder $< \gamma$

Nun ist aber aus einem gegebenen γ und einem gegebenen B der $\angle \eta$ zu finden und diesen in die Formel für A eingesetzt ergiebt bei gegebenem A den Werth von k.

Noch ist zu bemerken, dafs man sich durch die Vorzeichen nicht irre machen lasse: B ist immer als absoluter Werth zu nehmen; bei der Ellipse ist

$$B = + \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \sin \eta$$

bei der Hyperbel ist

$$B = + \frac{\sin(\gamma - \eta)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin \eta$$

27. Beispiele.

I. Die Gleichung $y^2 \pm \gamma xy + 16x^2 + \ldots$ gibt eine Parabel, weil

$$b^2 (= 8^2) = 4ac\ (4 \cdot 1 \cdot 16) = 64 \text{ ist}$$

II. Die Gleichung $y^2 \pm 8xy - 16x^2 + \ldots$ gibt eine Hyperbel, weil

$$b^2 (= 64) > 4ac\ (= -64) \text{ ist.}$$

III. Die Gleichung $y^2 \pm 8xy + 18x^2 + \ldots$ gibt eine Ellipse, weil

$$b^2 (= 64) < 4ac\ (= 72) \text{ ist.}$$

IV. Die Gleichung $y^2 \pm 8xy + x^2 + \ldots$ gibt einen Kreis, weil

$b^2 < 4ac$ und zugleich $a = c$ ist.

Beispiel V. Gegeben ist eine Gleichung, die mit a, dem Coefficient von z^2 dividirt folgende ist

$$z^2 + 10zu + 3u^2 + 25z + 7u + 20 = 0 \qquad (1)$$

Hier ist $a = 1$; $c = 3$; also $4ac = 12$; $b = 10$, also $b^2 = 100$; folglich $b^2 > 4ac$ und die der Gleichung entsprechende C. ist eine Hyperbel.

Es soll aber nach No. 23, II. der Coefficient von $zu = -2 \sin \beta$ sein, also subtractiv und < 2; es scheint demnach, dafs die gegebene Gleichung eine Hyperbel, überhaupt einen Kegelschnitt nicht gibt. Um dies zu untersuchen, dividire die Gleichung durch eine Quadratzahl von der Beschaffenheit, dafs der Coefficient < 2 werde, am bequemsten also mit der Zahl 100. Dann erhält man

$$\left(\frac{z}{10}\right)^2 + \frac{z}{10} u + 0{,}03 u^2 + 2{,}5 \frac{z}{10} + 0{,}07 \cdot u + 0{,}2 = 0 \qquad (2)$$

Man erhält aus der ersten Gleichung

$$s = -\frac{10u + 25}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{88\,u^2 + 472\,u + 545} \qquad (3)$$

Aus der zweiten

$$\frac{s}{10} = -\frac{u + 2{,}5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{0{,}88\,u^2 + 4{,}72\,u + 5{,}45} \qquad (4)$$

Man ersieht, dafs man aus demselben u dasselbe s erhält, welche der beiden Gleichungen man auch nehmen will und man kann daher für die erste Gleichung schreiben

$$s^2 + su + 0{,}03u^2 + 2{,}5\,s + 0{,}07\,u + 0{,}2 = 0 \quad (5)$$

Da nun nach No. 23, II. der Coefficient b von su (hier = 1) subtractiv sein soll, so mufs u negativ sein und man hat statt Gl. 1:

$$s^2 - 10su + 3u^2 + 25s - 7u + 20 = 0 \quad (6)$$

statt Gleichung 3

$$s = +\frac{10u - 25}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{88u^2 - 472u + 545} \quad (7)$$

und statt Gl. 5

$$s^2 - su + 0{,}03\,u^2 + 2{,}5\,s - 0{,}07u + 0{,}2 = 0 \quad (8)$$

A. Setzt man in Gl. 7 für u entweder $+\,3{,}681301$ oder $+\,1{,}682335$ so erhält man die Wurzelgröfse = 0 und für $u = 1{,}682335$ wird $s = -\,4{,}0883$ für $u = 3{,}681301$ wird $s' = +\,5{,}9065$

Wenn man also die Werthe von u in Gleichung 8 setzt, für welche nun der Kegelschnitt gefunden wird, so hat man die Ordinaten der Scheitel

für $u = 1{,}682335$; $s = -\,0{,}40883$

für $u = 3{,}681301$; $s' = +\,0{,}59065$

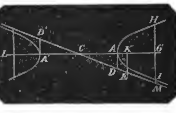
Hieraus ist klar, dafs beide zusammengehörigen Hyperbeln mit den Coordinaten die Lage von Fig. 535 haben müssen (vergl. Fig. 516). Wenn nämlich E der Anfangspunkt der Abscissen ist, so ist bei

$u = ED = +\,1{,}682335$; $s = AD = -\,0{,}40883$

bei

$u = ED' = +\,3{,}681301$; $s = A'D' = +\,0{,}59065$

Fig. 535.



Es stimmt auch diese Zeichnung mit der Eigenschaft der Gleichungen 1 bis 8, dafs kein Werth von u den Werth $s = 0$ gibt.

Die graphische Construction der obiger Gleichung (5 oder 8) entsprechenden Hyperbel wird durch Verwandlung deren Coefficienten in die No. 23 angegebenen Werthe ermittelt.

B. Der Coefficient b von su, hier = 1 ist nach No. 23, II. $= 2\sin\beta$, folglich ist $\sin\beta = \frac{1}{2}$ und $\beta = 30°$.

D. h. der zwischen der Abscissenlinie ED' und der Axe LK begriffene

$$\angle ACD \text{ ist } = 30° \qquad (9)$$

wobei noch zu bemerken, dafs das 2te Glied

in Gl. 5 ist: $+\sin 30° \cdot s(+u)$

in Gl. 8 ist: $-\sin 30° \cdot s(-u)$

C. Nach No. 23, III. ist

c (hier $= 0{,}03) = \sin^2\beta - B\cos^2 u = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}B$

woraus

$$B = +\frac{\sin(\gamma - \eta)}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}\sin\eta = +\tfrac{1}{3}\cdot 0{,}88 = 0{,}2933\ldots. \qquad (10)$$

D. Nach No. 23, IV. ist

d (hier $= 2{,}5) = 2g\sin\beta = 2\cdot\frac{1}{2}g = g$

Da nun d hier additiv ist, so müfste nach No. 23, IV. die Abscissenlinie zwischen Axe und Curve durchgehen, da aber in Gl. 1 bis 8 kein Werth von u den Werth $s = 0$ ergibt, so ist solche Lage nicht möglich und folglich mufs g negativ sein. Man hat demnach

$$CE = g = -\,2{,}5 \qquad (11)$$

Dieser Werth von g stimmt auch mit der Zeichnung und den ad A berechneten Werthen von u und s für die Scheitel A, A'. Denn

$CD = CE - DE = 2{,}5 - 1{,}682335 = 0{,}817665$

hieraus

$AD = CD\sin 30° = \frac{1}{2}CD = 0{,}40883$

ferner

$CD' = ED' - CE = 3{,}681301 - 2{,}5 = 1{,}181301$

hieraus

$A'D' = CD'\sin 30° = \frac{1}{2}CD' = 0{,}59065$

E. Nach No. 23, V. ist

$$e \text{ (hier } = 0{,}07) = 2g\sin^2\beta + A\cos\beta + 2B\cos\beta\cdot s \qquad (12)$$

0,07 ist hier subtractiv für $(-u)$.

In dieser Gleichung 12 befinden sich 2 Unbekannte A und s; es mufs deshalb der folgende Coefficient f hinzugezogen werden. Nun ist

F. Nach No. 23, VI.

$$f\,(\text{hier} = 0{,}2) = g^2 \sin^2\beta - As - Bs^2 \quad (13)$$

Setzt man nun in Gl. 12 die Werthe für β und g und entwickelt A so erhält man:

$$A = 1{,}3625466 - 2Bs \quad (14)$$

Diesen Werth von A in Gl. 13 gesetzt, gibt

$$0{,}2 = 1{,}5625 - (1{,}3625466 - 2Bs)\,s - Bs^2$$

oder geordnet

$$s^2 - 4{,}64504\,s + 4{,}644886 = 0$$

woraus $s = 2{,}32252 \pm 0{,}86557$

und $s = +\,3{,}18809$ und $+\,1{,}45695 \quad (15)$

Diese Längen sind die Entfernungen der Projection K des Anfangspunkts E der Abscissen von den Scheiteln A und A' also die Längen KA' und KA. Dieselben stimmen auch genau mit den ad A ermittelten Längen von u für die Ordinaten der Scheitel A und A'; denn es ist

$$DE \cos\beta = DE \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1{,}682335 \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1{,}45695$$

und

$$D'E \cos\beta = 3{,}681301 \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 3{,}18809.$$

G. Nun ist nach No. 23, V. und Gleichung 42

$$s = p - g \cos\beta$$

aber $+\,AK = -\,AC + CK$

und da g negativ,

also $+\,CK = -\,g \cos\beta$

ist, so ist p ebenfalls negativ und

$$p = (-\,AC) = g \cos\beta + s = -\,2{,}5 \sqrt{\tfrac{3}{4}} + 1{,}45695 = -\,0{,}70809 \quad (16)$$

Eben so ist $s' = p' - g \cos\beta$

aber $+\,A'K = +\,A'C + CK = +\,A'C - g \cos\beta$

und $p' = (+\,A'C) = g \cos\beta + s' = -\,2{,}5 \sqrt{\tfrac{3}{4}} + 3{,}18809 = +\,1{,}02303 \quad (17)$

Auch diese Längen von p und p' stimmen mit den ad A berechneten Ordinaten AD und $A'D'$ für den Scheitel; denn man erhält

$$-\,0{,}70809 \times tg\,30^\circ = -\,0{,}40883$$

und $+\,1{,}02303 \times tg\,30^\circ = +\,0{,}59065$

H. Nun ist noch der Parameter A zu bestimmen, und dies geschieht durch Formel 14 für A.

Man erhält bei $s = 1{,}45695$

$$A = 0{,}50802$$

Bei $s = 3{,}18809$ wird A negativ, welches unmöglich ist, und es existirt natürlicher Weise nur ein Werth für A.

Für die Verzeichnung der Hyperbeln hat man nun aus G:

$$p = -\,0{,}70809$$
$$p' = +\,1{,}02303$$

Nimmt man in der geraden Linie LK den willkührlichen Punkt C, trägt nach einer Seite die Länge $CA = p$, nach der anderen die Länge $CA' = p'$ so erhält man die beiden Scheitel der beiden durch Gleichung 1 gegebenen Hyperbeln und da

$$A = 0{,}507802$$

und $B = \frac{0{,}88}{3} = 0{,}2933\ldots.$

so hat man für die Hyperbeln die Gleichung

$$y^2 = 0{,}507802 \cdot x + 0{,}293\ldots.\, x^2$$

J. Zum Beweise, dafs die Hyperbel mit der Gleichung 1 übereinstimmt setze man für x eine bestimmte Länge z. B. $AG = 10$ so ist

$$y^2 = 5{,}07802 + 29{,}333\ldots. = 34{,}41135$$

woraus $y = 5{,}86612.$

Die Projection K des Anfangspunkts E auf der Axe LK liegt vom Scheitel A entfernt um die Länge $AK = s = 1{,}45695$

$AG = 10{,}00000$

mithin ist die Projection der zu AG gehörenden Abscisse EM von K entfernt $= 8{,}54305$

und die Abscisse $u = EM$ ist

$$= \frac{8{,}54305}{\cos 30^\circ} = 9{,}864666$$

Nun war die Richtung der Abscisse ED negativ, folglich ist $u = EM$ positiv und die Formel 7 für a mufs geschrieben werden

$$a = +\,\frac{-\,10u - 25}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{88u^2 + 472u + 545}$$

Setzt man in diese den Werth von $u = 9{,}864666$ so erhält man

$$a = -\,61{,}8233 \pm 58{,}6612$$

also $a = -\,120{,}4855$ und $-\,3{,}1621$

und die Zehntel davon genommen, für Gl 8:

$$a = -\,12{,}0485 \text{ und } -\,0{,}3162$$

Es ist nun

das erste a die Ordinate $MH = -\,12{,}0485$

das zweite a die Ordinate $MJ = -\;\;0{,}3162$

subtrahirt gibt $HJ = -\,11{,}7323$

und die Hälfte $= 5{,}8661 = y$

K. Zur Ueberzeugung, dafs beide Hyperbeln zusammen gehören und einander ≅ sind hat man aus No. G, 16 und 17

$$AA' = p + p' = 1{,}73112$$

hierzu $x = 10$

gibt $-\,x' = AL = 11{,}73112$

Man hat nun

$$y^2 = -\,11{,}73112\,A + 11{,}73112^2 \cdot B$$

$= -5{,}957 + 40{,}368 = +34{,}411$
wie bei der ersten Hyperbel.

Es ist dieses Beispiel deshalb so complicirt gewählt und so sorgfältig durchgenommen worden, damit die vorgetragenen Gesetze über die Natur der Curven erster Klasse als allgemein gültig erkannt werden.

IV. Linien dritter und höherer Ordnungen oder Curven zweiter und höherer Klassen.

Diese Curven finden wenig Anwendung, sie sind ihrer verschiedenen zusammengehörigen Eigenschaften wegen ebenfalls in Gattungen zu bringen und haben Formen der mannichfachsten Art, und um so mannichfacher je höher deren Ordnung ist. Die I, No. 12 betrachtete Cissoide ist eine Linie der dritten Ordnung, die Konchoide No. 13 ist eine Linie der vierten Ordnung.

Unter Familie von Curven versteht man die Summe der Curven, von denen jede einer anderen Ordnung angehört, deren Gleichungen aber allen der Form nach eine und dieselbe allgemeine Gleichung zu Grunde liegt.

So z. B. drückt die Gleichung

$$x^{n+1} = ax^n$$

eine Familie aus zu welcher die Gleichungen gehören

$$y^2 = ax$$
$$y^3 = ax^2$$
$$y^4 = ax^3 \text{ u. s. w.}$$

Die bekannteren Curven und deren Kenntnifs verlangt wird, als der Kreis, die Parabel, die Hyperbel, die Ellipse, die Konchoide, die Neoide, die Evolvente, die Cycloide, die Epicycloide, die Hypocycloide, die logarithmische Linie, die Spirallinien u. s. w. werden in diesem Wörterbuche ihre Artikel haben.

Curvenlehre, auch höhere Geometrie genannt, eine höhere Disciplin der Geometrie, ist die Lehre von denjenigen krummen Linien, (Curven) die nach irgend einem Gesetz gebildet sind, von deren Eigenschaften und von den Flächen und Körpern, die aus ihnen durch Construction hervorgehen können; während die niedere Geometrie nur gerade und Kreislinien und die aus ihnen hervorgehenden Flächen und Körper zum Gegenstande ihrer Untersuchung macht. Auch wie die niedere Geometrie hat diese höhere G. ihren synthetischen und ihren analytischen Theil. Die Ableitung des Verhältnisses zwischen den Abscissen und Ordinaten der Kegelschnitte im Art. Brennpunkte der K. kann als synthetisch angesehen werden, die Entwickelung der Formen der Curven im vorigen Art. ist nur analytisch. Die hörere G. hat dem Obigen nach auch ihre Longimetrie, ihre Planimetrie und ihre Stereometrie.

Der erste Theil der C., die Kenntnifs der Curven selbst, eine eigentliche Curvagraphie ist in dem vor. Art. im Allgemeinen und aus dem Gesichtspunkt gegeben, dafs so viele Curven existiren als man Gleichungen aufzustellen beliebt. Diejenigen bekannteren Curven, deren speciell nicht Erwähnung geschehen, werden in dem Wörterbuch ihre Artikel finden. Der zweite Theil der hier noch abzuhandelnden C. besteht in den Aufgaben, deren Lösung erforderlich ist, um mit den Curven rechnungsweise verfahren zu können, also in einer eigentlichen algebraischen C.

I. Bestimmung der Tangenten an Curven.

Tangente oder berührende gerade Linie in irgend einem Punkt der Curve heifst diejenige gerade Linie, welche durch diesen Punkt hindurch geht und mit der Curve diesen einzigen Punkt nur gemein hat, so dafs keine zweite gerade Linie zwischen ihr und der Curve durch denselben Punkt gezogen werden kann, ohne dafs diese die C. in 2 Punkten schneidet (vergl. Bd. 1, Art. berührende gerade Linie mit Fig. 204).

Ist BT die Tangente an der Curve FG in B, so kann das Curven-Element in B zugleich als das Element einer Kreisperipherie angesehen werden, deren Halbmesser in der normal auf TB in B gezogenen geraden Linie BN liegt, und da jeder Halbmesser auf dem von ihm berührten Kreiselement normal steht, so steht auch die im Berührungspunkt normal auf der Tangente befindliche Linie normal auf dem Curvenelement.

Sind T und N die Durchschnittspunkte der beiden genannten Linien mit der Abscissenlinie XX', BD die rechtwinklige Ordinate für den Punkt B, so heifst für den Punkt B:

Die Länge der berührenden Linie BT zwischen dem Berührungspunkt B und der Abscissenlinie die Tangente.

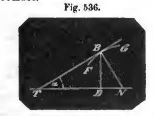
Die Länge der normal auf BT in B befindlichen Linie BN zwischen dem Berührungspunkt B und der Abscissenlinie die Normale.

Die normale Projection TD der Tangente BT auf der Abscissenlinie die Subtangente und

Die normale Projection ND der Nor-

male BN auf der Abscissenlinie die Subnormale.

Fig. 536.



Bd. I, pag. 344 mit Fig. 216 ist bereits entwickelt, wenn die Form der Curve durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung $y = fx$ gegeben ist:

Subtangente $DT = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{fx}{f'x}$ (1)

$$tg\,\alpha = \frac{BD}{DT} = \frac{y}{\text{Subtg.}} = \frac{\partial y}{\partial x} = f'x \quad (2)$$

Nun ist Tangente

$$BT = \sqrt{DT^2 + DB^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + y^2}$$

$$= \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{fx}{f'x}\sqrt{1 + (f'x)^2} \quad (3)$$

Da $\angle DBN = \angle DTB = \alpha$

so ist $DT : BD = BD : DN$

woraus Subnormale

$$DN = \frac{BD^2}{DT} = y^2 : \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = fx \cdot f'x \quad (4)$$

Ferner ist

$DT : BT = BD : BN$

woraus Normale

$$BN = \frac{BD \cdot BT}{DT} = \frac{y \cdot \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}{\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}} = y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = fx\sqrt{1 + (f'x)^2} \quad (5)$$

Beispiele (pag. 344) 1. die Parabel:

Gleichung $y^2 = px$

Es ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$

daher Subtg. $DT = \frac{2y^2}{p} = 2x$

$tg\,\alpha = \frac{p}{2y}$

Tang. $BT = \frac{y}{p}\sqrt{4y^2 + p^2}$

Subnorm. $DN = \frac{p}{2}$

Norm. $BN = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 + p^2}$

2. Die Ellipse.

Gleichung: $y^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2)$

Es ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y}$

daher Subtg. $DT = \frac{2ax - x^2}{a - x} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y^2}{a - x}$

$tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y}$

Tang. $BT = \frac{y}{a - x}\sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2}y\right)^2 + (a - x)^2}$

Subnorm. $DN = \frac{c^2}{a^2}(a - x)$

Norm. $BN = \sqrt{y^2 + \left[\frac{c^2}{a^2}(a - x)\right]^2}$

II. Ist die Form der Curve durch eine Polargleichung gegeben, so sei Fig. 537, C der Pol, EA die Polaraxe, $\angle\varphi$ die Polarabscisse für den Punkt B, $BC = a$ der Polarabstand oder die Polarordinate von B: ferner sei BA die berührende gerade Linie an der Curve an B. Zieht man nun durch C die Linie TN normal auf CB, so heifst die Länge BT der Linie BA die Tangente, deren Projection CT auf TN die Subtangente, die in B auf BA bis in die Richtung TN errichtete Normallinie BN die Normale und deren Projection CN auf TN die Subnormale in Beziehung auf den Punkt B.

Diese Linien lassen sich nun aus denen, welche für rechtwinklige Coordinaten ermittelt worden sind, für die Polarcoordinaten ableiten.

Fällt man nämlich das Loth BD auf AF, setzt $CD = x$, $BD = y$, so ist

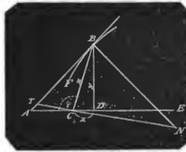
$tg \angle BAD = cot \angle DBT = \frac{\partial y}{\partial x}$ (I. Formel 2)

Nun ist $\angle CBT = \angle DBT - \angle CBD$

mithin $cot \angle CBT = cot (\angle CBD)$

und mit Hülfe dieser Gleichung ist Bd. I, pag. 345, B. mit Fig. 217 ermittelt.

Fig. 537.



Subtangente $CT = \frac{s^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)}$ (1)

Cot. $CBT = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)}{s}$ (2)

Nun erhält man die Tangente BT aus $BT = CT\, cosec\, CBT = CT \cdot \sqrt{1 + cot^2 CBT}$

$$= \frac{s^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)} \cdot \sqrt{1 + \frac{\frac{\partial s}{\partial \varphi}}{s^2}}$$

oder

Tangente $BT = \frac{s}{\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)} \sqrt{s^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2}$ (3)

Aus der Proportion $CT : CB = CB : CN$

oder $\frac{s^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)} : s = s : CN$

Die Subnormale $CN = \frac{\partial s}{\partial \varphi}$ (4)

da nun $BN = \sqrt{BC^2 + CN^2}$

so ist

die Normale $BN = \sqrt{s^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2}$ (5)

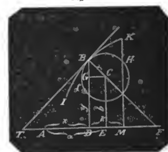
II. Bestimmung des Krümmungskreises an Curven.

Es ist ad I. gesagt, dafs jedes Curvenelement als das Element einer Kreisperipherie angesehen werden kann; der Kreis selbst, der diesem Elemente angehört heifst der Krümmungskreis oder Schmiegungskreis der Curve in dem Punkt. Ein Krümmungs- oder Schmiegungskreis ist also ein Kreis, der mit der Curve nur ein Element gemein hat; er ist zugleich der gröfste der Kreise, die durch einen und denselben Punkt der Curve hindurch gehen können ohne die Curve in noch einem Punkte zu schneiden, oder der gröfste aller der die Curve in diesem Punkt zu berühren möglichen Kreise. Der Halbmesser dieses Kreises liegt in der Richtung der Normale der Curve in dem Berührungspunkt und heifst der Krümmungshalbmesser.

Die Bestimmung des Krümmungskreises geschieht nun folgender Art.

Es sei KBJ eine Curve; dieselbe sei durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung $y = \varphi x$ gegeben; es soll der Krümmungskreis an dem Punkt B bestimmt werden. Ist nun A der Anfangspunkt der Abscissen, so ist $AD = x$ die Abscisse, $DB = y$ die Ordinate von B. Stellt BHL den Krümmungskreis vor, so liegt dessen Mittelpunkt C in der Normale BF oder in dessen Verlängerung. Bezeichnet man die Abscisse AE des Mittelpunkts C mit a, dessen Ordinate EC mit b, den Krümmungshalbmesser BC mit r, so sind diese 3 Parameter a, b, r des Krümmungskreises zu ermitteln.

Fig. 538.



Die erste Bedingung ist offenbar, dafs der Punkt B der Curve sowohl als dem Kreise angehöre; hierans entspringt die erste Bedingungsgleichung

$$BC^2 = BG^2 + CG^2$$

oder $r^2 = (y - b)^2 + (a - x)^2$ (1)

Die zweite Bedingung ist, dafs der Mittelpunkt in der Normale liege. Ist demnach BT die Tangente an B

so ist $\angle BTD = \angle CBG$

folglich $DT : BD = BG : CG$

oder da

DT als Subtangente $= \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$ (1. Formel 1)

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} : y = y - b : a - x \qquad (2)$$

Die dritte und letzte Bedingung ist, dafs zwischen dem Kreise und der Curve kein anderer Kreis durch B hindurchgehen könne ohne die Curve noch mindestens einmal zu schneiden, was übrigens unter der zweiten Bedingung zweimal geschehen würde.

Läfst man, um dieser Bedingung zu genügen, die Abscisse x um ein beliebiges Stück $DM = k$ wachsen, so hat man nach der Taylorschen Reihe für die Curve $y = \varphi x$ die Ordinate MK oder

$$y^1 = \varphi(x+k) = \varphi x + \frac{\partial \varphi x}{\partial x} k + \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} k^2 + \frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} k^3 + \ldots\ldots$$

Setzt man die Function von y für den Kreis, wie sie Gleichung 1 ausspricht: fx, so hat man für den Kreis die Ordinate MH oder

$$y_1 = f(x+k) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} k + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} k^2 + \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} k + \ldots\ldots .$$

folglich die Differenz HK beider Ordinaten

$$y^1 - y_1 = \varphi x - fx + \left(\frac{\partial \varphi x}{\partial x} - \frac{\partial fx}{\partial x}\right) k + \left(\frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}\right) k^2 + \left(\frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}\right) k^3 + \ldots$$

Da nun nach der ersten Bedingung $\varphi x = fx = BD = y$, so ist

$$y^1 - y_1 = \left(\frac{\partial \varphi x}{\partial x} - \frac{\partial fx}{\partial x}\right) k + \left(\frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}\right) k^2 + \left(\frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}\right) k^3 + \ldots.$$

Da nun diese Differenzenreihe mit den Potenzen von k fortschreitet, so kann man k so klein wählen, dafs, welches auch die eingeklammerten Differenzen sein mögen, jedes Glied gröfser wird als die Summe sämmtlicher nachfolgenden Glieder.

Wenn also zur Bestimmung der 3 Parameter a, b, r noch 2 Gleichungen erforderlich sind, und sie werden so bestimmt, dafs die ersten beiden Glieder der Reihe $= 0$ werden, also

$$\frac{\partial \varphi x}{\partial x} - \frac{\partial fx}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

und
$$\frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} - \frac{\partial fx}{\partial x^2} = 0 \qquad (4)$$

so schliefst sich der diesen Parametern zugehörige Kreis der Curve am innigsten an, weil mit dem kleinsten Werth der Differenzenreihe auch die Differenz KN die geringst mögliche wird.

Um aus den verstehenden Bedingungen die 3 Parameter zu entwickeln hat man Gl. 1 differenzirt:

$$0 = 2(y-b)\partial y - 2(a-x)\partial x$$

worans
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi x}{\partial x} = \frac{\partial fx}{\partial x} = \frac{a-x}{y-b} \qquad (3)$$

Man sieht, dafs diese Gleichung mit der 2ten Bedingungsgleichung identisch ist und dafs die nothwendige Gleichsetzung der beiden ersten Differenziale von φx und fx die Bedingung ausspricht, dafs der Mittelpunkt des Krümmungskreises in der Normale liege.

Schreibt man Gl. 5:

$$(y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = a - x \qquad (6)$$

und differenzirt, so erhält man

$$(y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = -1$$

worans
$$(y-b) = -\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (7)$$

Diesen Werth in Gl. 6 gesetzt gibt

$$(a-x) = -\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (8)$$

Diese Werthe aus 7 und 8 in 1 gesetzt gibt

$$r^2 = \left(\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\right)^2 + \frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2} = \frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2}$$

folglich

$$\text{I.}\quad r = \pm \frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (9)$$

$$\text{II.}\quad a = x - \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (10)$$

$$\text{III.}\quad b = y + \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (11)$$

Ueber das Verzeichen von r ist zu bemerken, dafs das positive Zeichen die Lage r von B aus nach BF hin, das negative die Lage r über B hinaus in der Verlängerung von FB bedeutet. Ersteres findet bei einer hohlen, letzteres bei der erhabenen Curve statt. Da nun bei der hohlen Curve das zweite Differenzial immer subtractiv, bei der erhabenen C. immer additiv ist (vergl. den Art. convex und concav), so ist das Vorzeichen von r mit dem Vorzeichen des zweiten Differenzials von y übereinstimmend.

Beispiel. Die Parabel. Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel, Abscissenlinie die Axe; Gl. $y^2 = px$.

Es ist also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{2x} = \frac{p}{2y}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{p}{4xy} = -\frac{p^2}{4y^3} = -\frac{y}{4x^2}$$

hieraus

$$r = \frac{(4x+p)^{3/2}}{2\sqrt{p}} = \frac{(4x^2+px)^{3/2}}{2xy}$$

$$a = x - \frac{4x^2+y^2}{2x} = 3x + \tfrac{1}{2}p$$

$$b = y + \frac{4x^2+y^2}{-y} = -\frac{4x^2}{y}$$

III. Bestimmung der Curve der Mittelpunkte.

Jeder Punkt einer Curve hat seinen besonderen Krümmungskreis, und jeder derselben seinen Mittelpunkt. Diejenige krumme Linie, in welcher die Mittelpunkte aller Krümmungskreise einer Curve liegen, heifst Curve der Mittelpunkte, auch die Evolute der gegebenen Curve, so wie diese wieder die Evolvente der Mittelpunktscurve heifst.

Bei der No. II. gegebenen Coordinatengleichung $y = \varphi x$ ist die für dieselbe Abscissenlinie und denselben Anfangspunkt der Abscissen a die Abscisse und b die Ordinate des Mittelpunkts von dem zu dem Punkt B derselben Coordinaten x und y gehörenden Krümmungskreise. Ist daher eine Evolvente JBK durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung $y = \varphi x$ gegeben und man soll die Evolute finden, so nehme man die Gleichungen

$$\text{II.}\quad a = x - \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\text{III.}\quad b = y + \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}$$

Substituire in beide Gleichungen y und dessen Differenziale aus der gegebenen Function $y = \varphi x$, eliminire y so werden a und b nur durch x ausgedrückt. Eliminirt man dann x aus beiden Gleichungen, so erhält man eine Gleichung zwischen a und b, welche die verlangte ist.

Beispiel. Die Coordinatengleichung für die Parabel ist

$$y^2 = \varphi x = py$$

Verfährt man nun so wie in dem Beispiel ad II. so erhält man wie dort

$$a = 3x + \tfrac{1}{2}p$$

$$b = -\frac{4x^2}{y} = -\frac{4x^2}{\sqrt{px}}$$

x aus beiden Gleichungen entwickelt und die Werthe einander gleich gesetzt, entsteht:

$$\frac{b^2 p}{16} = \frac{(a-\frac{1}{2}p)^3}{27}$$

woraus die verlangte Gleichung für die Evolute

$$b^2 = \frac{16\,(a-\frac{1}{2}p)^3}{27\,p}$$

IV. Bestimmung, ob und wo die Curve einen Wendungspunkt oder einen Rückkehrpunkt hat.

Der Wendungspunkt, in welchem eine Curve aus der convexen in die concave Form übergeht, macht sich in der Formel oder Gleichung dadurch kenntlich, dafs der Krümmungshalbmesser für diesen Punkt $\pm\infty$ wird, weil hier das Element der Curve geradlinig ist. Allein dieses Zeichen ist nicht genügend: es gilt auch für eine Spitze, einen Rückkehrpunkt, demnach mufs noch ein zweites Zeichen hinzutreten und dies ist, dafs bei einem Wendungspunkt rechts und links von dessen Ordinate die Ordinaten mögliche Gröfsen sind, während bei dem Rückkehrpunkt eine von beiden Ordinaten unmöglich wird.

I. Beispiel. Die Cissoide, pag. 165, Fig. 521 hat die Gleichung

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$$

diese differenzirt giebt

$$y^2 + 3x^2 - 2y(a - x)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

woraus $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2 + 3x^2}{2y(a - x)}$$

Die Differenzialgleichung abermals differenzirt gibt

$$2y(a-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2(a-x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 4y\frac{\partial y}{\partial x} + 6x = 0$$

woraus $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{5y^4 + 9x^4 + 6xy^2(x + 2a)}{4y^3(a - x)^2}$$

Das zweite Differenzial von y bildet den Nenner in der Formel für den Halbmesser des Krümmungskreises (Formel I, No. II.); demnach hat man das eben gefundene $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, oder dessen Zähler = Null zu setzen nämlich

$$5y^4 + 9x^4 + 6xy^2(x + 2a) = 0$$

Man ersieht, dafs wegen der eingeklammerten Gröfse $(x + 2a)$ nur entweder für $x = 0$, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, oder für x = einem negativen und kleineren Werth als $2a$ der Ausdruck = 0 wird.

Nun ergibt sich aber aus der Gleichung

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$$

dafs für ein negatives x die Ordinate unmöglich ist, nämlich

$$y = \pm\sqrt{-\frac{x^3}{a + x}}$$

Daher ist kein negatives x möglich, x kann nur 0 sein, der Punkt der Cissoide für $x = 0$ ist kein Wendungspunkt, sondern ein Rückkehrpunkt.

2. Beispiel. Die Konchoide pag. 165, Fig. 522 u. 523, hat die Gleichung (pag. 166) 4

$$a^2 = y^2 + \left(\frac{xy}{c \pm y}\right)^2$$

oder nach Entwickelung von x

$$x = \frac{(c \pm y)\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

Hieraus das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$\partial x = \frac{1}{y^2}\left[\frac{-y^2(c \pm y)}{\sqrt{a^2 - y^2}} \pm y\sqrt{a^2 - y^2} - (c \pm y)\sqrt{a^2 - y^2}\right]\partial y$$

oder $$\partial x = \frac{-y^2(c \pm y) \pm y(a^2 - y^2) - (c \pm y)(a^2 - y^2)}{y^2\sqrt{a^2 - y^2}}\partial y$$

oder reducirt und entwickelt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{y^2\sqrt{a^2 - y^2}}{a^2c \pm y^3}$$

Nun hat man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \partial\,\frac{y^2\sqrt{a^2 - y^2}}{a^2c \pm y^3}$$

$$= \frac{(a^2c \pm y^3)[-y^3 + 2y(a^2 - y^2)] \mp 3y^4(a^2 - y^2)}{(a^2c \pm y^3)^2\sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= -\frac{a^2y[2a^2c - 3cy^2 \mp y^3]}{(a^2c \pm y^3)^2\sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \left(-\frac{y^2\sqrt{a^2 - y^2}}{a^2c \pm y^3}\right)$$

$$= \frac{a^2y^3(2a^2c - 3cy^2 \mp y^3)}{(a^2c \pm y^3)^3}$$

Dieses zweite Differenzial wird nun = 0 wenn der Factor

$$2a^2c - 3cy^2 \mp y^3 = 0$$

wo das obere Vorzeichen von y^3 für die obere, das untere für die untere Konchoide gilt.

Für die obere Konchoide entsteht also die geordnete Gleichung

$$y^3 + 3cy^2 - 2a^2c = 0 \qquad (1)$$

Für die untere

$$y^3 - 3cy^2 + 2a^2c = 0 \qquad (2)$$

1. Beispiel. Es sei $c = 1$; $a = 5$, so hat man

1. für die obere Konchoide die Gleichung:

$$y^3 + 3y^2 - 50 = 0$$

durch Probiren erhält man $y = 2{,}909$ mit $(y - 2{,}909)$ die Gleichung dividirt ergibt die Gl.

$$y^2 + 5{,}909\,y + 17{,}28928 = 0$$

beide Wurzeln daraus sind unmöglich und die erstere $y = 2{,}909$ zu beiden Seiten von A genommen der Ort des Wendungspunkts. Dafs hier y zu beiden Seiten von A genommen werden kann liegt darin, dafs wie pag. 166, Gl. 5 vom 4ten Grade darthut, für $+x$ und $-x$ dieselbe Ordinate entsteht.

2. Für die untere Konchoide ist die Gleichung

$$y^3 - 3y^2 + 50 = 0$$

Die Wurzel ist $y = -2{,}909$; die Glei-

chung durch $y + 2{,}909$ dividirt gibt:

$$y^2 - 5{,}909\,y + 17{,}28928 = 0$$

deren beide Wurzeln unmöglich sind. Die beiden Ordinaten rechts und links von A für die untere Konchoide sind denen für die obere gleich. Die der oberen erscheinen positiv, die der unteren negativ, und es genügt eine der beiden Gleichungen zur Bestimmung der Wendepunkte.

Setzt man den Werth von y in Gleichung 12, pag. 167, so erhält man für beide Konchoiden

$$s = \frac{c}{y}\sqrt{a^2 - y^2} = \pm\frac{1}{2{,}909}\sqrt{25 - 2{,}909^2} = \pm 1{,}398$$

Die Werthe von y und s in Gl. 7 gesetzt gibt für die obere Konchoide

$$x = \frac{c + y}{c}\,s = \frac{1 + 2{,}909}{1} \cdot 1{,}398 = 5{,}46478$$

Für die untere Konchoide, wo s negativ wird (s. Gl. 8, pag. 167), indem s auf der entgegengesetzten Seite von A liegt.

$$x = \frac{c - y}{c}\,s = \frac{1 - 2{,}909}{1}(-1{,}398) = +2{,}66878$$

Der Wendungspunkt der unteren Konchoide liegt also der Mittellinie näher als der der oberen.

In dem Beispiel entsteht für die untere K. ein Knoten (s. pag. 167, Fig. 523); es folgt hier ein solches Beispiel, wo kein Knoten entsteht, indem $c > a$ gesetzt wird.

2. Beisp. Es sei $c = 10$, $a = 5$, so hat man die Gleichung für die obere Konchoide

$$y^3 + 30y^2 - 500 = 0$$

$y = +\,3{,}8445$ ist eine Wurzel und gibt jeden der beiden oberen Wendungspunkte. Denn die Gl. mit $y - 3{,}8445$ dividirt entsteht

$$y^2 + 33{,}8845\,y + 130{,}269 = 0$$

welche 2 negative Wurzeln giebt, die nicht gelten können. Die Gl. für die untere Konchoide würde sein

$$y^3 - 30\,y^2 + 500 = 0$$

Eine Wurzel ist hier wieder die entgegengesetzte der oberen nämlich $y = -3{,}8445$ und diese gibt die beiden Wendungspunkte; denn die Gl. mit $y + 3{,}8445$ dividirt gibt

$$y^2 - 33{,}8845\,y + 130{,}269 = 0$$

welche 2 positive Wurzeln gibt, die hier nicht gelten können.

Aus der Construction der Konchoide, und auch da für jedes x von 0 bis $\pm\infty$ mögliche Werthe von y entstehen geht hervor, dafs die hier gefundenen Punkte keine Spitzen an der Curve sind.

V. Rectification der Curven.

Hierunter versteht man, die Länge einer C. anzugeben, oder die gerade Linie zu finden, welche mit der C. einerlei Länge hat.

Es sei ABG eine krumme Linie, CX die Abscissenlinie C der Anfangspunkt der Abscissen; $CE = x'$, $CD = x$ die Abscissen, $EA = y'$, $DB = y$ die Ordinaten zweier Punkte A und B der krummen Linie, diese Ordinaten y', y als Functionen von x', x gegeben; man soll die

Fig. 539.



Länge λ des zwischen beiden Punkten A und B befindlichen Curvenstücks bestimmen.

Läfst man $CD = x$ um das Stück $DF = \Delta x$ wachsen, so ist die Ordinate

$$FG = y + \Delta y$$

zieht man $BJ \mathbin{\#} CX$, so ist $BJ = \Delta x$ und $GJ = \Delta y$

zieht man ferner durch B die Tangente KH, so ist

Da die Tangente BH mit BJ denselben Winkel bildet wie mit der Abscissenlinie, (nach pag 185, Gl. 2) die trigonometrische Tangente von $\angle HBJ$

oder $$tg\,HBJ = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Verlängert man daher die Ordinate FG bis sie die Tangente in H schneidet,

so ist $$HJ = BJ\,tg\,HBJ = \Delta x\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

folglich $$GH = \Delta x\,\frac{\partial y}{\partial x} - \Delta y$$

und $$BH = \sqrt{BJ^2 + JH^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \left(\Delta x \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Zieht man nun die Sehne *BG* so hat man

$$BG \sqrt{BJ^2 + JG^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Es ist aber nach Lehren der Geometrie der Bogen größer als die Sehne und kleiner als die Summe der beiden ihn außerhalb einschließenden geraden Linien, oder

$$BG < \Delta\lambda < BH + GH$$

oder
$$\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} < \Delta\lambda < \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x} - \Delta y$$

oder
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} < \frac{\Delta \lambda}{\Delta x} < \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Läßt man nun den Zuwachs Δx von x beliebig klein werden, so nähert sich der Zuwachsquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in dem 3ten Vergleichungsgliede beliebig seinem Grenzwerth $\frac{\partial y}{\partial x}$ und die Differenz $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$ kann beliebig klein, resp. $= 0$ werden; das vorstehende Glied $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ als Grenzwerth bleibt ungeändert. Das erste Glied $\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ der Vergleichung nähert sich seinem Grenzwerthe $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ welcher dem ersten Gliede des dritten Vergleichungsgliedes gleich ist; es können also die das Mittelglied $\frac{\Delta \lambda}{\Delta x}$ einschließenden beiden Glieder $\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ und $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$ einander beliebig nahe gebracht werden, oder sie haben einerlei Grenzwerth und folglich hat das eingeschlossene Glied $\frac{\Delta \lambda}{\Delta x}$ denselben Grenzwerth. Oder es ist

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

woraus
$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \partial x + C$$

Die Constante C bestimmt sich daraus, daſs für x^1 der Bogen $\lambda = 0$ wird.

Beispiel. Die Parabel. Es ist $y^2 = px$ wenn die Abscissen in der Axe vom Scheitelpunkt ab genommen werden.

also
$$2y \frac{\partial y}{\partial x} = p$$

und
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$$

also
$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \partial x = \int \sqrt{1 + \left(\frac{p}{2y}\right)^2} \partial x$$

Nimmt man des leichteren Integrirens wegen y als urvariabel, so ist zu setzen

$$\partial x = \frac{2y}{p} \partial y$$

und man erhält

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{p}{2y}\right)^2} \cdot \frac{2y}{p} \partial y = \int \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{p}\right)^2} \partial y = \frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + 4y^2} \partial y$$

woraus
$$\lambda = \frac{1}{4p} \left[2y \sqrt{p^2 + 4y^2} + p^2 \, logn \left(2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}\right)\right] + C$$

Da die Coordinaten vom Scheitel aus genommen worden, so ist für $y = 0$ auch $\lambda = 0$ daher hat man zur Bestimmung der Constante:

$$0 = \frac{1}{4p} [0 + p^2 \, logn \, p] + C$$

woraus
$$C = -\frac{1}{4p} \cdot p^2 \, logn \, p$$

daher vollständig

$$\lambda = \frac{1}{4p} \left[2y\sqrt{p^2+4y^2} + p^2 \, logn \frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{2}\right]$$

2. Ist die Curve durch eine Polargleichung gegeben, so nehme man Fig. 537 in dem Pol C den Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten und man hat, das Stück *FB* der Curve $= \lambda$ gesetzt.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Nun ist
$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

und eben so

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Substituirt man diese Werthe in die erste Formel, so erhält man

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}$$

also

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2}$$

Nun ist

$$y = z \sin\varphi$$
$$x = -z\cos\varphi$$

daher

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = z\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\sin\varphi$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = z\sin\varphi - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cos\varphi\,.$$

hieraus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 = \left[z\sin\varphi - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cos\varphi\right]^2 + \left[z\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\sin\varphi\right]^2$$

$$= z^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

daher $\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} = \sqrt{z^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}$

und $\lambda = \int\sqrt{z^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\,\partial\varphi + C$

Die Constante C wird hier dadurch bestimmt, dafs wenn man den Werth von z' für den Punkt F einsetzt, $\lambda = 0$ entsteht.

VI. Quadratur der von Curven begrenzten Ebenen.

Hierunter versteht man die Bestimmung des Flächenraums einer Ebene, welche durch eine Curve, durch die Ordinaten ihrer Endpunkte und das zwischen beiden befindliche Stück der Abscisse begrenzt ist.

A. Ist die Curve ABG durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung $y = fx$ gegeben, und soll der Flächenraum F zwischen AB, DE, y' und y bestimmt werden, so lasse man x um das Stück $EF = \triangle x$

Fig. 540.

wachsen, zeichne die Ordinate FG, so ist $FG = y + \triangle y$ und die Fläche $EFBG = \triangle F$.

Zeichnet man nun die Parallelen mit $CF : GH$ bis in die Richtung EB und BJ, so entstehen 2 Rechtecke $EFGH$ und $EFBJ$ von denen das Erstere $= EF \times FG = \triangle x\,(y + \triangle y)$ gröfser und das zweite $EF \times EB = \triangle x \cdot y$ kleiner als $EFGB = \triangle F$ ist. Man hat also die Vergleichung

$$\triangle x\,(y+\triangle y) > \triangle F > \triangle x \cdot y$$

oder

$$y + \triangle y > \frac{\triangle F}{\triangle x} > y$$

Bei beliebiger Abnahme von $\triangle x$ nimmt auch $\triangle y$ beliebig ab, und es können die beiden äufseren Glieder einander beliebig nahe gebracht werden und das dritte Glied ist der Grenzwerth des ersteren; mithin ist y zugleich der Grenzwerth des mittleren Gliedes und da dieses der Zuwachsquotient von F als Function von x ist, so geht derselbe in das Differenzial von F über und wird $= \frac{\partial F}{\partial x}$

woraus $\frac{\partial F}{\partial x} = y$

und $F = \int y\,\partial x + C$

worin die Constante so bestimmt wird, dafs für $x = x'$; $F = 0$ entsteht.

Zusatz. Bei dieser Entwickelung ist ganz davon abgesehen, dafs CE eine gerade Linie ist. Die Formel gilt also auch für den Fall, dafs CE eine in einer Ebene liegende Curve ist und die krumme Oberfläche ist dann das Integral der Ordinate als Function des Bogens.

Beispiel. Die Parabel: Wenn die Axe als Abscissenlinie, der Scheitel als Anfangspunkt genommen wird, so ist

$$y^2 = px \quad\text{oder}\quad y = \sqrt{px}$$

daher

$$F = \int\sqrt{px} + C = \sqrt{p}\int x^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{p}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}x\sqrt{px} + C$$

Soll die Parabelfläche mit einem zugehörigen $x = x'$ beginnen, so hat man

$$0 = \tfrac{2}{3}x'\sqrt{px'} + C$$

woraus

$$C = -\tfrac{2}{3}x'\sqrt{px'}$$

und vollständig ist

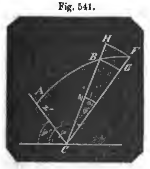
$$F=\tfrac{2}{3}x\sqrt{px}-\tfrac{2}{3}x'\sqrt{px'}=\tfrac{2}{3}\sqrt{p}\,[x\sqrt{x}-x'\sqrt{x'}]$$

Für $x'=0$, wenn also die Parabelfläche mit deren Scheitel beginnen soll, hat man

$$F=\tfrac{2}{3}x\sqrt{px}=\tfrac{2}{3}xy$$

B. Ist die Curve durch eine Polargleichung gegeben, so ist (Fig. 541) die Fläche ACB zwischen dem Curvenstück AB und den zu den Abscissen φ' und φ gehörenden Ordinaten $CA=s'$ und $CB=s$ als F zu bestimmen. Läfst man nun die Abscisse φ um das Stück $BCF=\triangle\varphi$ wachsen, so ist CF die Polarordinate $(s+\triangle s)$ zu $(\varphi+\triangle\varphi)$ und der Ausschnitt $BCF=\triangle F$. Beschreibt man nun aus A

Fig. 541.



die Bogen BG und FH bis in die Richtung von CB, so ist der Bogen

$$BG=s\cdot\triangle\varphi$$

der Bogen $\quad FH=(s+\triangle s)\triangle\varphi$

folglich Ausschnitt $BCG=\tfrac{1}{2}s^2\triangle\varphi$

und Ausschnitt $FCH=\tfrac{1}{2}(s+\triangle s)^2\triangle\varphi$

Zwischen beiden Ausschnitten ist der Ausschnitt $BCF=\triangle F$ begriffen, folglich hat man die Vergleichung

$$\tfrac{1}{2}s^2\triangle\varphi<\triangle F<\tfrac{1}{2}(s+\triangle s)^2\triangle\varphi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}s^2<\frac{\triangle F}{\triangle\varphi}<\tfrac{1}{2}(s+\triangle s)^2$$

Bei beliebiger Abnahme von $\triangle\varphi$ wird das erste Glied $\tfrac{1}{2}s^2$ der Grenzwerth des dritten Gliedes $\tfrac{1}{2}(s+\triangle s)^2$ folglich auch der Grenzwerth von $\frac{\triangle F}{\triangle\varphi}$. Dieser Zuwachsquotient geht aber bei beliebiger Abnahme von $\triangle\varphi$ in das Differenzial von F in Beziehung auf φ über, also hat man

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\tfrac{1}{2}s^2$$

und

$$F=\tfrac{1}{2}\int s^2\,\partial\varphi+C$$

worin C dadurch bestimmt wird, dafs für φ' der Werth von $F=0$ entsteht.

VII. Bestimmung der Oberflächen, welche bei Umdrehung von Curven um feste Axen entstehen.

Es sei (Fig. 539) CX die Axe, um welche die Curve AB sich herumdreht, so soll die von AB erzeugte Oberfläche bestimmt werden. Jeder Punkt der C. also beschreibt einen Kreis und die von AB auf CX gefällten Normalen, wie AE und BD sind die Halbmesser der von den Punkten A bis B beschriebenen Kreise.

Ist CX zugleich Abscissenlinie der Curve, A der Anfangspunkt der Coordinaten, die Curve durch die rechtwinklige Coordinatengleichung $y=fx$ gegeben, so setze $CD=x$, $CE=x'$, $DB=y$, $EA=y'$, die von AB erzeugte Oberfläche $=F$.

Wächst nun die Abscisse x um $DF=\triangle x$, so wird die Ordinate $\quad FG=y+\triangle y$ und die durch den Zuwachs BG der Curve erzeugte Oberfläche $=\triangle F$. Zieht man nun durch B die Tangente BH bis in die Richtung von FG und die Sehne BG, so werden von den beiden geraden Linien BH und BG zwei abgekürzte Kegelmäntel beschrieben. Der von BG beschriebene Kegelmantel ist kleiner als $\triangle F$, der von BH beschriebene Kegelmantel + dem Kreisringstück, welcher durch GH beschrieben wird ist gröfser als $\triangle F$.

Nun ist nach pag 185, Gl. 2, wenn man noch $BJ \perp CX$ zieht,

$$tg\angle HBJ=\frac{\partial y}{\partial x}$$

daher

$$HJ=BJ\,tg\angle HBJ=\triangle x\frac{\partial y}{\partial x}$$

und

$$BH=\sqrt{\triangle x^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\triangle x^2}=\triangle x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Der von BH gebildete Kegelmantel ist aber

$$\pi\,(BD+FH)\cdot BH=\pi\,(BD+BD+JH)\cdot BH=\pi\left(2y+\triangle x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\triangle x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\quad\text{(I)}$$

der von GH gebildete Kreisring

$$\pi\,(FH^2-FG^2)=\pi\,[(FJ+JH)^2-FG^2]=\pi\left[\left(y+\triangle x\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-(y+\triangle y)^2\right]$$

$$=\pi\left(\triangle x\frac{\partial y}{\partial x}-\triangle y\right)\left(2y+\triangle x\frac{\partial y}{\partial x}+\triangle y\right)\qquad\text{(II)}$$

der von BG gebildete Kegelmantel

$$\pi (BD + FG) \cdot BG = \pi (2y + \Delta y) \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \pi (2y + \Delta y) \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \text{ (III)}$$

Zwischen der Gröfse (I + II) und der Gröfse (III) liegt nun der Zuwachs ΔF der Oberfläche F. Dividirt man die 3 Vergleichungsglieder durch Δx so erhält man

$$\text{I.} \quad = \pi \left(2y + \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

$$\text{II.} \quad = \pi \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(2y + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x} + \Delta y\right)$$

$$\text{III.} \quad = \pi (2y + \Delta y) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

so dafs $\quad \text{I} + \text{II} > \frac{\Delta F}{\Delta x} > \text{III}$

Bei beliebiger Abnahme von Δx entstehen nun folgende Aenderungen:

In I wird das zweite Glied $\frac{\partial y}{\partial x} \Delta x$ des zweiten Factors beliebig klein und der Factor selbst $2y + \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x$ kommt auf seinen Grenzwerth $2y$; da nun die beiden anderen Factoren ungeändert bleiben, so wird $\quad \text{I} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$

In II kann der zweite Factor, indem $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ seinem Grenzwerth $\frac{\partial y}{\partial x}$ sich beliebig nähert, beliebig klein werden; sein Grenzwerth ist $= 0$ und der Grenzwerth der ganzen Gröfse II ist $= 0$

In III endlich erhält bei beliebiger Abnahme von Δx, also auch von Δy der zweite Factor $2y + \Delta y$ seinen Grenzwerth $2y$, der Zuwachsquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geht in das Differenzial über und es ist

$$\text{III} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Es werden also I und III als Grenzwerthe einander gleich, und folglich mufs auch der zwischen liegende Zuwachsquotient $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ in dem Differenzial $\frac{\partial F}{\partial x}$ als seinem Grenzwerth jenem Grenzwerthe gleich sein, und man hat

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

und $\quad F = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \partial x + C$

Die Constante ergiebt sich daraus, dafs wenn man x' für x setzt, $F = 0$ wird.

Beispiel. Die Parabel. $y^2 = px$, also $y = \sqrt{px}$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$ mithin

$$F = 2\pi \int px \sqrt{1 + \frac{p}{4x}} \partial x = 2\pi \sqrt{p} \int \sqrt{\frac{4x + p}{4}} \partial x = \pi \sqrt{p} \int \sqrt{4x + p} \cdot \partial x$$

Setzt man $\quad 4x + p = z$

so ist $\quad x = \frac{z - p}{4}$

und $\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{4}$

oder $\quad \partial x = \frac{1}{4} \partial z$

daher $\quad F = \pi \sqrt{p} \sqrt{z} \cdot \frac{1}{4} \partial z$

$$= \frac{1}{4}\pi \sqrt{p} \cdot \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\pi p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\pi p^{\frac{1}{2}} (4x + p)^{\frac{3}{2}} + C$$

Für $x = x'$ wird $F = 0$

folglich ist $\quad 0 = \frac{1}{6}\pi p^{\frac{1}{2}} (4x' + p)^{\frac{3}{2}} + C$

und vollständig die Oberfläche des parabolischen Conoids

$$F = \frac{1}{6}\pi p^{\frac{1}{2}} \left[(4x + p)^{\frac{3}{2}} - (4x' + p)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Fängt das Paraboloid am Scheitel an und ist geschlossen, so ist

$$F = \frac{1}{6}\pi p^{\frac{1}{2}} (4x + p)^{\frac{3}{2}}$$

VIII. Bestimmung der durch Umdrehung von Curven um feste Axen hervorgehenden körperlichen Räume.

In Fig. 540 bei der ad VII. gewählten Bezeichnung, soll der durch Umdrehung des Curvenstücks AB und der Ordinaten AD und BE um die Axe CX erzeugte Körper K bestimmt werden. Der von AD beschriebene Kreis ist πy_1^2; der von BD beschriebene Kreis πy^2, der bei dem Wachsthum von x um Δx von GF beschriebene Kreis ist $\pi (y + \Delta y)^2$ und der bei der Umdrehung von BG, BE und GF beschriebene Körper ist ΔK. Dieser Zuwachs des Körpers K ist zwischen 2 Cylindern enthalten, von denen der eine den Kreis in B, nämlich πy^2 und der andere den Kreis in H, nämlich $\pi (y + \Delta y)^2$ zum Grundkreise und den Zuwachs $EF = \Delta x$

zur Höhe hat. Man hat also die Vergleichung

$$\pi y^2 \cdot \Delta x < \Delta K < \pi (y + \Delta y)^2 \cdot \Delta x$$

oder wenn mit der Zunahme von x eine Abnahme von y geschieht:

$$\pi y^2 \Delta x > \Delta K > \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$$

oder mit Δx dividirt

$$\pi y^2 \gtrless \frac{\Delta K}{\Delta x} \gtrless \pi (y + \Delta y)^2$$

Mit beliebiger Abnahme von Δx also auch von Δy wird das erste Glied der Grenzwerth des dritten, folglich wird auch das mittlere zwischen beiden begriffene Glied derselbe Grenzwerth, wobei es in das Differenzial $\frac{\partial K}{\partial x}$ übergeht, und man hat

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \pi y^2$$

woraus $K = \pi \int y^2 \partial x + C$

Zusatz. Es ist πy^2 die Kreisfläche zu Ende des körperlichen Raums, der bestimmt werden soll. Aus dem Entwickelungsgange ist zu ersehen, dafs auch ein Körper bestimmt wird, der kein Umdrehungskörper ist, wenn man statt πy^2 die Endfläche fx setzt, dann ist

$$K = \int fx \, \partial x + C$$

Beispiel. Die Parabel. Gl.: $y^2 = px$

$$K = \pi \int px \, \partial x = \tfrac{1}{2} \pi p x^2 + C$$

Für x' statt x wird $K = 0$ folglich ist vollständig

$$K = \tfrac{1}{2} \pi p (x^2 - x'^2)$$

Setzt man für px und px' die Werthe y^2 und $y_1{}^2$ so erhält man

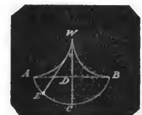
$$K = \tfrac{1}{2} \pi (y^2 x - y_1{}^2 x')$$

Für $x' = 0$, also für das geschlossene parabolische Conoid hat man

$$K = \tfrac{1}{2} \pi y^2 x$$

Cycloidalpendel ist ein Pendel, welches statt in einem Kreisbogen, in einem cycloidischen Bogen schwingt und der Grund für diese Einrichtung ist, dafs bei einerlei Länge des Fadens das Pendel durch verschiedene grofse Bogen gleichzeitig schwingt, dafs es isochrone Oscillationen macht. Dies Pendel ist so construirt worden, dafs man von dem Aufhängepunkt W aus nach beiden Seiten hin feste Flächen WA, WB von cycloidischer Form zusammensetzte und das Pendel an einer biegsamen Uhrfeder aufhing, die sich gegen das Ende jeder Schwingung an jene Flächen zum Theil auf- und beim Rückgang wieder abwickelte, wo dann der cycloidische Bogen innerhalb ACB durchlaufen wurde und wobei es auf die Länge der Auf- und Abwickelung nicht ankam, weil wie eben gesagt, jeder verschieden grofse Bogen in einerlei Zeit durchlaufen wird. In der Praxis hat sich das C nicht bewährt, denn bei den nur kleinen Bogen, welche durchlaufen werden, ist es schwierig, richtige cycloidische Chablonen zu fertigen, die Elasticität der Federn oder anderer Fäden veranlafst eine auf

Fig. 542.



die richtige Bewegung nachtheilige Rückwirkung und angleich sind kleine Kreisbogen zu gleichzeitigen Schwingungen des Pendels ausreichend. Aus diesem Grunde soll dieser Art. auch nur kurz behandelt werden.

Wenn die Flächen AW und BW Cycloiden sind, von welchen die krumme Linie ACB sich abwickelt, so ist diese die Evolute der beiden cycloidischen Bogen. In dem folgenden Art. No. 7 mit Fig. 543 ist nachgewiesen, dafs die Evolute der Cycloide selbst ∾ ist, und während (Fig. 543) die Evolute der Cycloide ACB aus den beiden Hälften AW und BW besteht, so ist hier die Curve ACB die Evolute der beiden halben Cycloiden AW und BW. Ferner ist nachgewiesen, dafs $WD = CD$ ist, und der Erzeugungskreis für die beiden Chablonen mufs die halbe Pendellänge zum Durchmesser erhalten.

Dafs nun der Isochronismus bei der Schwingung des Pendels in einer Cycloide statt findet, liegt in dem No. 8 erwiesenen Gesetz, dafs jeder von der Mitte C ausgemessene Bogen, wie CL = der doppelten Sehne CP ist; d. i. der Halbmesser r multiplicirt mit dem 4fachen Sinus des von C bis L abgewickelten Kreisbogens CP oder LK, dafs also die von dem Pendel durchlaufenen cycloidischen Bogen mit den Sinus der ihnen zugehörigen aus W beschriebenen Kreisbogen in Proportion stehen. Denn alsdann vereinfacht sich der Ausdruck für die Zeit t einer halben Pendelschwingung und es ist

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\tfrac{1}{2}\pi - Arc\ sin\ \frac{CE}{CA}\right]$$

hieriu ist t die Zeit, in welcher das Pendel von A' bis E fällt, l die Länge des Pendelfadens, g die Beschleunigung. Setzt man nun $CE = 0$ so ist die Zeit des Fallens bis C, nämlich

$$t = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

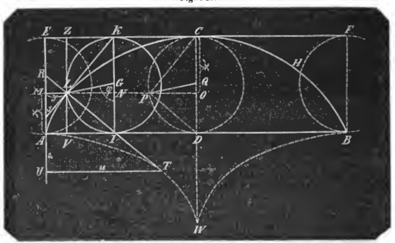
nnabhängig von der Länge des Bogens, durch deo das Pendel fällt nnd für alle Bogen wie EC oder AC gleich grofs.

Cycloide wird durch jeden in der Ebene eines Kreises befindlichen Punkt beschrieben, wenn dieser Kreis innerhalb einer Ebene auf einer geraden Linie sich der Art fortwälzt, dafs er mit der Abwälznng eines Bogens auch um dieselbe Bogenlänge auf der geraden Linie fortschreitet.

Die gerade Linie heifst die Grundlinie oder Basis der C., der sich umwälzende Kreis heifst der Erzeugungskreis nnd der Punkt, den die C. beschreibt der beschreibende Punkt.

Liegt der beschreibende Puokt in der Peripherie des erzengenden Kreises so heifst die C. die gemeine C., Radlinie; man versinnlicht sich diese Linie durch Beobachtung der Cnrve, welche der Nagel eines Wagenrades während der Fortbewegung des Wagens in der Lnft beschreibt. Liegt der beschreibende Pnokt innerhalb der Peripherie, so entsteht die gestreckte oder gedehnte C., welche z. B. die Knrbelwarze an dem Treibrade einer Locomotive beschreibt. Liegt der beschreibende Punkt aufserhalb der Peripherie, so entsteht die verkürzte oder verschlungene C., wie sie z. B. die Windescheibe auf der Welle einer zu einem Krahn gehörenden mit Laufrollen fortzubewegenden sogenannten Katze beschreibt.

Fig. 543.



2. Es sei AB die Basis, AE der Erzeugungskreis im Anfange seiner Bewegung, A slso der beschreibende Punkt. Ist AD die Länge der halben Peripherie und befindet sich der Kreis über D, so liegt jetzt der Punkt E in D nnd der Pnnkt A in C. Ist DB die Länge der zweiten Hälfte der Peripherie und befindet sich der Kreis über B, so ist von A bis B der ganze Kreis abgewälzt, der Punkt E ist nach F, der Pnnkt A nach B gekommen, und $ALCHB$ ist die mit einmaliger Umwälzung des Kreises von dem Punkt A beschriebene C. Der senkrechte Durchmesser in der Mitte der Bewegung heifst die Axe der C.; der Punkt C der Cycloide ist von der Basis am weitesten, und zwar um den Durchmesser des Erzeugungskreises entfernt und heifst der Scheitel der C. Von der Axe ab sind beide Hälfteu der C. einander ∾.

3. Es sei der Kreis bis über J gekommen, JK sein lothrechter Durchmes-

*21

ser, G sein Mittelpunkt, so ist der Punkt L in der Cycloide der Ort des beschreibenden Punkts, es ist der Bogen JL auf der Linie AJ abgewälzt und AJ = Bogen LJ.

Nimmt man die auf AB normale AE zur Abscissenlinie (vergl. Bd. I, pag. 343 mit Fig. 215), so ist $AM = x$ die Abscisse und $ML = y$ die Ordinate von L. Zieht man GL, setzt den Bogen für den Halbmesser = 1 zwischen den Scheokeln GJ und $GL = \varphi$, den Halbmesser $GJ = r$, so ist Bogen $JL = r\varphi$; verlängert man MC, so ist

$$LN = r \sin\varphi;\ MN = AJ = \text{Bogen } JL = r\varphi$$
$$GN = r\cos\varphi$$

und man hat die beiden Gleichungen für die C.

$$x = r - r\cos\varphi \qquad (1)$$
$$y = r\varphi - r\sin\varphi \qquad (2)$$

Aus der ersten Gleichung erhält man

$$\cos\varphi = \frac{r-x}{r} \qquad (3)$$

also

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{r-x}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}$$

Aus der 3ten Gleichung

$$\varphi = Arc\left(\cos\frac{r-x}{r}\right)$$

daher

$$y = r\,Arc\left(\cos\frac{r-x}{r}\right) - \sqrt{2rx-x^2} \qquad (4)$$

4. Nimmt man den lothrechten Durchmesser CD zur Abscissenlinie, den Scheitel C zum Anfangspunkt der Abscissen, so ist $CO = x_1$ die Abscisse und $OL = y_1$ die Ordinate für den Punkt L.

Nun ist $AM = AE - CO$
und $ML = AD - LO$
oder $x = 2r - x_1$
und $y = \pi r - y_1$

Diese Werthe in Gl. 4 substituirt gibt

$$\pi r - y_1 = r\,Arc\left(\cos\frac{r-(2r-x_1)}{r}\right) - \sqrt{2r(2r-x_1)-(2r-x_1)^2}$$

woraus

$$y_1 = r\left[\pi - Arc\left(\cos\frac{x_1-r}{r}\right)\right] + \sqrt{2rx_1 - x_1^2}$$

Da $arc\left(\cos\frac{x_1-r}{r}\right)$ den Bogen $\pi - Arc\left(\cos\frac{x_1-r}{r}\right)$ zum Halbkreise ergänzt, so ist

$$\cos\left[\pi - Arc\left(\cos\frac{x_1-r}{r}\right)\right] = -\frac{x_1-r}{r} = +\frac{r-x_1}{r}$$

folglich hat man

$$y_1 = r\,Arc\left(\cos\frac{r-x_1}{r}\right) + \sqrt{2rx_1 - x_1^2} \qquad (5)$$

Zieht man den Halbmesser PQ, so ist dieser $\mp LG$

$$\text{Bogen } DP = \text{Bogen } JL = r\,arc\left(\cos\frac{r-x}{r}\right)$$

folglich Bogen $CP = r\,arc\left(\cos\frac{r-x_1}{r}\right)$

Da nun zugleich $OP = \sqrt{2rx_1 - x_1^2}$ so ist nach Formel 5

$$y = OL = \text{Bogen } CP + OP$$

aber auch $y = LP + OP$
folglich Bogen $CP = LP$

5. Die Construction der Tangente an einen beliebigen Punkt L ist Bd. I, pag. 343 mit Fig. 215 gezeigt: Man erhält sie in der geraden Linie KL. Verlängert man diese bis S in der Abscissenlinie AE, so ist LS die Tangente und MS die Subtangente; da nun LJ mit LK rechtwinklig ist, so hat man in der Verlängerung LR von JL bis an die Abscissenlinie AE die Normale und MR die Subnormale des Punktes L.

Wenn man für irgend einen Punkt L der C. den Erzeugungskreis in seinem zugehörigen Stande zeichnen will, so zeichne man über irgend einem Punkt z. B. D der Basis AB, den Erzeugungskreis CPD, ziehe $LP \mp AB$, die Sehne PD und aus L die Parallele LJ damit, so ist J der Ort für den lothrechten Durchmesser des verlangten Erzeugungskreises.

6. Die Lage des Krümmungshalbmessers ist durch die der Normale bekannt, die Länge desselben ist nach pag. 188, Formel 9

$$\varrho = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Aus Formel 1 und 2 entspringt

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r\sin\varphi$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r - r\cos\varphi$$

hieraus $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} : \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{r - r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = tg\,\frac{\varphi}{2}$

Zur Auffindung der zweiten Differenziale hat man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^3} = \frac{r\sin\varphi\cdot r\sin\varphi - r(1-\cos\varphi)\cdot r\cos\varphi}{r^3\sin^3\varphi}$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\sin^3\varphi} = \frac{tg\,\frac{\varphi}{2}}{r\sin^2\varphi} = \frac{1}{4r\sin\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}}$$

folglich $$\varrho = + \frac{\left(1 + tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{4r\sin\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}}} = 4r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^3\frac{\varphi}{2}\sec^3\frac{\varphi}{2} = 4r\cdot\sin\frac{\varphi}{2} \quad (6)$$

Nun ist $\angle JKL = \frac{1}{2}\angle JGL = \frac{\varphi}{2}$

$JK = 2r$

daher $JL = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$

woraus folgt, dafs der Krümmungsmittelpunkt in T sich befindet, wenn $LT = 2JL$ ist.

Nun ist $JL^2 = JK \times JN = 2rx$

daher $JL = \sqrt{2rx}$

und $\varrho = LT = 2\sqrt{2rx}$ (7)

Die Abscisse x für den Scheitel ist $= 2r$, daher ist ϱ für $C = 4r = 2CD$. D. h. der Krümmungshalbmesser des Scheitels ist = der doppelten Axe, er liegt in der doppelten Verlängerung von CD.

Dies Resultat erhält man auch aus Formel 6; denn für C wird φ der gestreckte $\angle DQC$, also $\frac{\varphi}{2} = 90°$ und $\varphi = 4r$.

Für den Anfangspunkt A ist $\varphi = \angle AMA = 0$ und $x = 0$. Aus Formel 6 und 7 geht also hervor, dafs ϱ für $A = 0$ ist. D. h. Es existirt für A kein Krümmungskreis, und jeder mit noch so kleinem Halbmesser beschriebene Kreis würde mit dem ersten Element aufserhalb der Curve fallen.

7. Die Gleichungen für die Curve der Mittelpunkte oder die Evolute der C. erhält man durch eine Coordinatengleichung für den beliebigen Punkt T derselben.

Fällt man demnach das Loth TU auf AE, setzt $TU = u$, $AU = v$, so hat man

$\triangle RTU \sim \triangle LKN$

daher $\angle RTU = \angle LKN = \frac{\varphi}{2}$

Nun ist

$v = JT\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2rx}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$ (8)

$u = AJ + JT\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$

$= \text{Bogen } JL + JT\cos\frac{\varphi}{2}$

$= r\varphi + \sqrt{2rx}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$ (9)

Nun ist Gl. I. $x = r - r\cos\varphi$ hieraus wenn man mit $2r$ multiplicirt und radicirt

$\sqrt{2rx} = r\sqrt{2(1-\cos\varphi)} = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$

Diesen Werth in die Gleichungen 8 und 9 für u und v substituirt, entsteht

$v = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2} = r(1-\cos\varphi)$ (10)

und

$u = r\varphi + 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = r\varphi + r\sin\varphi$ (11)

Aus 10 ist $\cos\varphi = \frac{r-v}{r}$

Daher $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$

$= \sqrt{1-\left(\frac{r-v}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{2rv - v^2}}{r}$

und $\varphi = Arc\left(\cos = \frac{r-v}{r}\right)$

Diese Werthe in Gl. 11 substituirt gibt

$u = r\,Arc\left(\cos = \frac{r-v}{r}\right) + \sqrt{2rv - v^2}$ (12)

Setzt man in diese Gleichung x, für v so erhält man Gleichung 5. Die Evolute ist also eine mit der gegebenen C. congruente Cycloide; oder vielmehr sie besteht aus 2 halben Cycloiden, deren Scheitel in A und B liegen, deren gemeinschaftlicher Anfangspunkt W in der verlängerten Axe CD in

Entfernung $CD = 2r$ von AB liegt und deren Basis durch W mit der Basis AB ∔ läuft, in der Form, wie Fig. 543 punktirt angegeben ist.

8. Rectification der Cycloide. Setzt man Bogen $AL = s$ so ist nach pag. 191, rechts λ oder

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C$$

Nach No. 6 hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\frac{\varphi}{2}$$

$$\partial x = r \sin\varphi\, \partial\varphi$$

daher

$$s = r\int\sqrt{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}\cdot \sin\varphi\,\partial\varphi = r\int \sec\frac{\varphi}{2}\,\sin\varphi\,\partial\varphi$$

$$= r\int \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot 2\,\partial\frac{\varphi}{2} = 4r\int \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\partial\frac{\varphi}{2}$$

also $s = -4r\cos\frac{\varphi}{2} + C$

Für $\frac{\varphi}{2}=0$ wird $s=0$

folglich ist $0 = -4r + C$

woraus $C = +4r$ und man hat

$$AL = s = 4r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (13)$$

Für $\varphi = 180°$, also für $\frac{\varphi}{2} = 90°$ entsteht die halbe Cycloide $ALC = 4r$ d. h. die halbe Cycloide ist = der doppelten Axe.

Es ist $\angle JKL = \frac{\varphi}{2}$

also $KL = 2\cos\frac{\varphi}{2}$

daher ist Bogen $AL = s = 4r - 2\,KL$ und da die halbe Cycloide $= 4r$ ist, so ist der vom Scheitel C ab gemessene Bogen $CL = 2\,KL = 2CP$ d. h. die vom Scheitel ab gemessene C. ist = der doppelten Sehne des in der Axe befindlichen Erzeugungskreises, welche durch die Ordinate OL des Bogens abgeschnitten wird.

Es ist $KL^2 = KJ \times KN = 2r\cdot(2r-x)$

daher Bogen $CL = s' = 2\sqrt{2r(2r-x)}$

oder wenn man, wie No. 4, $CO = x'$ setzt

$$CL = s' = 2\sqrt{2rx'}$$

und der Bogen

$$AL = s = 2\left(2r - \sqrt{2r(2r-x)}\right)$$
$$= 2\left(2r - \sqrt{2rx'}\right)$$

9. Quadratur der Cycloide. Fällt man das Loth LV, so erhält man das Flächenstück ACV (nach pag. 192)

$$F = \int x\,\partial y$$

oder das Flächenstück

$$ALM = F' = \int y\,\partial x + C$$

Nun ist (Gl. 1) $y = r(\varphi - \sin\varphi)$

(No. 8) $\partial x = r\sin\varphi\,\partial\varphi$

folglich $F' = r^2\int(\varphi - \sin\varphi)\sin\varphi\,\partial\varphi$

$$= r^2\int\varphi\sin\varphi\,\partial\varphi - r^2\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi$$

Es ist

$$\int\varphi\sin\varphi = \varphi\int\sin\varphi - \int\left(\int\sin\varphi\,\partial\varphi\right)\partial\varphi$$
$$= -\varphi\cos\varphi - \int -\cos\varphi\,\partial\varphi$$
$$= -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi$$

$$\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi = \int\sin\varphi\cdot\sin\varphi\,\partial\varphi$$
$$= \sin\varphi\int\sin\varphi\,\partial\varphi - \int\left[\cos\varphi\,\partial\varphi\int\sin\varphi\,\partial\varphi\right]$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \int\cos^2\varphi\,\partial\varphi$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \int\partial\varphi - \int\sin^2\varphi\,\partial\varphi$$

hieraus

$$2\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi + \varphi$$

und $\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi$

Diese Werthe eingesetzt ergibt

$$F' = r^2\left[\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right] \qquad (14)$$

das Rechteck $AMLV$ ist $= x\cdot y = r^2(1-\cos\varphi)(\varphi - \sin\varphi)$

$$= r^2\left[-\sin\varphi - \varphi\cos\varphi + \varphi + \sin\varphi\cos\varphi\right] \qquad (15)$$

hiervon F' abgezogen gibt den Flächenraum

$$ALV = F = r^2\left[\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right] \qquad (16)$$

Für $\varphi = 0$ verschwindet die Fläche, also ist die Constante $= 0$.

Für $\varphi = 180° = \pi$ hat man das Rechteck $CDAE = 2\pi r^2$ = dem doppelten Erzeugungskreise (17)

die Fläche $AECLA$ (aus 14) $= \frac{1}{2}\pi r^2$ = dem halben Erzeugungskreise (18)

die Fläche $ADCLA$ (aus 15) $= \frac{3}{2}\pi r^2$ (19)

die ganze cycloidische Fläche $ACB = 3\pi r^2$ = dem 3fachen Erzeugungskreise (20)

die ganze äufsere Fläche $AEFBC\,1 = \pi r^2$ = dem Erzeugungskreise (21)

10. Um die Fläche CLO zu finden kann man von der Fläche CDA die Fläche $ACOD = ALV + OLVD$ abziehen.

Nun ist Fläche

$CDA = \frac{3}{2}\pi r^2$

$ALV = r^2[\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi]$

$$OLVD = x(r\pi - y) = r^2(1-\cos\varphi)(\pi-\varphi+\sin\varphi) = r^2[(\pi-\varphi)-(\pi-\varphi)\cos\varphi+\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi]$$

daher $ALV + OLVD = r^2[\pi + \frac{1}{2}\varphi - \sin\varphi - (\pi-\varphi)\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi]$

und Fläche $CLO = F'' = r^2[\frac{1}{2}(\pi-\varphi) + \sin\varphi + (\pi-\varphi)\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi]$

Setzt man $\pi - \varphi = \varphi^1$, so dafs das Flächenstück CLO von der Axe und dem Scheitel aus genommen wird, so hat man zugleich $\varphi = \pi - \varphi^1$ also $\cos\varphi = -\cos\varphi^1$ und $\sin\varphi = \sin\varphi^1$ und es ist Fläche

$$CLO = F'' = r^2[\tfrac{1}{2}\varphi^1 + \sin\varphi^1 - \varphi^1\cos\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\sin\varphi^1\cos\varphi^1] \qquad (22)$$

11. Die äufsere Fläche CZL ist $= \# CZLO - CLO$

$$\# CZLO = x^1 \cdot y^1 = (2r - x)(r\pi - y) = r^2(1+\cos\varphi)(\pi - \varphi + \sin\varphi)$$
$$= r^2[(\pi-\varphi) + (\pi-\varphi)\cos\varphi + \sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi]$$
$$= r^2[\varphi^1 - \varphi^1\cos\varphi^1 + \sin\varphi^1 - \sin\varphi^1\cos\varphi^1]$$

hiervon CLO (Formel 22) abgezogen bleibt Fläche $CZL = \frac{1}{2}r^2(\varphi^1 - \sin\varphi^1\cos\varphi^1)$ (23)

12. Zieht man durch den Mittelpunkt Q des in der Axe befindlichen Erzeugungskreises eine grade Linie QL ⫲ der Basis AD, fällt das Loth LV auf AD so ist

$$\varphi = \varphi^1 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Fig. 544.

Also $F = ALV$ (Formel 13)

$= (\frac{3}{4}\pi - 2)r^2$ (24)

$F'' = CLQ$ (Formel 22)

$= (\frac{1}{4}\pi + 1)r^2$ (25)

hierzu $\square\, LVDQ = r \cdot y^1$

$= (\frac{1}{2}\pi + 1)r^2$

gibt die halbe cycloidische Fläche $ACD = \frac{3}{2}\pi r^2$ (26)

13. Zieht man die Sehne CL so ist

$\triangle CLQ = \frac{1}{2}CQ \cdot QL = \frac{1}{2}ry^1 = \frac{1}{2}r^2(\pi - \varphi + \sin\varphi)$

hier ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

folglich ist $\triangle CLQ = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)r^2$

dies abgezogen von der Fläche CLQ (Formel 25)

bleibt Segment CLF über $CL = \frac{1}{2}r^2$ (27)

14. Halbirt man CQ in E, zieht EF ⫲ AD, so hat man $\cos\varphi^1 = \frac{1}{2}$

also $\varphi^1 = 60^\circ$

Mithin nach Formel 22

die Fläche $CEF = r^2[\frac{1}{2}\varphi^1 + \sin\varphi^1 - \frac{1}{2}\varphi^1 - \frac{1}{4}\sin\varphi^1) = \frac{3}{4}r^2\sin\varphi^1$

Zieht man nun DG

so ist $\triangle DEG = \frac{1}{2}DE \cdot EG = \frac{1}{4}r \cdot r\sin GQE = \frac{3}{4}r^2\sin\varphi^1$

Daher Fläche $CEF = \triangle DEG$ (28)

15. Die gewölbte Oberfläche, die der Bogen AL (Fig. 543) bei der Drehung um AM beschreibt, findet man aus der Formel (pag. 194, rechts)

$$F = 2\pi\int y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x + C$$

Nun ist $y = r(\varphi - \sin\varphi)$

Aus No. 8 hat man $\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\frac{\varphi}{2}$

$\partial x = r\sin\varphi\,\partial\varphi$

daher

$$F = 2\pi r^2\int(\varphi - \sin\varphi)\sqrt{1 + tg^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\sin\varphi \cdot \partial\varphi$$

woraus nach erforderlicher Umformung

$$F = 16\pi r^2\left[\int\frac{\varphi}{2}\,tg\,\frac{\varphi}{2}\,\partial\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \int\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\partial\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] + C$$

welches einen Ausdruck mit *logn* gibt und der von keinem practischen Nutzen ist. Eben so practisch unbrauchbar ist der Ausdruck für die Oberfläche bei der

Drehung um AV, wo in obiger Formel (für F) y mit x zu vertauschen ist.

16. Nimmt man dagegen die Axe CD der Cycloide zur Umdrehungsaxe, so hat man die Oberfläche durch die Umdrehung des Bogens CL um CO nach derselben Formel

$$F = 2\pi \int y' \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2}\, \partial x' + C$$

Nun ist

$$y' = \pi r - y = r(\pi - \varphi) + r \sin \varphi = r(\varphi' + \sin \varphi')$$

$$x' = r(1 - \cos \varphi')$$

hieraus
$$\frac{\partial y'}{\partial \varphi'} = r(1 + \cos \varphi')$$
$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} = r \sin \varphi'$$

also
$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{1 + \cos \varphi'}{\sin \varphi'}$$

und
$$\partial x' = r \sin \varphi' \cdot \partial \varphi'$$

folglich ist

$$F = 2\pi r^2 \int (\varphi' + \sin \varphi') \sqrt{1 + \left(\frac{1 + \cos \varphi'}{\sin \varphi'}\right)^2} \sin \varphi' \cdot \partial \varphi'$$

Nun ist
$$1 + \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^2 = \frac{2(1 + \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} = \frac{4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2 \varphi}$$

Also
$$F = 4\pi r^2 \int (\varphi' + \sin \varphi') \cos \frac{\varphi'}{2} \cdot \partial \varphi'$$

Um das Integral ganz durch $\frac{\varphi'}{2}$ auszudrücken, hat man

$$\varphi' + \sin \varphi' = 2 \frac{\varphi'}{2} + 2 \sin \frac{\varphi'}{2} \cdot \cos \frac{\varphi'}{2}$$

und
$$\partial \varphi = 2\, \partial \left(\frac{\varphi'}{2}\right)$$

Also wenn man zugleich α für $\frac{\varphi'}{2}$ schreibt

$$F = 16\pi r^2 \int (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cos \alpha \cdot \partial \alpha$$

Schreibt man das Integral in 2 Gliedern, also

$$\int \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \partial \alpha + \int \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \partial \alpha$$

so ist nach der allgemeinen Reductionsformel

$$\int \varphi x\, f x = \varphi x \int f x\, \partial x - \int \varphi' x \int f x\, \partial x$$

I. $\int \alpha \cos \alpha\, \partial \alpha = \alpha \int \cos \alpha\, \partial \alpha - \int \partial \alpha \int \cos \alpha\, \partial \alpha$
$= \alpha \sin \alpha - \int \sin \alpha\, \partial \alpha = \alpha \sin \alpha + \cos \alpha$

II. $\int \sin \alpha \cos^2 \alpha\, \partial \alpha$
$= \sin \alpha \int \cos^2 \alpha\, \partial \alpha - \int \partial \sin \alpha \int \cos^2 \alpha\, \partial \alpha$
$= \sin \alpha \int \cos^2 \alpha\, \partial \alpha - \int \cos \alpha \int \cos^2 \alpha\, \partial \alpha = A - B$

und
$$F = 16\pi r^2 (\text{I} + \text{II})$$

Nun ist $\int \cos^2 \alpha\, \partial \alpha = \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha)$

daher $A = \frac{1}{2} \sin \alpha (\sin \alpha \cos \alpha + \alpha)$

und $B = \frac{1}{2} \int \cos \alpha (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha)\, \partial \alpha$
$= \frac{1}{2} \int \sin \alpha \cos^2 \alpha\, \partial \alpha + \frac{1}{2} \int \alpha \cos \alpha\, \partial \alpha$
$= \frac{1}{2} \int \sin \alpha \cos^2 \alpha\, \partial \alpha + \frac{1}{2}(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$

Es ist also

$$\tfrac{1}{2} \int \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha\, \partial \alpha = B - \tfrac{1}{2}(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$$

und nach II. $\int \sin \alpha \cos^2 \alpha\, \partial \alpha = A - B$

folglich die beiden letzten Ausdrücke addirt

$$\tfrac{3}{2} \int \sin \alpha \cos^2 \alpha\, \partial \alpha = A - \tfrac{1}{2}(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$$

und

II. $\int \sin \alpha \cos^2 \alpha\, \partial \alpha = \frac{2}{3} A - \frac{1}{3}(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$

folglich

$$\text{I} + \text{II} = \alpha \sin \alpha + \cos \alpha + \tfrac{1}{3} \sin \alpha (\sin \alpha \cos \alpha + \alpha) - \tfrac{1}{3}(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$$
$$= \alpha \sin \alpha + \tfrac{2}{3} \cos \alpha + \tfrac{1}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Schreibt man nun wieder $\frac{\varphi'}{2}$ für α, so erhält man

$$F = 16\pi r^2 \left[\frac{\varphi'}{2} \sin \frac{\varphi'}{2} + \tfrac{2}{3} \cos \frac{\varphi'}{2} + \tfrac{1}{3} \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \cos \frac{\varphi'}{2} + C\right]$$

Für $\varphi = 0$ wird $F = 0$ folglich ist

$$0 = 16\pi r^2 (0 + \tfrac{2}{3} \cdot 1 + 0 + C)$$

also vollständig

$$F = 16\pi r^2 \left[\frac{\varphi'}{2} \sin \frac{\varphi'}{2} - \tfrac{2}{3}\left(1 - \cos \frac{\varphi'}{2}\right) + \tfrac{1}{3} \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \cos \frac{\varphi'}{2}\right] \qquad (29)$$

Für $\varphi' = 180° = \pi$ entsteht die gewölbte Oberfläche der ganzen Cycloide

$$= 16\pi r^2 \left[\frac{\pi}{2} - \tfrac{2}{3} + 0\right] = 8\pi r^2 (\pi - \tfrac{4}{3}) \qquad (30)$$

17. Dreht sich der Bogen AL um AV, so erhält man den dadurch erzeugten Umdrehungskörper aus der Formel pag. 195, links.

$$K = \pi\int x^2\,\partial y$$

Es ist
$$x = r(1-\cos\varphi)$$
$$y = r(\varphi-\sin\varphi)$$
woraus
$$\partial y = r(1-\cos\varphi)\,\partial\varphi$$

daher
$$K = \pi r^3\int(1-\cos^2\varphi)(1-\cos^2\varphi)\,\partial\varphi = \pi r^3\int(1-\cos\varphi)^3\,\partial\varphi$$
$$= \pi r^3\int(1-3\cos\varphi+3\cos^2\varphi-\cos^3\varphi)\,\partial\varphi$$
$$= \pi r^3\Big[\int\partial\varphi - 3\int\cos\varphi\,\partial\varphi + 3\int\cos^2\varphi\,\partial\varphi - \int\cos^3\varphi\,\partial\varphi\Big]$$

Nun ist
$$\int\partial\varphi = \varphi$$
$$\int\cos\varphi\,\partial\varphi = \sin\varphi$$
$$\int\cos^2\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}(\sin\varphi\cos\varphi+\varphi$$
$$\int\cos^3\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{3}\sin\varphi(\cos^2\varphi+2)$$

daher
$$K = \pi r^3[\varphi - 3\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi - \tfrac{2}{3}\sin\varphi]$$
$$= \pi r^3[\tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{11}{3}\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + C] \qquad (31)$$

Für $\varphi = 0$ wird $K = 0$, daher $C = 0$ der von der Fläche ACD durch Umdrehung um AD gebildete cycloidische Körper ist, wenn man π für φ setzt
$$= 5\pi^2 r^3 \qquad (32)$$

18. Dreht sich der Bogen LCD um die Axe CD so hat man
$$K' = \pi\int y'^2\,\partial y'$$

Setzt man aus No. 16 die Werthe von y' und $\partial x'$ in diese Formel, so erhält man

$$K' = \pi r^3\int(\varphi'+\sin\varphi')^2\sin\varphi'\,\partial\varphi' = \pi r^3\Big[\int\varphi'^2\sin\varphi' + 2\int\varphi'\sin^2\varphi' + \int\sin^3\varphi'\Big]\partial\varphi'$$

Nun ist nach der No. 16 citirten allgem. Reductionsformel (das Gestrichelte fortgelassen also $\varphi' = \varphi$ gesetzt)

I. $\int\varphi^2\sin\varphi\,\partial\varphi = -\varphi^2\cos\varphi + 2\int\varphi\cos\varphi\,\partial\varphi = -\varphi^2\cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi$

II. $\int\varphi\sin^2\varphi = \varphi\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi - \int\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi$

$$\tfrac{1}{2}\varphi(-\cos\varphi\sin\varphi+\varphi) - \tfrac{1}{2}\int(-\cos\varphi\sin\varphi-\varphi)\,\partial\varphi = A - B$$
$$B = -\tfrac{1}{4}\int\sin 2\varphi\,(\partial 2\varphi) + \tfrac{1}{2}\int\varphi\,\partial\varphi = +\tfrac{1}{8}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi^2$$

daher

II. $\int\varphi\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi(-\cos\varphi\sin\varphi+\varphi) + \tfrac{1}{8}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\varphi^2 - \tfrac{1}{4}\varphi\sin 2\varphi - \tfrac{1}{8}\cos 2\varphi$

III. $\int\sin^3\varphi\,\partial\varphi = \int\sin\varphi\sin^2\varphi\,\partial\varphi = \sin\varphi\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi - \int\cos\varphi\int\sin^2\varphi$
$$= -\tfrac{1}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi - \tfrac{2}{3}\cos\varphi$$

Hiernach
$$K' = \pi r^3[\tfrac{1}{2}\varphi^2(1-2\cos\varphi) + \tfrac{1}{2}\varphi(4\sin\varphi - \sin 2\varphi) + \tfrac{4}{3}\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{6}\sin\varphi\sin 2\varphi] + C$$
oder
$$K' = \pi r^3[\tfrac{1}{2}\varphi^2(1-2\cos\varphi) + \varphi\sin\varphi(2-\cos\varphi) + \tfrac{1}{3}\cos\varphi(4-\sin^2\varphi) + \tfrac{1}{4}(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi) - \tfrac{13}{12}] \qquad (33)$$

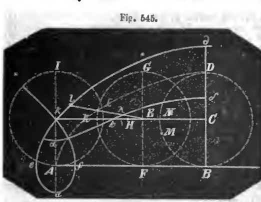
Für $\varphi = 0$ verschwindet der Körper daher $C = -(\tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{4}) = -\tfrac{13}{12}$ gesetzt worden ist.

Der von der Fläche ACD durch Umdrehung um die Axe CD gebildete cycloidalische Körper ist bei $\varphi = \pi$
$$K = \pi r^3[\tfrac{1}{2}\pi^2(1+2) + \tfrac{1}{3}(-1)\cdot 4 + \tfrac{1}{4}(-1) - \tfrac{13}{12}] = \pi r^3[\tfrac{3}{2}\pi^2 - \tfrac{8}{3}] \qquad (34)$$

Cycloide. Die gestreckte oder gedehnte und die verkürzte oder verschlungene Cycloide. Es sei BD der lothrechte Durchmesser des auf der geraden Linie AB sich wälzenden Kreises, C sein Mittelpunkt. Außerhalb und innerhalb CD seien an CD die beiden festen Punkte d, δ verbunden, so sind D, d, δ beschreibende Punkte zu drei Cycloiden; D der beschreibende Punkt für die gemeine C., d der für die verkürzte C. und δ der für die gestreckte C., und D, d, δ sind die Punkte dieser 3 C. in deren Axe.

Ist der Mittelpunkt des Kreises während seiner Wälzung nach E gekommen, FG sein lothrechter Durchmesser, so ist BF = dem Bogen BM, der von B ab auf

Fig. 545.



AB sich abgewälzt hat, so dafs *M* nach *F* gekommen ist, = dem Bogen *GL*, um welchen der Punkt *D* nach *A* hin fortgeschritten ist. Der Halbmesser *CD* befindet sich also jetzt in *EL*, nnd mit demselhen der Punkt *d* in *l* uud der Punkt *δ* in *λ*. Folglich sind *L*, *l* nnd *λ* Punkte der genannten 3 C.

Ist *BA* = der halben Peripherie des Kreises, so ist bei der halben Abwälznng desselben *D* nach *A* gekommen, der Halbmesser *CD* nach *kA* und mit demselben der Punkt *d* nach *a* und der Punkt *δ* nach *α*.

Ist *CH* = *kH* = dem Qnadrant *DN* des Erzengnngskreises und befindet sich dessen Mittelpnnkt in *H*, so liegt *CD* waagerecht; *D* liegt in *K*, *d* in *k* nnd *δ* in *x*.

Von hier ab kommt *CD* unterhalb *CK*, der Puukt *d* geht über den lothrechten Dnrchmesser *AJ* hinans, beschreibt den Bogen *kea* und die halbe verkürzte C. ist die Linie *dlkea*. Der zweite Bogen *afk* zwiachen *a* nnd *k* gehört schon zu derjenigen verkürzten C., welche entsteht wenn der Kreis von *A* ans in die Verlängerung von *BA* tritt; er bildet mit der ersten C. eine Schleife nud in *k* mit derselben einen Knoten *k*, weshalb diese C. auch die **verschlungene** C. genannt wird. Die gestreckte C. dagegen bleibt innerhalb *BD* und *AJ*, sie wird in der Nähe von *α* gegen *AB* convex und zwischen *α* und *x* hat sie einen Wendungspunkt.

Hier ist *k* genau in dem lothrechten Durchmesser *AJ*, also in dem Mittelpunkt des über *A* befindlichen Erzengnngskreises gezeichnet. Dies kann aber nur sein, wenn *Cd* = dem Quadrant *DN* ist. Für *Cd* > Bogen *DN* fällt *k* links von *AJ*, der Knoten oberhalb *Ck* und die Schleife wird gröfser; für *Cd* < Bogen *DN* fällt *k* rechts von *AJ*, der Knoten unterhalb *Ck* und die Schleife wird kleiner.

I. Die **verkürzte Cycloide**. Um diese C. zu nntersuchen ist bei derselben Bezeichnnng wie Fig. 545, *AB* die Basis der Cycloide, *CD* der Dnrchmesser des Erzengnngskreises in der Axe, *Q* dessen Mittelpunkt, daher *ALC* die gemeine Cycloide, *aelc* die verkürzte C.

Setzt man nnn für den Punkt *l*, $am = x$, $ml = y$, verlängert y bis o, setzt $co = x_1$, $ol = y_1$, zieht den Halbmesser Qp, setzt $\angle pQc = \varphi_1$ so gehören die Bogen *cl* und *CL* zu φ_1 und die Bogen *al*, *AL* zu dem $\angle lGi = \angle pQd = \varphi = \pi - \varphi_1$.

Fig. 546.

Nnn ist $x = lv = vn + ln = R + lG \cos\varphi_1 = R - R\cos\varphi$ (1)

$y = ml = AJ - vi = \text{Bogen } DP - Gn = r\varphi - R\sin\varphi$ (2)

$x_1 = oc = 2R - x = R + R\cos\varphi = R - R\cos\varphi_1$ (3)

$y_1 = ol = AD - y = \pi r - (r\varphi - R\sin\varphi) = (\pi - \varphi)r + R\sin\varphi = r\varphi_1 + R\sin\varphi_1$ (4)

hieraus ist wie ad 2.

$$\cos\varphi = \frac{R - x}{R};\ \cos\varphi_1 = \frac{R - x_1}{R}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{2Rx - x^2}}{R}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{2Rx_1 - x_1^2}}{R}$$

$$\varphi = Arc\left(\cos = \frac{R - x}{R}\right)$$

$$\varphi_1 = Arc\left(\cos = \frac{R - x_1}{R}\right)$$

$$y = r\,Arc\left(\cos\frac{R - x}{R}\right) - \sqrt{2Rx - x^2} \quad (5)$$

$$y_1 = r\,Arc\left(\cos\frac{R - x_1}{R}\right) + \sqrt{2Rx_1 - x_1^2} \quad (6)$$

2. Ans Gleichnng 2: $y = r\varphi - R\sin\varphi$ folgt, dafs für 2 Werthe von φ, $-y = 0$ wird.

A. Für $\varphi = 0$, wo der Erzengungskreis über A sich befindet und der Curvenpunkt a ist.

B. Für $r\varphi = R\sin\varphi$ oder für $\varphi = \frac{R}{r}\sin\varphi$, wo der Curvenpnnkt k ist.

Zwischen $\varphi = 0$ nnd $\varphi = \frac{R}{r}\sin\varphi$, wenn also $\varphi < \frac{R}{r}\sin\varphi$ ist, wird y negativ nnd es entsteht der Bogen aek.

Ist $x = R$, so liegt k in N, nnd nach Formel 1 ist zngleich

$$x = R - R\cos\varphi$$

Dies ist also nicht anders möglich als wenn $R\cos\varphi = 0$, also wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist, wenn also der Quadrant des Kreises abgewälzt ist.

Man hat also für diesen Fall

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{R}{r}\sin\tfrac{1}{2}\pi = \frac{R}{r}$$

oder $$R = \tfrac{1}{2}\pi r$$

d. h. R ist = dem Quadrant des Erzeugnngskreises wie schon No. 1 bemerkt ist.

Aus Formel 2:

$$y = r\varphi - R\sin\varphi$$

wird für $x = R$, also zugleich für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$$y = \tfrac{1}{2}\pi r - R$$

Ist also $R < \frac{1}{2}\pi r$, so ist y positiv, der Curvenpunkt liegt rechts von N, nach n hin, der Knoten k fällt nnterhalb der Mittellinie, die Schleife wird kleiner.

Ist $R > \frac{1}{2}\pi r$, so wird y negativ, der Curvenpnnkt fällt links von N, nach n' hin; k fällt oberhalb N, die Schleife wird gröfser.

Für $R = r$ entsteht die gemeine C., k fällt in A und die Schleife verschwindet.

3. Zur Construction der Tangente und der Normale hat man

ans Formel 1: $\frac{\partial x}{\partial\varphi} = R\sin\varphi$

ans Formel 2: $\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r - R\cos\varphi$

hieraus $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi}$ = der Tangente ($tg\,\alpha$) des $\angle\alpha$ den die Tangente in l mit der Linie am bildet, oder des $\angle$, den die Normale für l mit der Linie ab oder AB bildet. Die Construction ist einfach:

Zieht man nämlich pD so ist

$$Do = po\,tg\angle opD$$

Nun ist

$oQ = pQ\cos\varphi' = R\cos\varphi' = -R\cos\varphi$

folglich $Do = DQ + Qo = r - R\cos\varphi$

und da $po = R\sin\varphi' = R\sin\varphi$

so ist $r - R\cos\varphi = R\sin\varphi \cdot tg\angle opD$

worans $tg\angle opD = \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi}$

$\angle opD$ ist also $= \alpha$ nnd die mit pD gezogene Parallele lK die für l verlangte Normale.

4. Die Subtangente für den Punkt l (wie MS für L, Fig. 543) erhält man aus Formel 1, pag. 185

$$y : \frac{\partial y}{\partial x} = (r\varphi - R\sin\varphi) : \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi} = \frac{R\sin\varphi\,(r\varphi - R\sin\varphi)}{r - R\cos\varphi} \quad (7)$$

Die Tangente für l (LS für L Fig. 543) aus Formel 3, pag. 185

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r\varphi - R\sin\varphi}{r - R\cos\varphi}\sqrt{r^2 + R(R - 2r\cos\varphi)} \quad (8)$$

Die Subnormale für l (RM für L Fig. 543) ans Formel 4, pag. 185

$$y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = (r\varphi - R\sin\varphi)\frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi} \quad (3)$$

Die Normale für l (LR für L, Fig. 543) aus Formel 5, pag. 185

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r\varphi - R \sin\varphi}{R \sin\varphi} \sqrt{r^2 + R(R - 2r\cos\varphi)} \quad (10)$$

5. Die Länge des Krümmungshalbmesser in der Normale erhält man, nach pag. 188, Formel 9, wenn man wie im vor. Art. No. 6 verfährt:

Es ist
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi}$$
$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = R \sin w$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r - R\cos\varphi$$
also
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} = R\cos\varphi$$
und
$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = R\sin\varphi$$

daher
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{R\sin\varphi \cdot R\sin\varphi - (r - R\cos\varphi) R\cos\varphi}{R^3 \sin^3\varphi} = \frac{R - r\cos\varphi}{R^2\sin^3\varphi}$$

und
$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{R - r\cos\varphi}{R^2\sin^3\varphi}\right)} = \frac{(R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{R(R - r\cos\varphi)} \quad (11)$$

6. Aus No. 3 hat man für $\varphi = 0$,
$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha = \frac{r - R\cos o}{R\sin o} = \infty$$
mithin ist $\alpha = \angle lkA = 90^\circ$
und die Normale für a liegt in der lothrechten aN. Nun ist für $\varphi = 0$
$$\varrho = \frac{(R^2 + r^2 - 2rR)^{\frac{3}{2}}}{R(R-r)} = \frac{(R-r)^2}{R} \quad (12)$$

Der Punkt A hatte keinen Krümmungskreis, wohl aber der Punkt a, und da aus Formel 12
$$2R : R - r = R - r : \tfrac{1}{2}\varrho$$
so erhält man dessen Halbmesser, wenn man aus N mit $Na = R$ den Kreisbogen ag beschreibt, aus a mit $Aa = (R - r)$ den Bogen Ag zeichnet, das Loth gh fällt

Fig. 547.

und ah doppelt nimmt, wo dann $2ah$ der Halbmesser des Krümmungskreises ist.

Für $\varphi = \pi$ also für den Scheitelpunkt c, Fig. 546 wird
$$\varrho = \frac{(R^2 + r^2 + 2rR)^{\frac{3}{2}}}{R(R+r)} = \frac{(R+r)^2}{R}$$

und da mithin $2R : R + r = R + r : \frac{1}{2}\varrho$ so beschreibe aus c mit $cD = R + r$ den Bogen DS, fälle das Loth SU so ist cU der halbe Krümmungshalbmesser für den Scheitel c. Für $R = r$ wird $\varrho = 4r$, wie im vor. Art. No. 6 schon nachgewiesen worden. Schreibt man $R = r + k$ so erhält man
$$\varrho = \frac{(2r+k)^2}{r+k} = 4r + \frac{k^2}{r+k}$$
es ist also bei der verkürzten C. der Krümmungshalbmesser immer größer als bei der gemeinen C.

7. Man erhält aus Formel 2 für y
$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r - R\cos\varphi = 0$$
woraus für $-y$ als Maximum $\cos\varphi = \frac{r}{R}$.

Setzt man diesen Werth von φ in Formel 1, so erhält man
$$x = R - R \cdot \frac{r}{R} = R - r = aA$$

Es liegt mithin das Maximum von $-y$ immer in der Basis AB.

Nun hat man $-y = -r\varphi + R\sin\varphi$

Zeichnet man daher Fig. 547 aus N den Bogen ak, zieht NK, so ist $\angle aNK = \varphi$ dessen Einheitsbogen $= arc\left(\cos\frac{r}{R}\right)$ ist. Zeichnet man noch Bogen Aq, so ist $Aq = r\varphi$, $KA = R\sin\varphi$ und
$$-y = Ae = KA - \text{Bogen } Aq.$$

Daher liegt auch die Normale für e in der Basis AB, wie schon in No. 4 die Formel

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi} = \frac{r - R\cdot\frac{r}{R}}{R\sin\varphi} = 0 = tg\,\alpha$$

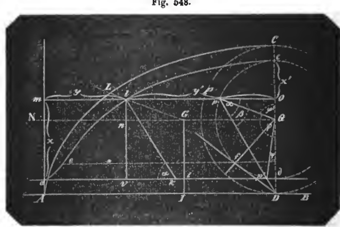
nachweist, indem $tg\,\alpha = 0$ und $\alpha = 0$ wird.

Den Krümmungshalbmesser für e erhält man aus Formel 11

$$\varrho = \frac{\left(R^2 + r^2 - 2Rr\cdot\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}{R\left(R - r\cdot\frac{r}{R}\right)} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

der Krümmungshalbmesser ϱ für den Punkt e ist also die Länge Ak.

Fig. 548.



II. Die gestreckte Cycloide. Bei derselben Bezeichnung wie Fig. 546 ist AB die Basis der gemeinen C., CD der Durchmesser des Erzeugungskreises in der Axe, Q dessen Mittelpunkt, ALC die Cycloide, alc die gestreckte C. Setzt man nun den Halbmesser QC des Erzeugungskreises $= r$, den Abstand cQ des beschreibenden Punkts c vom Mittelpunkt $Q = r_1$, setzt ferner, wie No. 1, für den Punkt l, $am = x$, $ml = y$, verlängert y bis o, setzt $co = x_1$, $ol = y_1$, zieht den Halbmesser QP, setzt $\angle PQC = \varphi_1$, so gehören die Bogen cl und CL zu φ_1, und die Bogen al und AL zu dem $\angle lGi = \angle PQD = \varphi = \pi - \varphi_1$ (vergl. verkürzte C. No. 1 bis 7).

Nun ist

$$x = lv = vn + ln = r_1 + lG\cos\varphi_1 = r_1 - r_1\cos\varphi \quad (1)$$

$$y = lm = AJ - vi = \text{Bogen } DP - Gn$$
$$= r\varphi - r_1\sin\varphi_1 = r\varphi - r_1\sin\varphi \quad (2)$$

$$x_1 = r_1 - r_1\cos\varphi_1 \quad (3)$$

$$y_1 = r\varphi_1 + r_1\sin\varphi_1 \quad (4)$$

hieraus ist

$$\cos\varphi = \frac{r_1 - x}{r_1};\ \cos\varphi_1 = \frac{r_1 - x_1}{r_1}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{2r_1x - x^2}}{r_1}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{2r_1x_1 - x_1^2}}{r_1}$$

$$\varphi = Arc\left(\cos = \frac{r_1 - x}{r_1}\right)$$

$$\varphi_1 = Arc\left(\cos = \frac{r_1 - x_1}{r_1}\right)$$

$$y = R\,arc\left(\cos = \frac{r_1 - x}{r_1}\right) - \sqrt{2r_1x - x^2} \quad (5)$$

$$y_1 = R\,arc\left(\cos = \frac{r_1 - x_1}{r_1}\right) + \sqrt{2r_1x_1 = x_1^2} \quad (6)$$

2. Gleichung 2 ist $y = r\varphi - r_1\sin\varphi$. Für $y = 0$ entsteht $\varphi = 0$ und $r_1\sin\varphi = r\varphi$. Nun ist aber $\sin\varphi$ immer kleiner als φ, also $r_1\sin\varphi < r_1\varphi$, also noch vielmehr $r_1\sin\varphi < r\varphi$. Es ist also $\sin\varphi = r\varphi$ nicht möglich und es existirt allein für $\varphi = 0$ und für das einzige $x = 0$ die Ordinate $= 0$ wie auch der Form der Curve entspricht. Eben so existirt kein negatives y weil $r_1\sin\varphi <$ bleibt als $r\varphi$.

3. Wenn man in No 3 r mit r_1 vertauscht, so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha = \frac{r - r_1\cos\varphi}{r_1\sin\varphi} \quad (7)$$

Zur Construction der Normale für l hat man nun

$$DQ = r,\ Qo = pQ\cos\varphi_1 = -r_1\cos\varphi$$

daher $Do = r - r_1 \cos\varphi$

$po = r_1 \sin\varphi$

$po \, tg \angle opD = Do = r - r_1 \cos\varphi$

folglich $tg\,\alpha = \frac{r - r_1 \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi} = tg \angle opD$

und $\angle opD = \alpha$

Zieht man daher durch l die mit pD parallele lk, so ist diese die Normale in l.

Da die Linie pD den Kreis cpd in noch einem Punkt p' schneidet, so existirt noch ein zweiter Punkt in der C., deren Normale mit pD und $lk \mp$ ist, und man erhält denselben, wenn man aus p' mit AB bis zur C. eine Parallele zieht. Jeder Punkt der C. von a bis c hat also noch einen ihm correspondirenden Punkt für parallele Normalen und folglich auch für parallele Tangenten.

Nur der Punkt der C. für den die aus D gezeichnete Linie den Kreis dpc berührt, hat eine Normale und eine Tangente, mit denen keine Normale und Tangente eines andern Punktes der C. $\mp$ läuft. Man erhält diesen Punkt e wenn man aus dem Berührungspunkt f von Df an dem Kreise dpc mit AB eine Parallele fe bis an die C. zieht.

Der Zusammenhang je zweier für parallele Ordinaten correspondirenden Punkte ist folgender:

Ist $\angle opD$ der Tangentenwinkel α für die Punkte p und p', $\angle pQd = \varphi$ der zu p gehörige, $\angle p'Qd = \psi$ der zu p' gehörige Wälzungswinkel, bezeichnet man ferner $\angle p'pQ = \angle pp'Q$ mit β, so hat man

$$\alpha - \beta = 90^\circ - \varphi' = \varphi - 90^\circ$$

woraus $\beta = 90^\circ + \alpha - \varphi$

auch ist $2\beta = 180^\circ - (\varphi - \psi)$

also $\beta = 90^\circ - \frac{\varphi - \psi}{2}$

beide Werthe für β gleich gesetzt, gibt

$$\alpha - \varphi = -\frac{\varphi - \psi}{2}$$

woraus $\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}$

Hat man also für den zu dem $\angle\varphi$ gehörenden Punkt l den $\angle\alpha$ gefunden, so erhält man $\psi = 2\alpha - \varphi$, und mit diesem $\angle$ den Punkt der C., der mit dem Punkt l parallele Normalen und Tangenten hat.

Für den Punkt e hat man $\alpha = \varphi = \psi$ und dieser $\angle$ findet sich aus $r \cos\varphi = r_1$, also $\varphi = arc\left(\cos = \frac{r_1}{r}\right)$

4. Aus Formel 2:

$$y = r\varphi - r_1 \sin\varphi$$

und Formel 7

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha = \frac{r - r_1 \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi}$$

erhält man wie No. 5 für die verkürzte C.

Die Subtangente für den Punkt l (wie MS für L, Fig. 543)

$$y : \frac{\partial y}{\partial x} = (r\varphi - r_1 \sin\varphi) : \frac{r - r_1 \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi} = \frac{r_1 \sin\varphi\,(r\varphi - r_1 \sin\varphi)}{r - r_1 \cos\varphi} \quad (8)$$

Die Tangente für l (wie LS für L, Fig. 543)

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r\varphi - r_1 \sin\varphi}{r - r_1 \cos\varphi} \sqrt{r^2 + r_1(r_1 - 2r\cos\varphi)} \quad (9)$$

Die Subnormale für l (wie RM für L, Fig. 543)

$$y \frac{\partial y}{\partial x} = (r\varphi - r_1 \sin\varphi) \frac{r - r_1 \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi} \quad (10)$$

Die Normale für l (wie LR für L, Fig. 543)

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r\varphi - r_1 \sin\varphi}{r_1 \sin\varphi} \sqrt{r^2 + r_1(r_1 - 2r\cos\varphi)} \quad (11)$$

5. Die Länge des Krümmungshalbmessers in der Normale bei demselben Verfahren wie No. 6, und bei Vertauschung von R mit r_1

$$\varrho = \frac{(r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{r_1(r_1 - r\cos\varphi)} \quad (12)$$

6. Auch hier liegt aus denselben Gründen wie No. 7 die Normale für den Punkt a in aN, die Länge von ϱ für a ist $\frac{(r_1 - r)^2}{r_1} = \frac{(r - r_1)^2}{r_1}$

Ist in beiden C. der verkürzten und der gestreckten $R - r = r - r_1$, d. h. ist in beiden der Abstand Cc gleich grofs $= k$, so ist ϱ für a bei der verkürzten C. kleiner als bei der gestreckten C. Beide ϱ verhalten sich wie $r_1 : R$ oder wie $r - k : r + k$.

Für den Scheitel c ist $\varrho = \frac{(r + r_1)^2}{r_1}$

Auch hier für c ist ϱ bei der verkürzten C kleiner als bei der gestreckten C.

die 3 Krümmungshalbmesser für die gemeine, die verkürzte und die gestreckte C. im Scheitel verhalten sich wie

$$4r : \frac{(r+R)^2}{R} : \frac{(r+r')^2}{r}$$

$$= 4r : 4r + \frac{k^2}{r+k} : 4r + \frac{k^2}{r-k}$$

15. Bei der verkürzten *C.* ist der Nenner in der Formel für $\varrho = R\,(R - r\cos\varphi)$. Da r immer $< R$, also $r\cos\varphi$ erst recht immer $< R$, so hat dieser Nenner stets einen positiven Werth.

Bei der gestreckten C. ist dies nicht der Fall: der Nenner ist $r'(r' - r\cos\varphi)$; es ist $r > r'$ und es kann der Nenner subtractiv werden. Mithin existiren Theile der C., welche gegen die Basis convex sind; der Punkt derselben für $r' = r\cos\varphi$ ist ein Wendungspunkt. Man sieht, dafs dieser Punkt der Punkt e ist, dessen Normale mit der keines anderen Punktes der C. ∦ läuft und der, wie am Schlufs von No. 3 angegeben, zu $\varphi = arc\left(\cos\frac{r'}{r}\right)$ gehört.

Cyclus, Cykel, Kreislauf, also ein immer wiederkehrender Lauf, auch ein Zeitlauf, oder ein Zeitabschnitt, in welchem bestimmte astronomische Erscheinungen in derselben Reihenfolge wiederkehren. In der Chronologie hat man hauptsächlich 2 Cykel, den Sonnen- und den Mondcykel.

Ersterer, der Sonnencykel begreift die Zeit, nach welcher jeder Wochentag wieder auf denselben Jahrestag fällt, z. B. der Sonntag immer wieder auf den 1, 8, 15... Januar, und so das Jahr und die übrigen Jahre hindurch wie in dem vorangegangenen Cykel. Da das Jahr aus 365 Tagen = $^{365}/_7 = 52^1/_7$ Wochen, also aus 52 Wochen und einem Tage besteht, so würde der Cykel einen Zeitraum von 7 Jahren umfassen, wenn nicht das je 4te Jahr als Schaltjahr einen Tag mehr hätte, woher der Sonnencykel aus $4 \times 7 = 28$ Jahren besteht.

Der Mondcykel begreift denjenigen Zeitraum, nach welchem die Mondphasen, als der Neumond, immer wieder auf denselben Jahrestag fallen wie in dem vorherigen C., und dieser begreift 19 Jahre. Denn ein synodischer Monat beträgt im Mittel 29 Tage $12^3/_4$ Stunden, das Jahr (das gemeine und das Schaltjahr zusammen) im Mittel $365^1/_4$ Tage, folglich hat man die Verhältnifszahl zwischen Dauer des Jahres und des Monats

$$= \frac{365 \text{ Tage } 6 \text{ Stunden}}{29 \text{ Tage } 12\tfrac{3}{4} \text{ Stunden}} = \frac{365{,}25}{29{,}53125} = \frac{3896}{315}.$$

Um dies Verhältnifs auf die kleinst möglichen und dem Verhältnifs möglichst nahe kommenden Zahlen zu bringen hat man den Bruch

$$= 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{16}\right)}}}}}.$$

Läfst man $^1/_{16}$ als unbedeutend fort, so hat man den Kettenbruch

$$= 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5}}} = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{7}} = 12 + \frac{7}{19} = \frac{235}{19}.$$

So dafs 19 Jahre oder 235 synodische Monate einen Mondcykel ausmachen. Die Differenz beider ist an Zeit sehr gering, denn es betragen 19 Jahre zu $365^1/_4$ Tage in Summe 6339 Tage 18 Stunden und 235 Monate zu 29 Tage $12^3/_4$ Stunden sind 6339 Tage und $20^1/_4$ Stunde, so dafs der Unterschied zwischen beiden nur $2^1/_2$ Stunde ausmacht.

So auch kann ein Zeitabschnitt von 4 Jahren, in welchen sich der Bruchtheil des Tages, um welchen die Erde mehr als 365 Tage um die Sonne sich bewegt und der auf 4 Jahre in 3 Gemeinjahren und einem Schaltjahr abgetheilt ist, ein C. genannt werden, weil abgesehen von der noch nicht vollständigen Ausgleichung der Zeit die Erde an jedem Tage der folgenden 4 Jahre wirklich oder die Sonne scheinbar in demselben Ort in der Ekliptik steht.

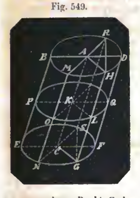
Cylinder ist ein Körper, der von 2 parallelen, gleich grofsen Kreisebenen und einer um diese befindlichen krummen Fläche begrenzt wird, die so beschaffen ist, dafs jede zwischen zweien Umfangspunkten beider Kreise und ∦ mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte derselben gezogene gerade Linie mit allen ihren Punkten innerhalb der krummen

Linie liegt. Die beiden begrenzenden Kreise heifsen Endkreise, Grundkreise des C., die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kreise heifst die Axe des C., die krumme Oberfläche der Mantel des C. Jede mit der Axe parallele Linie im Mantel heifst eine Seite des C. Steht die Axe auf den Grundkreisen normal, so heifst der C. ein gerader, steht sie geneigt gegen die Grundkreise, so heifst der C. ein schiefer C.

2. Führt man einen mit den Endkreisen parallelen Durchschnitt durch den Cylinder, so ist dieser ein den Endkreisen congruenter Kreis.

Denn es sei *BDEF* der Cylinder, *AC* dessen Axe, *POLQ* eine ǂ mit den Endkreisen genommene Durchschnittsebene, welche die Axe in *K* schneidet. Zieht

Fig. 549.



man nun aus einem Punkt *G* des Umfangs eines der Endkreise eine Parallele *GH* mit der Axe, so liegt diese zufolge der obigen Erklärung mit allen ihren Punkten in dem Mantel des C., und berührt also den zweiten Endkreis und den Durchschnitt in 2 Punkten *H*, *L*, die mit *G* in derselben geraden Linie liegen.

Verbindet man nun die 3 Axenpunkte mit den 3 Umfangspunkten zu den 3 geraden Linien *CG*, *AH*, *KL*, so liegen dieselben zwischen zwei Parallelen *AC* und *GH* also in einerlei Ebene (Eukl. Erkl. 35 und XI, 7), und da sie in 3 mit einander parallelen Ebenen liegen, so sind sie untereinander ǂ (Eukl. XI, 16); nun sind *AH* und *CG* als Halbmesser zweier gleicher Kreise einander gleich, folglich auch *KL* mit ihnen gleich. So läfst sich von jeder von *K* nach dem Umfang des Durchschnitts gezogenen graden Linie beweisen, dafs sie den gleichen Halbmessern der Endkreise gleich ist, folglich sind diese Linien Halbmesser und der Durchschnitt *POLQ* ist ein Kreis.

3. Führt man eine Ebene durch die Axe oder ǂ mit der Axe, so bildet der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Cylindermantel ein Parallelogramm.

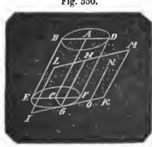
Denn es sei *MNRS* eine durch die Axe *AC* gelegte Ebene, so schneidet diese die beiden Endkreise in 2 geraden Linien *MR* und *NS* die beide in der Durchschnittsebene und zugleich in den parallelen Grundkreisen liegen, folglich einander ǂ und als Durchmesser gleicher Kreise auch einander gleich sind. Führt man nun durch die Endpunkte *N* und *S* des einen Durchmessers 2 gerade Linien ǂ der Axe, so liegen diese in der zu den graden Linien *AC* und *NS* gehörenden Ebene, d. h. in der durch die Axe gelegten Durchschnittsebene und schneidet den Durchmesser *MR* des zweiten Endkreises; da nun beide durch *N* und *S* ǂ *AC* gezogene Linien mit allen ihren Punkten in dem Cylindermantel liegen, so schneiden sie den Durchmesser *MR* in *M* und *R*, das Viereck *MNRS* ist der Durchschnitt der Ebene mit dem Cylinder und ist, da *MN* ǂ *RS* und *MR* ǂ *NS*, ein #.

Ist *HRGS* die ǂ *AC* geführte Durchschnittsebene, so liegen die beiden Durchschnittslinien *HR*, *GS* der Ebene mit den Endkreisen in der Durchschnittsebene und sind einander ǂ weil sie in den parallelen Endebenen liegen; durch *G* und *S* 2 mit *AC* parallele Linien geführt, schneiden die Linie *HR* und da sie gänzlich im Cylindermantel liegen, die *HR* in *H* und *R*. Nun war *HR* ǂ *GS*, *GH* ǂ *AC* ǂ *RS* folglich der Durchschnitt *GHRS* ein #.

4. Wird durch eine Tangente des Grundkreises eines Cylinders eine Ebene ǂ zu dessen Axe gelegt, so hat diese Ebene mit dem Cylindermantel nur eine gerade Linie gemein und ist eine Tangentialfläche des Cylinders.

Denn es sei *JK* eine Tangente in *G* an dem Grundkreise *EFG*, *JLMK* eine durch *JK* mit der Axe *AC* ǂ gelegte Ebene. Legt man nun durch *AC* und den Punkt *G* eine Ebene, so schneidet diese die Ebene *JKLM* in einer mit *AC* parallelen geraden Linie, folglich fallen beide durch *G* gehenden Durchschnittslinien in eine gerade Linie *GH* zusammen, welche sowohl dem Mantel als der Ebene *JKLM* angehört. Jede andere in der Ebene *JKLM* mit *AC* ǂ gezogene Linie, wie z. B. *NO* schneidet die Tan-

Fig. 550.

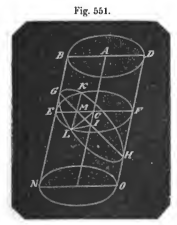


gente JK in einem anderen Punkt als G, den sie mit dem Grundkreise allein gemein hat, folglich liegt jede andere Linie innerhalb $JKML$ und $\dotplus AC$ aufserhalb des Cylindermantels und folglich hat die Ebene $JKLM$ nur die eine grade Linie GH mit dem Cylindermantel gemein und ist eine Tangentialfläche des Cylinders.

5. In jedem schiefen Cylinder gibt es aufser den mit den Endflächen parallelen Durchschnitten noch ein zweites System von parallelen Durchschnitten die mit dem Grundkreise congruente Kreise sind.

Es sei $BDNO$ ein schiefer C., AC seine Axe, die Ebene $BDNO$ durch die Axe und normal auf die Grundkreise gelegt. Zieht man nun in dieser Ebene die grade

Fig. 551.



Linie GH durch den Punkt J der Axe der Art, dafs $\angle GHD = \angle BDH$, dafs also die Linien GH und BD antiparallel sind, und führt durch GH eine auf die Ebene $BDNO$ normale Ebene, so ist deren Durchschnitt $GKHL$ mit dem Cylindermantel ein den Endkreisen congruenter Kreis.

Um dies nachzuweisen, lege man durch irgend einen Punkt z. B. L des Durchschnitts dieser Ebene mit dem Mantel einen den Endkreisen parallelen Kreis $EKFL$, dessen Mittelpunkt sei C, die in der Ebene $BDNO$ befindlichen Durchmesser EF und GH beider Kreise schneiden sich in dem Punkt M und beide Kreisebenen in der durch M gehenden graden Linie LK, welche normal der Ebene $BDNO$ ist, weil es beide Kreisebenen sind,

mithin ist $\angle LMF = \angle LMH = R$
ferner ist $\angle MJC = \angle MHD = \angle BDH$
da nun auch $\angle MCJ = \angle BDH$
so ist $\angle MCJ = \angle MJC$
daher $MC = MJ$

Zieht man also die Linien LC, LJ so sind die beiden bei M rechtwinkligen Dreiecke

$$\triangle LMC \cong \triangle LMJ$$

daher ist auch $LC = LJ$.

Nun ist LC der Halbmesser des Kreises $EKFL$ = dem Halbmesser der Grundkreise und JL ist gerade Verbindungslinie eines Mantelpunkts L mit dem Axenpunkt J, die beide in der Ebene $GKHL$ liegen. Da nun L in dem Umfang der letzten Ebene beliebig gewählt ist, so liegt auch jeder andere Punkt des Durchschnitts zwischen Mantel und Ebene $GKHL$ von dem Durchschnittspunkt J der Ebene mit der Axe um den Halbmesser des Grundkreises entfernt und folglich ist die Durchschnittsebene $GKHL$ ein den Endkreisen congruenter Kreis. Man nennt den Durchschnitt $GKHL$ einen **Wechselschnitt**.

6. In jedem anderen ebenen Durchschnitt des Mantels, der nicht parallel den Grundkreisen liegt oder ein Wechselschnitt ist, wird von dem Mantel **eine Ellipse** begrenzt.

Denn ist $\angle DHG$ nicht $= \angle BDH$ so ist auch MC nicht $= MJ$, CF nicht $= JH$ und der Durchmesser EF des Endkreises nicht gleich der Linie $2JG = GH$. Nun ist MK normal auf EF und normal auf GH. Es ist aber in dem Kreise $EKFL$

$$MK^2 = EM \times MF$$

da nun $\triangle MGE \sim \triangle MHF$
so ist $GM : MH = EM : MF$
also auch

$$GM + MH : GM = EM + MF : EM$$

oder $GH : EF = GM : EM$
und da auch $GH : EF = HM : FM$
so ist $GH^2 : EF^2 = GM \cdot HB : EM \cdot FM$

oder $GH^2 : EF^2 = GM \cdot HB : MK^2$

hieraus $MK^2 = GM \cdot HM \times \frac{EF^2}{GH^2}$

oder $MK^2 = GM \times (GH - GM) \times \frac{EF^2}{GH^2}$

Setzt man nun MK als lothrechte Ordinate $= y$, GM als Abscisse $= x$ so hat man die Gleichung

$$y^2 = \frac{EF^2}{GH} x - \frac{EF^2}{GH^2} x^2$$

welches die rechtwinklige Coordinatengleichung für die Ellipse ist.

Für $\angle JHF > \angle BDF$ wird JH die halbe kleine, $JL = CF = AD$ die halbe grofse Axe.

Für $\angle JHF < \angle BDF$ wird JH die halbe grofse, $JL = CF = AD$ die halbe kleine Axe.

Ist $BDON$ ein gerader C., so existirt kein Wechselschnitt und jeder andere els parallel mit den Endkreisen genommene ebene Schnitt durch den Mantel wird eine Ellipse.

7. Der gerade Cylindermantel ist = einem Rechteck, dessen Grundlinie = dem Umfange des Grundkreises und dessen Höhe = der Axe oder einer Seite des Cylinders ist. Ist r der Halbmesser des Grundkreises, h die Länge der Axe, so ist der Cylindermantel $= 2\pi rh$. Denn wenn man sich den Cylindermantel von einer beliebigen Seite aus in eine Ebene abgewickelt denkt, so entsteht das eben angegebene Rechteck.

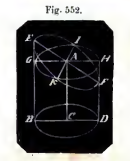
Diesen Satz beweist man ganz streng mit Hülfe der Grenzwerthe: Man beschreibe in dem Grundkreise und um denselben regelmäfsige Vielecke von gleich viel Seiten, von welchen die Ecken des inneren Vielecks auf die Mitten der Seiten des äufseren treffen, oder auch so belegen, dafs je 2 Seiten der beiden Vielecke einander ∦ sind, so ist die Summe der Seiten des inneren Vielecks kleiner und die Summe der Seiten des äufseren Vielecks gröfser als der Umfang des Grundkreises. Zieht man nun aus allen Ecken beider Vielecke Parallelen mit der Axe bis in die Ebene des zweiten Endkreises, verbindet in diesen die Durchschnittspunkte durch gerade Linien, so entstehen in dem zweiten Endkreise zwei den unteren congruente Vielecke; und legt man durch sämmtliche Seitenpaare Ebenen, so entstehen innerhalb und aufserhalb des Cylindermantels so viele Rechtecke als die Vielecke Seiten haben. Die inneren Rechtecke berühren mit ihren Seiten den Mantel, die äufseren sind Tangentialflächen des Mantels.

Die Summe der inneren Rechtecksflächen ist kleiner, die Summe der äufseren ist gröfser als der Cylindermantel. Durch beliebig wiederholte Verdoppelung der Vielecksseiten und der zu ihnen gehörigen Rechtecke wird die Summe der inneren Rechtecksflächen immer gröfser, die der äufseren immer kleiner und man kann deren summarische Gröfsen einander beliebig nahe bringen. Aber immer bleibt der Cylindermantel kleiner als die Summe der äufseren und gröfser als die Summe der inneren Rechtecksflächen, und da zugleich das Rechteck, dessen Grundlinie der Umfang des Grundkreises und dessen Höhe die Axe ist ebenfalls immer kleiner bleibt als die Summe der äufseren und gröfser als die Summe der inneren Rechtecke, so sind diese beiden eingeschlossenen Gröfsen: erstens das Rechteck vom Umfang der Grundfläche mal der Axe und zweitens der Cylindermantel einander gleich.

8. Der Mantel eines schief abgeschnittenen geraden Cylinders ist ebenfalls = dem Rechteck $2\pi rh$, wenn r der Halbmesser des Grundkreises und h die Höhe seiner Axe ist.

Denn ist $BDEF$ der abgekürzte Cylinder, dessen Grundkreis den Halbmesser $BC = r$ hat und dessen Axe $AC = h$ ist, und man legt durch den Endpunkt A der Axe eine Ebene $JGKH$ ∦ dem Grundkreise, ergänst den rechts befindlichen niedrigeren Theil des Mantels bis zur Durchschnittsebene $JGKH$ um das Stück $JHFK$ so schneidet der dem Grundkreise parallele Kreis $GJHK$ die den C. oben

Fig. 552.



begrenzende Ellipse $EJFK$ in der durch A liegenden geraden Linie JK. Nun ist die Fläche des abgekürzten Cylinders = der Cylinderfläche $GHBD$ + der Hufffläche $JKEG$ – der Hufffläche $JKFH$. Da aber beide Hufflächen von gleichen Höhen EG und FH und demnach gleich sind, so ist der Mantel des schief abgekürzten geraden C. = dem Mantel $GHBD = 2\pi rh$.

14*

9. Der Mantel eines schiefen C. ist gleich dem Rechteck dessen Grundlinie der Umfang des auf der Axe normal genommenen Ellipse und dessen Höhe die Axe ist. Denn legt man durch die Endpunkte der Axe *A*, *C*, Fig. 552, zwei normal auf *AC* befindliche Ebenen, so werden an beiden Enden 2 halbe Hufflächen gebildet, die einander gleich sind, und von welchen die eine fortgenommen und an dem anderen Ende angesetzt den C. zu einem Körper gestaltet, der zwei gleiche elliptische Grundebenen hat und deren Seiten normal darauf sind.

10. Die gesammte Oberfläche eines geraden Cylinders ist bei obiger Bezeichnung

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

also gleich einem Rechteck, dessen eine Seite der Umfang des Grundkreises und dessen andere Seite die Summe des Halbmessers und der Axe ist. Ist die Höhe des C. gleich dem Durchmesser des Grundkreises, so ist der Mantel $= 4\pi r^2$ gleich der Oberfläche einer Kugel von dem Halbmesser *r*, die also von dem Mantel in allen Punkten ihres gröfsten Kreises berührt wird. Die gesammte Oberfläche dieses Cylinders ist $6\pi r^2 = 1\frac{1}{2}$ mal der Oberfläche der Kugel, welche von dem Mantel und beiden Endflächen berührt wird.

11. Der körperliche Raum eines geraden Cylinders ist gleich dem eines Prisma, welches mit dem C. eine gleich grofse Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Denn construirt man in den Endflächen des Cylinders die Vielecke und verfährt weiter wie ad 7, so entstehen in dem C. und um denselben Prismen von gleich viel Seiten, von welchen das äufsere gröfser und das innere kleiner ist als der C. Durch beliebig wiederholte Verdoppelung der in den Endebenen befindlichen Vielecksseiten und mit diesen auch die der Prismenflächen kann man den Unterschied beider beliebig nahe bringen, so dafs derselbe kleiner werden kann als jede noch so klein gegebene körperliche Gröfse, Da nun zwischen den Vielecks-paaren der Endflächen beider Prismen die Grundkreise des Cylinders eingeschlossen sind, so ist auch zwischen beiden Prismen dasjenige Prisma eingeschlossen, dessen Grundebene der Grundkreis des C. und dessen Höhe die Axe des C. ist. Da nun auch der C. zwischen beiden Prismen eingeschlossen bleibt, so ist dieser C. dem eben genannten Prisma gleich.

Bezeichnet man den Halbmesser des Grundkreises mit *r*, die Höhe des C. mit *h*, so ist der körperliche Raum *K* des C. $= \pi r^2 h$. Ist $h = 2r$, so ist $K = 2\pi r^3$. Die von dem Cylinder umgrenzte Kugel ist $K' = \frac{4}{3}r^3\pi$ folglich verhalten sich Kugel und Cylinder wie 2 : 3.

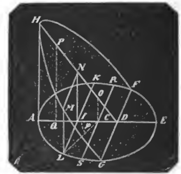
12. Der körperliche Raum *K* eines schief abgeschnittenen graden C. ist = dem Grundkreise mal der Axe $= \pi r^2 h$.

Denn construirt man Fig. 552 nach No. 8, so ist der Inhalt des schief abgeschnittenen C. = dem geraden Cylinder *GHBD* + dem Huf *JKEG* − dem Huf *JKFH*, und da beide Hufe einander gleich sind, *K* = dem Cylinder *GHBD* = Grundfläche *BD* × Axe $AC = \pi r^2 h$.

Der körperliche Raum *K* eines schiefen C. ist gleich dem Prisma, welches zur Grundfläche die auf der Axe normale Ellipse und zur Höhe dio Axe hat, wie aus No. 8 hervorgeht.

Cylindrischer Hufabschnitt ist das von einer durch den Mautel und den Grundkreis eines Cylinders gelegten Ebene *GHF* abgeschnittene, zwischen dieser Ebene und dem Grundkreise begriffene Stück *AFGH* des Cylinders. Der Theil *FAGH* des Cylindermantels zwischen dem Grundkreise und der Durchschnittsebene heifst die Huffläche.

Fig. 553.



Ist *FG* die gerade Linie, in welcher die Ebene den Grundkreis schneidet, so ist die durch deren Mitte *D* normale *AE* der Durchmesser des Grundkreises, welcher die gröfste Seite, die Höhe *AH* des Hufabschnitts trifft, $\angle HDA$ ist dessen Neigungswinkel und die Ebene *HAD* theilt den Hufabschnitt in 2 symmetrisch gleiche Theile. Die Durchnittsebene *HFG* kann auch durch den Endpunkt *E* des Durchmessers geführt werden. Trifft sie

den Mittelpunkt C, so wird der Huf auch in der Elementar-Stereometrie untersucht.

2. Um die Hufflächezu finden, nehme man ein beliebiges Stück AJ des Durchmessers AE, ziehe durch J die Linie $KL \# FG$, so ist die zu J gehörige Seite des Hufabschnitts LM und das zu AL gehörige Huffflächenstück $ALMH$. Errichtet man in J ein Loth auf dem Grundkreis, so trifft dieses die Mittellinie DH in N

und es ist $\quad LM = JN$

und $\quad JN : AH = DJ : DA \qquad (1)$

Setzt man nun den Halbmesser $AC = r$, die Länge AD des Hufes $= a$, dessen Höhe $AH = h$, die beliebige Seite $LM = y$, so ist nach der allgemeinen Quadraturformel, pag. 192, Zusatz, das Flächenstück $AHLM$ von der festen Seite $AH = h$ aus = der Ordinate LM mal dem Differenziel des Bogens AL

setzt man also $AL = v$

so ist $\quad AHLM = F = \int y \, \partial v$

Setzt man nun $CJ = x$

$\angle ACL = \varphi$

so ist, da $JN = LM = y$, aus der Proportion 1:

$y : h = (a - r) + x : a$

woraus

$$y = \frac{h}{a}(a - r + x) = \frac{h}{a}(a - r + r\cos\varphi) \quad (2)$$

$v = r\varphi$ und $\partial v = r\,\partial\varphi$

Es ist aber wenn man $\cos\varphi = s$ setzt

$$\partial\varphi = -\frac{\partial s}{\sqrt{1 - s^2}}$$

daher

$$F = -\int \frac{h}{a}\,\frac{a - r + rs}{\sqrt{1 - s^2}}\, r \cdot \partial s \quad (3)$$

$$= -\frac{hr}{a}(a - r)\frac{\partial s}{\sqrt{1 - s^2}} - \frac{hr^2}{a}\int \frac{s\partial s}{\sqrt{1 - s^2}}$$

$$= -\frac{hr}{a}(a - r)\, Arc\sin s + \frac{hr^2}{a}\sqrt{1 - ss}$$

Setzt man für s seinen Werth $\cos\varphi$, so erhält man

$$F = -\frac{hr}{a}(a - r)\, Arc(\sin = \cos\varphi) + \frac{hr^2}{a}\sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

$$= -\frac{hr}{a}(a - r)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{hr^2}{a}\sin\varphi + C$$

Für $\varphi = 0$ wird $F = 0$.

Man hat demnach

$$F = 0 = -\frac{hr}{a}(a - r)\frac{\pi}{2} + 0 + C$$

woraus

$$C = +\frac{hr}{a}(a - r)\frac{\pi}{2}$$

also vollständig

$$F = +\frac{hr}{a}(a - r)\varphi + \frac{hr^2}{a}\sin\varphi \quad (4)$$

Nun ist $r\varphi$ = Bogen AL

$\frac{h \cdot (a - r)}{a}$ ist das Loth CO

$r\sin\varphi$ ist $= JL$

und $\frac{hr}{a}$ ist das Loth QP

wenn $AQ = CJ$ genommen wird.

Das Flächenstück $AHML$ ist also = den beiden Rechtecken

$CO \times$ Bogen $AL + JL \times QP$

Für $r\cos\varphi = -(a - r)$, also für $\varphi = arc\left(\cos = -\frac{a - r}{r}\right)$ entsteht die ganze Hufflläche $AHLMG$

$$F = \frac{hr}{a}(a - r)\, arc\left(\cos = -\frac{a - r}{r}\right) + \frac{hr^2}{a}\sin arc\left(\cos = -\frac{a - r}{r}\right)$$

$$= \frac{hr}{a}(a - r)\, arc\left(\cos - \frac{a - r}{r}\right) + \frac{hr}{a}\sqrt{2ar - a^2}$$

= den beiden Rechtecken $CO \times$ Bogen $AG + QP \times DG$.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die halbe Huffläche $HAMLG$ aus 4

$$F' = \frac{hr}{a}(a - r)\frac{\pi}{2} + \frac{hr^2}{a} \quad (5)$$

also = den beiden Rechtecken $CO \times$ Bogen $AG + PQ \times AC$

3. Nimmt man in Formel 4 für F die Länge $a = r$, so erhält man die Hufflläche $AHLM$, wenn FG durch C in RS gelegt wird.

$F = hr\sin\varphi$

= dem Rechteck $JL \times AH \quad (6)$.

und wenn man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, die halbe Hufflläche von HA bis S

$F' = h \cdot r$

= dem Rechteck $AH \times AC$

= dem doppelten $\triangle AHC \quad (7)$

4. Das Körperstück zwischen der Höhe AH nnd der Ebene $MNJL$ erhält man nach der allgemeinen Cubaturformel

$$K = \int JL \times LM \cdot \partial AJ$$

Wenn man also $AJ = x$ setzt, so hat man

$$x = r - r\cos\varphi$$
$$\partial x = + r\sin\varphi\,\partial\varphi$$
$$JL = r\sin\varphi$$
$$LM = \frac{h}{a}\,DJ = \frac{h}{a}(a - x)$$

nnd

$$K = \int_0^{} r\sin\varphi \cdot \frac{h}{a}(a - r + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi\,\partial\varphi$$
$$= \frac{r^2h}{a}\int \sin^2\varphi\,(a - r + r\cos\varphi)\,\partial\varphi$$
$$= \frac{r^2h}{a}(a-r)\int_0^{} \sin^2\varphi\,\partial\varphi + \frac{r^3h}{a}\int_0^{} \sin^2\varphi\cos\varphi\,\partial\varphi$$

Nun ist $\int \sin^2\varphi\,\partial\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)$

$$\int \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \partial\varphi = \int \sin^2\varphi\,(\partial\sin\varphi) = \frac{1}{3}\sin^3\varphi$$

also vollständig, weil Const. = 0 wird

$$K = \frac{r^2h}{2a}(a-r)(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) + \frac{r^3h}{3a}\sin^3\varphi \qquad (8)$$

Für $r\cos\varphi = -(a - r)$, also für $\varphi = arc \cdot \left(\cos - \frac{a-r}{r}\right)$ entsteht der Körper

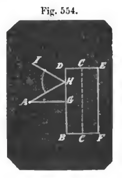
$$HAGD = \frac{r^2h}{2a}(a-r)\left[arc\left(\cos - \frac{a-r}{r}\right) - \frac{a-r}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{r}\right)^2}\right] + \frac{r^3h}{3a}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{r}\right)^2}\right)^3$$
$$= \frac{r^2h}{2a}(a-r)\,arc\left(\cos - \frac{a-r}{r}\right) - \frac{h}{2a}(a-r)^2\sqrt{2ar - a^2} + \frac{h}{3a}(2ar - a^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{r^2h}{2a}(a-r)\,arc\left(\cos = -\frac{a-r}{r}\right) + \frac{h}{6a}(10ar - 5a^2 - 3r^2)\sqrt{2ar - a^2} \qquad (9)$$

Setzt man $a = r$, so erhält man den körperlichen Raum des Hufabschnitts, wenn man die Ebene HGF durch SR führt, nnd es ist statt Formel 8 der Körper von AH bis $LMNJ = \frac{1}{3}r^2h\sin^3\varphi$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ entsteht der halbe Hufabschnitt von AH bis $SR = \frac{1}{3}r^2h$ (10) d. h. = derjenigen Pyramide, welche das Quadrat des Halbmessers zur Grnndfläche nnd die Höhe $AH = h$ zur Höhe hat.

Cylinderspiegel ist ein Spiegel mit cylindrischer Oberfläche. Die Gesetze der Spiegelung sind dieselben wie beim ebenen Spiegel, wenn man den Pnnkt, der einen Lichtstrahl aufnimmt als den Pnnkt einer den Spiegel tangirenden Ebene betrachtet.

Fig. 554.



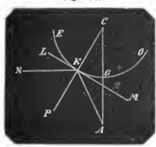
Es sei Fig. 554 der Dnrchschnitt eines C. durch die Axe CC, also BD eine Seite des C., so kehren diejenigen Lichtstrahlen in sich selbst znrück, die normal auf eine Seite des C. fallen. So z. B. tritt das Bild von A nach G in GA znrück; der Lichtstrahl AH dagegen reflectirt in die Linie HJ, wenn $\angle JHD = \angle BHA$.

Ist also A das Auge, so empfängt es in H das Bild von J, alle innerhalb des Winkels JHA begriffenen Gegenstände werden in der Linie GH gesehen, nnd die Gegenstände werden um so mehr verkleinert, je weiter sie innerhalb des $\angle JHA$ von DB zurückliegen.

Ist Fig. 555 ein normal anf die Axe CC genommene Querschnitt des C., so kehrt jeder Lichtstrahl in sich selbst zurück, der anf die Axe fällt; so kehrt der Strahl AG nach GA, der Strahl PK nach KP zurück. Der Strahl AK reflectirt nach KN wenn LM in K die Tangente an EKO nnd wenn $\angle LKN = \angle MKA$ ist. Ist A das Ange, so empfänpt es in K das Bild von N, nnd alle Gegenstände, die innerhalb des $\angle NKA$ liegen, werden auf dem Bogen GK abgebildet nnd um so mehr verkleinert, je weiter sie von dem C. zurück liegen.

Wenn man einen mit dem C. genau gleichen Holzcylinder abdreht, diesen mit Papier überzieht nnd daranf ein richtiges Bild zeichnet, so kann man mit Hülfe beliebig anzulegender Tangentialebenen

Fig. 555.



und Winkelabnahmen ein Zerrbild verzeichnen, welches in bestimmter Entfernung vor dem C. gehalten von diesem in dem verzeichneten richtigen Bilde zurückgeworfen wird.

Cylindroid heifst ein Körper, der 2 parallele congruente Grundebenen hat, deren Umfänge andere krumme Linien als Kreise sind, und um welche eben so ein Mantel von übrigens denselben Eigenschaften wie bei dem Cylinder gelegt wird.

Da man durch einen Cylinder parallele Durchschnittsebenen führen kann, welche Ellipsen sind, so kann man ein Cylindroid mit elliptischen Grundflächen in einen Cylinder verwandeln, wenn man in den Mittelpunkten der Endflächen durch die grofsen Axen Ebenen legt, welche Halbkreise werden und wenn man den abgeschnittenen halben Huf jeder Endfläche gegen den der anderen legt, oder wenn man jeden abgeschnittenen halben Huf um die grofse Axe um 180° herumdreht, wo er dann gegen den verbliebenen halben Grundkreis sich legt und das fehlende Stück der neuen Grundebene ergänzt.

D.

Dämmerung s. astronomische Dämmerung.

Dämmerungskreis s. astronomische Dämmerung.

Dampf ist ein Körper in dem Zustande der Luftförmigkeit, in welchen er aus dem flüssigen Zustande übergegangen ist ohne dafs er in seiner chemischen Beschaffenheit eine Aenderung erfahren hat. Die Ursache der Aenderung des Aggregatzustandes (s. d.) ist allein die Wärme, welche der Flüssigkeit zur Dampfbildung zugeführt werden mufs, so dafs Dampf nichts anderes ist als Flüssigkeit + Wärme.

Die Aenderung einer Flüssigkeit in Dampf geschieht unter allen Temperaturen und ein Minimum von Wärme, als zur Dampfbildung nothwendig, ist noch nicht ermittelt worden — auch Eis bei grofser Kälte verdampft —.

Der Dampf hat (bis auf eine Grenze der Compressionsfähigkeit, welche man permanenten Gasen noch nicht hat nachweisen können) alle Eigenschaften der Gase: Er ist durchsichtig, in einem Gefäfs eingeschlossen überall gleich dicht, gleich elastisch, er übt auf jedes gleich grofse Flächenstück der Wandung einen gleich grofsen Druck aus und hat somit das Bestreben der Ausdehnsamkeit, dessen Grenze noch nicht ermittelt ist.

2. Der Dampf ist also ein Produckt aus Flüssigkeit (F) und Wärme (W) und seine physikalischen Eigenschaften sind daher nur abhängig von der Natur der F aus der er entnommen ist, und hiernächst von den Mengen von F und von W, aus welchen er besteht.

Auf die Entwickelung des D haben aufserdem noch die mechanischen Wirkungen anderer Stoffe und Kräfte Einflufs, als besonders die atmosphärische Luft durch Druck und Bewegung. Nimmt man diese fremdartigen Einflüsse hinfort, setzt man z. B. über ein Gefäfs mit F eine Glocke, die mit ihren Rändern eintaucht, also hermetisch und man evacuirt, so ergeben sich folgende Erscheinungen:

Bei einem bestimmten thermometrischen Wärmegrade (T) hat der Dampf eine ganz bestimmte Dichtigkeit (D); d. h. ist v das Volumen der F in tropfbarem Zustande, welche in Dampfgestalt innerhalb der Glocke von dem Volumen V sich befindet, so ist $\frac{v}{V}$, die Dichtigkeit des Dampfes (die tropfbare F als Einheit genommen) constant.

Bei Vermehrung von T nimmt die Glocke mehr F als Dampf in sich auf, v, und mit v die Dichtigkeit $\frac{v}{V}$ des Dampfes wird gröfser und um so gröfser je gröfser man T werden läfst.

Da der Glockenraum die F zur Unterlage hat und der Dampf nur eine ganz bestimmte Menge v und nicht mehr aus der F entnimmt, so nennt man den Dampf gesättigt, man sagt: der Dampf ist in seinem gesättigten Zustande.

Erkältet man, d. h. läfst man T abnehmen, so kann der Dampf mit der verminderten W bei seiner Dichtigkeit nicht bestehen, er ist übersättigt und gibt so viel Dampf der F zurück bis er die der verminderten T entsprechende geringere Dichtigkeit, also seinen Sättigungszustand erreicht hat; und diese Zurückgabe des Dampfes an die F geschieht mit fortgesetzter Abkühlung successive bis die F in ihrer anfänglichen Quantität wieder hergestellt ist.

Hat man durch vermehrte W die F gänzlich verdampft und man vermehrt die W noch weiter, so würde der Glockenraum noch mehr F als Dampf in sich aufnehmen, wenn noch F vorhanden wäre: der Dampf ist ungesättigt und hat nicht die seiner T zugehörige gröfste Dichtigkeit.

3. Der Dampf hat das Bestreben sein Volumen zu vergröfsern, d. h sich auszudehnen und die Gröfse des Widerstandes, welcher diesem Bestreben das Gleichgewicht hält, heifst seine Spannung. Diese Spannung (S) bei derselben F ist abhängig von der T und der D des Dampfes, und zwar wächst die S bei Dampf von einerlei D mit der Vergröfserung von T und bei Dampf von einerlei T mit der Vermehrung der D, also wächst S überhaupt mit dem Wachsthum von $T \times D$.

Gesättigter Dampf hat bei einerlei T auch einerlei D und einerlei S. Vermehrt man T so nimmt der Dampf neue F in sich auf, seine D wird gröfser und hiermit auch seine S. Vermindert man T so schlägt ein Theil des Dampfes zu F nieder, seine D und mit D auch seine S wird vermindert.

Gesättigter Dampf mit F aufser Berührung gebracht und T vermehrt bleibt Dampf von derselben D, er wird ungesättigter Dampf und seine S wird vermehrt. Gesättigter Dampf hat also gegen ungesättigten von einerlei D die geringste S. Gesättigter Dampf mit F aufser Berührung gebracht und bei gleichbleibender T das Volumen (V) vermehrt wird ungesättigter Dampf von geringerer D und geringerer S und beides in dem Maafse geringer als V vermehrt wird.

Ungesättigter Dampf, also aufser Berührung mit F, bei gleichbleibender T das Volum vermindert erhält gröfsere D und gröfsere S. Die Compression bis zu der D des Sättigungszustandes fortgesetzt gibt das Maximum von D und von S: denn eine weitere Compression veranlafst, dafs der Dampf zum Theil zu F niedergeschlagen wird, so dafs die D und die S, welche dem gesättigten Dampfe bei der stattbabenden T zugehören, dieselben bleiben. Man kann die Compression bei gleichbleibender T so weit fortsetzen, dafs der Dampf gänzlich zu F wird, ohne dafs sich D und S bis dahin vermehren. Läfst man mit dem Druck nach, so wird die F wieder, und mit fortgesetzter Vermehrung des Raumes immer mehr und mehr derselben zu Dampf und zwar zu Dampf von derjenigen D und derjenigen S, welche der D und der S des Sättigungszustandes bei der gleichgebliebenen T zugehören. Gesättigter Dampf ist demnach in dem Zustande des Maximums seiner Spannung.

4. Der ungesättigte Dampf also, und nur dieser allein hat die Eigenschaften der Gase und für ihn gelten dieselben Gesetze, welche in den Art.: „Ausflufs der Luft“ und „aerostatische Gesetze“ vorgetragen sind. Da nun für diese Dämpfe eine niedrigere T gehört, um den Sättigungspunkt und das Maximum der Spannung zu erreichen, so betrachtet man ganz richtig die Gase als Dämpfe, die unterhalb des Maximums der Dichtigkeit sich befinden, und welches sie erst bei einer so niedrigen Temperatur erreichen, welche bis jetzt noch nicht hat hervorgebracht werden können.

Die Ansicht hat auch Erfahrungen für sich. Denn wenngleich alle Gase, wie die atmosphärische Luft für permanent-expansibel gegolten haben, so sind doch im J. 1823 von Faraday Gase unter niedriger Temperatur und mit hohem Druck zu tropfbaren Flüssigkeiten comprimirt worden. Z. B. kohlensaures Gas bei 0° C. mit einem Druck von 36 Atmosphären. Erwägt man nun, dafs bei jeder Compression Wärme frei wird, die doch nur in dem comprimirten Körper vorhanden gewesen sein kann, die sich in dem kleineren Raum gesammelt hat und hinaustritt oder hinausgetrieben wird, so kann man annehmen, dafs solche Gase immer nur sehr geringe, in Graden nicht anzugebende Wärmemengen bedürfen, um aus dem tropfbar flüssigen Zustand in den luftförmigen überzugeben und darin zu verbleiben, während andere Stoffe bei wahrnehmbaren also höheren Wärmegraden zu Dampf werden. So verschieden die Wärmemengen bei Verdampfung verschiedener Stoffe unter einerlei Druck, als Wasser, Weingeist, Quecksilber uns bekannt sind, so verschieden hat man sich denn auch die Temperaturen bei Dampfwerdung dieser Gase aus Flüssigkeiten zu denken und so könnten der atmosphärischen Luft und dem Sauerstoff so niedrige Wärmegrade entsprechen, bei welchen sie tropfbar flüssig erscheinen müssen.

Für die Nichtannahme dieser Hypothese kann man Dampf von Gas unterscheiden und sagen: dem Dampfe liegt eine Flüssigkeit als Normalzustand des Körpers zum Grunde aus dem er durch Einflufs

von Wärme zu Dampf geworden ist. Das Gas dagegen ist als luftförmiger Körper in seinem Normalzustand und wird aus diesem entweder gar nicht oder nur durch starkes Zusammendrücken zur Flüssigkeit verändert.

5. Dampf mit Flüssigkeit von einer Temperatur besitzt eine bedeutende Wärmemenge, welche thermometrisch nicht wirkt, welche also von dem Stoff zur Bildung der Dampfform aus der Flüssigkeit chemisch gebunden (verschluckt, absorbirt) wird und daher **gebundene oder latente Wärme** heifst. Bei dem Wasserdampf beträgt sie im Mittel 550°C., so dafs Dampf von 100° C., welche das Thermometer anzeigt, eine Wärmemenge von 550° + 100° = 650° wirklich enthält.

Früher wurde aus Versuchen abstrahirt, dafs bei einerlei Stoff die latente Wärme in allen Temperaturen in gleicher Menge vorhanden sei, so dafs Wasserdampf von 200° C. thermometrischer Wärme 200° + 550° = 750°, Dampf von 300° C., 300° + 550° = 850° Wärme enthalten sollte.

. Nach den Versuchen von Scharpe, von Clément und Desormes befindet sich in dem Dampf eines jeden flüssigen Stoffs eine unabhängig von seiner Temperatur bestimmte Wärmemenge, von welcher derjenige Theil den das Thermometer nicht anzeigt, latent ist. Die Gesammtwärme im Wasserdampf z. B. ist 650°C., demnach hat

Dampf von	0° C.	Therm. =	650°	latente W,
„ „	100° C.	„ =	550°	„ „
„ „	500° C.	„ =	150°	„ „
„ „	650° C.	„ =	0°	„ „

Wenn nun die latente Wärme Characteristik von Dampf ist, so kann Wasserdampf von 650° C. kein Dampf mehr sein, er kann also nur Wasser sein, oder was vielleicht dasselbe ist, der Dampf mufs die Dichtigkeit des Wassers haben, und es wäre diese Dichtigkeit auch vernunftgemäfs das Maximum der möglichen Dichtigkeit eines Dampfes, nämlich die Dichtigkeit der ihm zu Grunde liegenden Flüssigkeit.

Dampf von – 50° C. hätte nach Obigem 700° C. Wärmemenge und man hat hierbei zu erwägen, dafs die Wärme nicht mit dem thermometrischen 0° beginnt, dafs also obige 650° summarische Wärmemenge diejenige ist, welche das Thermometer von 0° ab mifst, und dafs nach einem Thermometer, welches die Grade bei – 50° C von 0° anfinge, (Fehrenheit) die Wärmemenge im Wasserdampf wirklich mit 700° ausgesprochen werden würde.

Ferner ist ermittelt, dafs die Mengen der latenten Wärme in verschiedenartigen Dämpfen in umgekehrtem Verhältnifs stehen mit deren Dichtigkeiten (diese auf einerlei Gewichtseinheit bezogen), also in umgekehrtem Verhältnifs mit den absoluten Gewichten gleicher Quantitäten Dämpfe bei einerlei Temperatur und derselben Spannung. So z. B. verhalten sich die Dichtigkeiten des Wasser- und des Alkoholdampfes wie 100 : 258 und die Mengen der latenten Wärme sind gefunden worden 550 und 214, welche das Verhältnifs 257 : 100 ergeben.

6. Die Wärme erscheint demnach in dem Dampf mit 2 entgegengesetzten Wirkungen, als positiv und als negativ, oder als anziehende und als abstofsende Kraft. Erstere ist die latente Wärme, welche dem Dampf verbleiben will; letztere die thermometrische, die freie W., die Temperatur als diejenige Kraft, mit welcher die W den Dampf verlassen will. Man könnte sich den Erscheinungen nach auch denken, dafs in dem Dampf 2 Wärmestoffe sich befinden, der latente und der thermometrische, die in gleichen Quantitäten sich neutralisiren: Kommt thermometrische W hinzu (geschieht Erwärmung), so wird diese von der im Dampf befindlichen latenten W angezogen und diese wiederum läfst nun eben so viel der von ihr bis dahin gebunden gewesenen thermometrischen W los, die nun frei wird und als Temperatur erscheint.

7. Jede Flüssigkeit, welcher unter einem bestimmten Luftdruck Wärme zugeführt wird, kommt endlich unter stärkerer Ausströmung von Dampf in Wallung, d. i. in siedenden Zustand, und dies geschieht mit dem Wärmegrade, bei welchem der Dampf die Spannung hat, welche dem Luftdruck das Gleichgewicht hält. Auf sehr hohen Bergen kocht die Flüssigkeit bei einer geringeren Temperatur als am Meeresspiegel, weil dort der Luftdruck geringer ist und weil Dampf von geringerer Temperatur genügt um dem geringeren Luftdruck das Gleichgewicht zu halten.

Bei einem mittleren Druck der Atmosphäre von 0,76 ᵐ Barometerstand nimmt das Wasser diejenige Temperatur an, die man mit 100° Celsius bezeichnet, folglich hat Wasserdampf von 100° C. die Spannung der atmosphärischen Luft von 0,76 ᵐ Quecksilbersäule, oder eine Atmosphäre Druckkraft oder von 14 Zollpfund auf den preufsischen □Zoll Grundfläche.

Die Spannungen der Dämpfe wachsen in einem weit höheren Maafse als die an

denselben gehörigen Temperaturen. Bei der Vermehrung der Temperatur von 100° um $21\frac{1}{2}$° also um etwa $\frac{1}{5}$ wird die Spannung das Doppelte von der bei 100° C., sie ist bei $121\frac{4}{7}$° C. = 2 Atmosphären = 28 Zollpfund auf den □″ Grundfläche; bei $145\frac{4}{7}$° C. schon 4 Atmosphären, bei 172° C. = 8 Atmosphären, bei $203\frac{1}{4}$° C. = 16 Atmosphären u. s. w. und in Verhältnissen, die diesen mehr und weniger nahe kommen, wachsen die Spannungen der Dämpfe anderer Flüssigkeiten ebenfalls.

8. Zwischen dem luftförmigen und dem flüssigen Zustand liegt noch ein Mittelzustand, nämlich der in welchem der Körper noch flüssig ist und doch luftförmig zu sein scheint, indem er in die Atmosphäre sichtbar aufsteigt. Besonders wahrnehmbar ist dies bei dem Wasser, welches als sogenannter Wrasen von der Oberfläche erhitzten Wassers sich in die Luft erhebt; ferner bei den Nebeln, Wolken und anderen Dünsten.

Man kann diesen Zustand sich erklären indem man annimmt, dafs jedes Molekül eine Blase bildet, die aus einem Luftkern besteht, der wärmer und also leichter ist als die umliegende Atmosphäre und der von einer sehr dünnen tropfbar flüssigen Wandung eingeschlossen wird. Das Wasser in diesem Zustande heifst Wasserrauch, Wasserdunst.

9. Wasserdampf.
Der Wasserdampf ist unter den Dämpfen anderer Stoffe am sorgfältigsten untersucht worden und es sind diese Untersuchungen auch äufserst wichtig: Für Dämpfe unter dem gewöhnlichen Siedepunkt für wissenschaftliche Zwecke, für Dämpfe über dem Siedepunkt für gewerbliche Zwecke.

In Betreff der ersteren sind von der Physik und der Chemie Untersuchungen über die Dichtigkeit und die Elasticität der Dämpfe angestellt worden; in Betreff der letzteren hat die Gefahr der Dampfkessel-Explosionen in allen gewerbreichen Ländern Versuche und Beobachtungen darüber veranlafst und unter diesen sind die wichtigsten die auf Veranlassung der französischen Regierung von Arago, Dulong, Girard und de Prony i. J. 1830 beendigten Versuche, und die auf Dampf von 100° C. Temperatur mit 1 Atmosphäre Spannung bis zu Dampf von 224° C. Temperatur mit 24 Atmosphären Spannung sich erstreckt haben. Hierbei ist zu bemerken, dafs an 2 Thermometern beobachtet wurde, die um kleine Längen differirten (bei dem zuletzt angeführten Versuch um 0,27° C.), und dafs die jedesmalige Spannung der Dämpfe an einer Quecksilbersäule abgelesen wurde, die dann zu Druck in Atmosphären (bei dem letzgedachten Versuch in 23,994 Atmosphären) durch Berechnung ermittelt werden konnte.

Dies zum Verständnifs, dafs es darauf ankam, den Zusammenhang der Temperaturen mit den Spannungen auch für die Fälle zu ermitteln, die zwischen den angestellten Beobachtungen liegen und es sind mit Hülfe einer Reihenfolge von Versuchen und gröfstentheils durch Differenzenrechnung Formeln ermittelt worden, bei deren Anwendung die berechneten Resultate den gemachten Erfahrungen sehr nahe kommen, so dafs man auch auf die nahe Richtigkeit der Zwischenfälle schliefsen kann.

10. Es sind mehrere dieser Formeln zur Anwendung gekommen, die nur auf eine zwischen Grenzen eingeschlossene Reihe von niederen oder hohen Temperaturen annähernd richtige Resultate liefern, aufser dieser Reihe aber von den durch Erfahrung ermittelten Elasticitätsgröfsen bedeutend abweichen; als
die Formel von Kämtz:

$$\log E = 2{,}5263393 - 0{,}01907612588\, t - 0{,}00010296015\, t^2 - 0{,}0000004731\, t^3$$

wo E die zur Temperatur t gehörende Elasticität (Spannung) des Dampfes in pariser Zoll Quecksilberhöhe und t in Graden Réaumur bedeutet, wo bei Graden unter 80° R. t positiv, über 80° t negativ genommen wird.

Diese Formel ergab nun für t über 80° erweislich sehr unrichtige Resultate und Kämtz änderte sie in die folgende:

$$\log E = 2{,}5263393 - 0{,}01950230219\, t - 0{,}00007404868\, t^2 + 0{,}0000066252\, t^3 + 0{,}0000000399\, t^4$$

womit aber die höheren Temperaturen mit den französischen Versuchen noch nicht genau übereinstimmen.

Die Formel von Dulong

$$E = (1 + 0{,}7153 \cdot t)^5$$

die ferner corrigirt worden ist in

$$E = (1 + 0{,}719 \cdot t)^{4{,}9987}$$

wo E die Elasticität in Atmosphären zu $0{,}76^m$ Quecksilbersäule und t die Temperatur über 100° C. bedeutet, so aber dafs bei einer Temperatur von 150° C. für $t = 0{,}50$ zu setzen ist, stimmt nach dem Zeugnifs der Akademiker am genauesten von 4 Atmosphären Spannung aufwärts gerechnet.

Die Formel, welche Egen mit der Zusammenstellung der Resultate aus den

oben gedachten pariser Versuchen durch Differenzenrechnung ermittelt hat ist
$t = 100 + 64,29512 \log E + 13,89479 \log^2 E + 2,909769 \log^3 E + 0,1742634 \log^4 E$
E in Atmosphären und t in Centesimalgraden verstanden.

11. Die Temperatur, bei welcher das Wasser siedet, ist von dem Luftdruck allein abhängig und der Wärmegrad von 100° C. dabei, rührt allein her von dem Luftdruck = 0,76^m Quecksilbersäule. Da also der Siedepunkt theoretisch betrachtet willkührlich zu setzen ist, so gibt es für die Dämpfe unter und über dem Siedepunkt keine in der Natur begründete Scheide, und aus diesem Grunde wird behauptet, dafs eine einzige Formel zu Auffindung der Elasticität von Dampf für alle Temperaturen ohne Ausnahme aufzufinden sein müsse.

Der Schlufs ist ganz richtig unter der Bedingung, dafs die Natur keine hindernden Elemente hinzutreten läfst. Allein in dem Art. „Ausdehnung" ist nachgewiesen, dafs das Wasser gegen Stoffe ähnlicher Art, d. h. gegen Stoffe, die mit dem Wasser dieselben physikalischen Eigenschaften haben, in Hinsicht auf Erscheinungen die nach allgemein geltenden Regeln abstrahirt werden könnten, Abweichungen zeigt, und es ist leicht möglich, dafs dies auch beim Wasser in Dampfform statt findet. Aus diesem Grunde halte ich auch die auf Formeln gegründeten Berechnungen von Elasticitäten von Dämpfen, deren Temperatur über den oben gedachten äufsersten Versuch von 224° C. liegen für unzuverlässig.

12. Es folgt nun zunächst eine Tabelle des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Elasticität des Wasserdampfes aus wirklichen Beobachtungen ermittelt, welche dazu dienen soll, die in den nachfolgenden Tabellen aus Formeln berechneten Elasticitäten bei gegebenen Temperaturen prüfen zu können. Die hier angegebenen Beobachtungen sind gröfstentheils mit Thermometern nach Réaum. gescheben und die Elasticitäten in pariser Zoll Quecksilbersäule gemessen worden. Die No. 9 gedachten Versuche der pariser Academie sind mit Thermomstern nach Celsius geschehen und die Elasticitäten in Millimeter Quecksilberhöhe gemessen worden. Jede Beobachtung gibt die Tabelle in allen 4 Maafsen; und zwar ist gerechnet:

1 par. Zoll = 27,06995 Millimeter
1 Millimeter = 0,0369413 par. Zoll.
1° C. = 0,8° R. und 1° R. = 1,25° C.

Tabelle

des Zusammenhangs der Elasticitäten des Wasserdampfs bei verschiedenen Temperaturen desselben. Nach Beobachtungen.

Temperatur		Elasticität in		Beobachter
– C.°	– R.°	Millim.	par. Zoll	
30,350	24,280	0,271	0,010	Regnault
18,750	15,000	2,436	0,090	„
16,800	13,440	1,083	0,040	„
12,500	10,000	2,436	0,090	Muncke
7,550	6,040	24,363	0,900	Regnault
6,612	5,290	2,734	0,101	Magnus
6,250	5,000	3,411	0,126	Muncke
5,312	4,250	2,731	1,109	Magnus
4,362	3,490	3,248	0,120	Regnault
4,451	3,560	4,277	0,158	Ure
3,637	2,910	3,519	0,130	Magnus
0,000	0,000	0,000	0,000	Robison
—	—	0,000	0,000	Schmidt
—	—	5,289	0,188	Dalton
—	—	4,060	0,150	Southern
—	—	5,062	0,187	Ure
—	—	4,602	0,170	Muncke
—	—	4,602	0,170	Magnus
—	—	4,602	0,170	Regnault

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
3,750	3,000	0,000	0,000	Bétancourt
4,450	3,560	2,545	0,094	Robison
—	—	6,334	0,234	Ure
5,000	4,000	0,541	0,020	Bétancourt
—	—	6,497	0,240	Regnault
5,562	4,450	5,847	0,216	Southern
6,250	5,000	0,541	0,020	Bétancourt
—	—	2,978	0,110	Schmidt
—	—	7,525	0,278	Dalton
—	—	7,471	0,276	Muncke
7,500	6,000	1,353	0,050	Bétancourt
—	—	4,060	0,150	Schmidt
8,050	6,440	8,121	0,300	Magnus
8,750	7,000	1,895	0,070	Bétancourt
9,000	7,200	8,392	0,310	Regnault
9,700	7,760	8,933	0,330	"
10,000	8,000	2,707	0,100	Bétancourt
10,012	8,010	5,089	0,188	Robison
—	—	9,123	0,337	Ure
11,125	8,900	8,879	0,328	Southern
11,250	9,000	3,248	0,120	Bétancourt
11,490	9,192	10,016	0,370	Regnault
11,980	9,584	10,016	0,370	Magnus
12,340	9,872	10,557	0,390	Regnault
12,500	10,000	4,060	0,150	Magnus
—	—	4,060	0,150	Bétancourt
—	—	7,580	0,280	Schmidt
—	—	11,072	0,409	Dalton
—	—	12,100	0,447	Muncke
12,750	10,200	10,828	0,400	Regnault
12,775	10,220	3,790	0,140	Watt
12,800	10,240	10,557	0,390	Ure
13,600	10,880	12,452	0,460	Regnault
13,750	11,000	4,873	0,180	Bétancourt
15,000	12,000	5,955	0,220	"
—	—	10,287	0,380	Schmidt
15,560	12,448	13,264	0,490	Regnault
15,575	12,460	8,879	0,328	Robisou
—	—	13,102	0,484	Ure
16,250	13,000	7,309	0,270	Bétancourt
—	—	11,911	0,440	Schmidt
16,688	13,350	13,210	0,488	Sonthern
17,500	14,000	8,121	0,300	Bétancourt
18,362	14,690	15,998	0,591	Ure
18,750	15,000	9,474	0,350	Bétancourt
—	—	14,888	0,550	Schmidt
—	—	15,971	0,590	Dalton
18,750	15,000	18,272	0,675	Mnncke
19,120	15,296	16,242	0,600	Regnault
20,000	16,000	10,828	0,400	Bétanconrt
—	—	16,513	0,610	Schmidt
20,170	16,136	17,595	0,650	Regnault
20,510	16,408	17,866	0,660	"
21,138	16,910	13,968	0,516	Robison
—	—	18,434	0,681	Ure
21,250	17,000	12,181	0,450	Bétancourt

Temperatnr		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
21,400	17,120	18,949	0,700	Regnault
22,250	17,800	18,543	0,685	Southern
22,500	18,000	14,076	0,520	Bétancourt
—	—	20,573	0,760	Schmidt
22,700	18,160	20,573	0,760	Regnault
23,337	18,670	16,513	0,610	Watt
23,750	19,000	15,701	0,580	Bétancourt
23,850	19,080	22,197	0,820	Magnns
23,925	19,140	21,818	0,806	Ure
24,360	19,480	18,678	0,690	Regnault
25,000	20,000	17,595	0,650	Bétancourt
—	—	24,363	0,900	Schmidt
—	—	23,064	0,852	Dalton
—	—	25,933	0,958	Muncke
25,560	20,448	24,092	0,890	Regnault
26,250	21,000	20,302	0,750	Bétancourt
26,712	21,370	21,717	0,769	Robison
—	—	25,635	0,947	Ure
27,225	21,780	20,302	0,750	Watt
27,500	22,000	22,197	0,820	Bétancourt
—	—	27,341	1,010	Schmidt
27,825	22,260	25,906	0,957	Southern
28,750	23,000	24,363	0,900	Bétancourt
28,800	23,040	29,506	1,090	Regnault
29,487	23,590	29,696	1,097	Ure
30,000	24,000	25,552	0,970	Bétancourt
30,960	24,768	33.567	1,240	Regnault
31,250	25,000	28,423	1,050	Bétancourt
—	—	35,191	1,300	Schmidt
—	—	32,673	1,207	Dalton
32,275	25,820	29,966	1,107	Robison
—	—	34,541	1,276	Ure
32,490	25,992	36,003	1,330	Regnanlt
32,500	26,000	30,318	1,120	Bétancourt
33,387	26,710	36,057	1,332	Sonthern
33,620	26,896	32,484	1,200	Regnault
33,750	27,000	33,025	1,220	Bétaucourt
33,750	27,000	38,439	1,420	Schmidt
35,000	28,000	32,484	1,200	Watt
—	—	35,732	1,320	Bétancourt
35,050	28,040.	41,634	1,538	Ure
36,250	29,000	38,439	1,420	Bétauconrt
37,500	30,000	41,146	1,520	„
—	—	52,245	1,930	Schmidt
—	—	46,317	1,711	Dalton
—	—	30,670	1,133	Muncke
37,837	30,270	40,633	1,501	Robison
—	—	47,237	1,745	Ure
38,380	30,704	38,439	1,420	Regnault
38,750	31,000	44,665	1,650	Bétancourt
38,950	31,160	49,782	1,839	Southern
40,000	32,000	43.853	1.620	Watt
—	—	48,185	1,780	Bétancourt
40,612	32,490	53,328	1,970	Ure
41,250	33,000	51,433	1,900	Bétanconrt
—	—	60,366	2,230	Schmidt

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
42,500	34,000	54,140	2,000	Bétancourt
42,600	34,080	63,073	2,330	Regnault
43,400	34,720	57,145	2,111	Robison
43,400	34,720	62,369	2,304	Ure
43,660	34,928	66,592	2,460	Regnault
43,750	35,000	58,200	1,150	Bétancourt
—	—	72,547	2,680	Schmidt
—	—	65,377	2,415	Dalton
44,080	35,264	68,216	2,520	Regnault
44,512	35,610	67,567	2,496	Southern
44,900	34,920	71,194	2,630	Magnus
45,000	36,000	61,449	2,270	Bétancourt
45,700	36,560	74,442	2,750	Magnus
46,175	36,940	71,356	2,636	Ure
46,230	36,984	75,796	2,800	Regnault
46,250	37,000	66,321	2,450	Bétancourt
47,160	37,728	80,127	2,960	Regnault
47,500	38,000	69,570	2,570	Bétancourt
47,700	38,160	80,127	2,960	Regnault
47,775	38,220	66,051	2,440	Watt
48,750	39,000	74,442	2,750	Bétancourt
48,962	39,170	76,202	2,815	Robison
—	—	83,879	3,096	Ure
48,990	39,192	87,777	3,240	Regnault
49,540	39,632	87,777	3,240	"
49,700	39,760	90,684	3,350	Regnault
50,000	40,000	79,044	2,920	Bétancourt
—	—	98,535	3,640	Schmidt
—	—	88,627	3,274	Dalton
50,080	40,060	90,928	3,359	Southern
51,220	40,980	97,181	3,590	Regnault
51,250	41,000	83,917	3,100	Bétancourt
51,390	41,110	98,264	3,630	Regnault
51,750	41,400	97,262	3,593	Ure
52,500	42,000	88,519	3,270	Bétancourt
53,340	42,670	101,51	3,750	Watt
53,750	43,000	93,933	3,470	Bétancourt
54,530	43,620	100,32	3,706	Robison
—	—	110,88	4,096	Ure
54,740	43,790	114,51	4,230	Magnus
55,000	44,000	100,16	3,700	Bétancourt
55,640	44,510	119,62	4,419	Southern
56,250	45,000	106,93	3,950	Bétancourt
—	—	139,14	5,140	Schmidt
—	—	120,46	4,450	Dalton
56,810	45,450	128,58	4,750	Regnault
57,230	45,780	114,24	4,220	Watt
57,312	45,850	128,74	4,756	Ure
57,380	45,904	128,58	4,750	Regnault
57,500	46,000	115,05	4,250	Bétancourt
58,370	46,696	137,79	5,090	Regnault
58,680	46,944	139,14	5,140	Magnus
58,750	47,000	120,46	4,450	Bétancourt
60,000	48,000	128,58	4,750	"
60,090	48,072	130,87	4,831	Robison
—	—	146,53	5,413	Ure

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
61,112	48,890	136,97	5,060	Watt
61,200	48,960	154,92	5,723	Southern
61,250	49,000	135,35	5,000	Bétancourt
62,040	49,632	163,50	6,040	Regnault
62,400	49,920	163,50	6,040	"
62,500	50,000	144,82	5,350	Bétancourt
—	—	173,25	6,400	Schmidt
—	—	163,15	6,027	Dalton
62,875	50,300	167,62	6,192	Ure
63,750	51,000	154,30	5,700	Bétancourt
64,450	51,560	162,42	6,000	Watt
65,000	52,000	163,77	6,050	Bétancourt
65,650	52,520	170,68	6,305	Robison
65,650	52,520	191,25	7,065	Ure
65,860	52,688	194,63	7,190	Regnault
66,250	53,000	175,95	6,500	Bétancourt
66,300	53,040	194,63	7,190	Regnault
66,762	53,410	200,69	7,412	Southern
67,225	53,780	185,16	6,840	Watt
67,500	54,000	186,79	6,900	Bétancourt
68,437	54,750	215,88	7,975	Ure
68,750	55,000	198,15	7,320	Bétancourt
—	—	231,45	8,550	Schmidt
—	—	216,21	7,987	Dalton
69,450	55,560	208,98	7,720	Watt
70,000	56,000	212,50	7,850	Bétancourt
71,212	56,970	219,70	8,116	Robison
—	—	243,82	9,007	Ure
71,250	57,000	227,39	8,400	Bétancourt
71,662	57,330	233,07	8,610	Watt
72,337	57,870	255,24	9,429	Southern
72,500	58,000	239,57	8,850	Bétancourt
—	—	274,49	10,140	Schmidt
73,337	58,670	254,46	9,400	Watt
73,750	59,000	253,10	9,350	Bétancourt
—	—	282,07	10,420	Schmidt
74,000	59,200	274,22	10,130	Ure
74,830	59,864	284,78	10,520	Magnus
75,000	60,000	279,36	10,320	Watt
—	—	269,35	9,950	Bétancourt
—	—	297,23	10,980	Schmidt
—	—	284,23	10,500	Dalton
75,180	60,144	291,27	10,760	Regnault
75,530	60,424	291,27	10,760	"
76,250	61,000	281,53	10,400	Bétancourt
76,480	61,184	301,29	11,130	Regnault
76,760	61,408	301,29	11,130	"
76,787	61,430	280,66	10,368	Robison
—	—	306,16	11,310	Ure
77,500	62,000	297,77	11,000	Bétancourt
—	—	331,34	12,240	Schmidt
77,775	62,220	299,66	11,070	Watt
77,900	62,320	323,08	11,935	Southern
78,750	63,000	316,72	11,700	Bétancourt
78,950	63,160	350,29	12,940	Regnault
79,210	63,368	350,29	12,940	"

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
79,450	63,560	326,73	12,070	Watt
79,562	63,650	344,87	12,740	Ure
80,000	64,000	335,67	12,400	Bétancourt
80,837	64,670	350,56	12,950	Watt
81,250	65,000	357,32	13,200	Bétancourt
—	—	380,87	14,070	Schmidt
—	—	369,02	13,632	Dalton
81,950	65,560	385,48	14,240	Magnus
82,225	65,780	373,57	13,800	Watt
82,250	65,800	387,10	14,300	Magnus
82,350	65,880	356,84	13,182	Robison
—	—	384,93	14,220	Ure
82,500	66,000	373,57	13,800	Bétancourt
83,462	66,770	406,62	15,021	Southern
83,612	66,890	397,93	14,700	Watt
83,750	67,000	392,51	14,500	Bétancourt
84,900	67,920	432,31	15,970	Regnault
85,000	68,000	421,22	15,560	Watt
—	—	412,82	15,250	Bétancourt
85,110	68,088	432,31	15,970	Regnault
85,125	68,100	429,34	15,860	Ure
—	—	430,96	15,920	Magnus
86,112	68,890	441,24	16,300	Watt
86,250	69,000	435,83	16,100	Bétancourt
86,670	69,336	478,60	17,680	Regnault
86,830	69,464	478,60	17,680	„
87,225	69,780	465,60	17,200	Watt
87,500	70,000	457,48	16,900	Bétancourt
—	—	485,09	17,920	Schmidt
—	—	475,10	17,551	Dalton
87,912	70,330	453,37	16,748	Robison
—	—	482,65	17,830	Ure
88,337	70,670	491,86	18,170	Watt
88,750	71,000	481,84	17.800	Bétancourt
—	—	505,13	18,660	Schmidt
89,025	71,220	509,00	18,803	Southern
89,725	71,780	514,33	19,000	Watt
89,750	71,800	519,47	19,190	Regnault
89,900	71,920	519,47	19,190	„
90,000	72,000	506,21	18,700	Bétancourt
—	—	533,55	19,710	Schmidt
90,687	72,550	535,98	19,800	Ure
90,800	72,640	542,48	20,040	Magnus
91,080	72,864	547,89	20,240	Regnault
91,200	72,960	547,89	20,240	„
91,250	73,000	527,86	19,500	Bétancourt
—	—	557,91	20,610	Schmidt
91,350	73,080	563,05	20,800	Watt
91,810	73,448	543,56	20,080	Magnus
92,500	74,000	557,64	20,600	Bétancourt
—	—	590,12	21,800	Schmidt
93,475	74,780	574,51	21,223	Robison
—	—	599,33	22,140	Ure
93,750	75,000	588,77	21,750	Bétancourt
—	—	603,39	22,290	Schmidt
—	—	605,18	22,356	Dalton

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
94,587	75,670	625,05	23,090	Soutbern
94,850	75,880	628,56	23,220	Regnanlt
94,930	75,944	628,56	23,220	„
95,000	76,000	619,90	22,900	Bétancourt
96,250	77,000	653,74	24,150	„
—	—	657,80	24,300	Ure
96,840	77,472	678,10	25,050	Regnault
96,880	77,504	678,10	25,050	„
97,500	78,000	690,28	25,500	Bétancourt
98,750	79,000	721,96	26,670	„
98,900	79,120	736,84	27,220	Magnus
99,037	79,230	727,67	26,881	Robison
—	—	733,60	27,100	Ure
99,580	79,664	749,03	27,670	Regnault
99,600	79,680	749,03	27,670	„
100,000	80,000	757,96	28,000	Bétancourt
—	—	757,96	28,000	Schmidt
—	—	758,34	28,014	Biker
—	—	758,09	28,005	Arzberger
—	—	761,75	28,140	Taylor
—	—	759,88	28,071	Dulong
100,15	80,12	761,64	28,147	Robisou
—	—	761,96	28,148	Southern
—	—	762,02	28,150	Ure
100,17	80,14	765,00	28,260	Regnanlt
100,55	80,44	762,02	28,150	Watt
100,74	80,59	776,10	28,670	Regnault
101,25	81,00	801,27	29,600	Bétancourt
101,25	81,00	757,96	28,000	Schmidt
101,66	81,33	795,32	29,380	Watt
102,50	82,00	847,29	31,300	Bétancourt
—	—	840,52	31,050	Schmidt
102,71	82,17	848,37	31,340	Ure
102,78	82,22	810,75	29,950	Watt
103,75	83,00	893,31	33,000	Bétancourt
—	—	881,40	32,560	Schmidt
103,89	83,11	832,40	30,750	Watt
104,60	83,68	909,25	33,589	Robison
—	—	902,78	33,350	Ure
104,68	83,74	903,87	33,390	Magnns
104,73	83,78	862,99	31,880	Watt
105,00	84,00	936,62	34,600	Bétancourt
—	—	923,09	34,100	Biker
—	—	919,84	33,980	Schmidt
105,55	84,44	889,25	32,850	Watt
106,00	84,80	932,48	34,447	Christian
106,25	85,00	986,70	36,450	Bétanconrt
—	—	962,23	35,546	Biker
—	—	958,01	35,390	Schmidt
106,39	85,11	913,61	33,750	Watt
107,14	85,71	937,97	34,650	„
107,39	85,91	993,20	36,690	Ure
107,50	86,00	1031,4	38,100	Bétancourt
—	—	999,15	36,910	Scbmidt
108,06	86,45	965,04	35,650	Watt
108,11	86,49	1018,4	37,620	Ure

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
108,75	87,00	1082,8	40,000	Bétancourt
—	—	1040,0	38,420	Schmidl
108,89	87,11	969,41	36,550	Watt
109,73	87,78	1015,1	37,500	"
110,00	88,00	1142,4	42,200	Bétancourl
—	—	1093,1	40,370	Biker
—	—	1089,3	40,240	Schmidl
—	—	1050,0	38,788	Christian
110,16	88,13	1130,2	41,751	Robison
—	—	1094,7	40,440	Ure
110,44	88,35	1104,7	40,810	"
110,55	88,44	1040,3	38,430	Watt
111,00	88,80	1083,3	40,020	Christian
111,25	89,00	1199,2	44,300	Bétancourt
—	—	1133,1	41,860	Schmidt
—	—	1112,9	41,114	Arzberger
111,39	89,11	1064,7	39,330	Watt
112,00	89,60	1116,7	41,251	Christian
112,20	89,76	1139,8	45,107	Dulong
112,23	89,78	1088,8	40,220	Watt
112,50	90,00	1256,0	46,400	Bétancourt
—	—	1200,2	44,338	Biker
—	—	1184,9	43,770	Schmidl
112,68	90,14	1188,6	43,910	Ure
112,78	90,22	1115,3	41,200	Watt
112,95	90,36	1199,2	44,300	Ure
113,00	90,40	1156,6	42,728	Christian
113,61	90,89	1143,2	42,230	Watt
113,75	91,00	1310,2	48,400	Bétancourt
—	—	1242,2	45,890	Schmidl
114,00	91,20	1206,6	44,205	Christian
114,17	91,34	1168,1	43,150	Watt
114,73	91,78	1191,1	44,000	"
114,90	91,92	1277,7	47,200	Ure
115,00	92,00	1367,0	50,500	Bétancourt
—	—	1299,7	48,011	Biker
—	—	1299,9	48,020	Schmidl
—	—	1230,0	45,436	Christian
115,55	92,44	1243,3	45,930	Watt
115,73	92,58	1394,4	51,510	Robison
—	—	1313,2	48,510	Ure
116,00	92,80	1286,9	47,539	Christian
116,25	93,00	1434,7	53,000	Bétancourt
—	—	1354,3	50,030	Schmidl
—	—	1386,0	51,200	Mayer
116,84	93,47	1354,0	50,290	Ure
116,94	93,55	1270,4	46,930	Watt
117,00	93,60	1326,6	49,007	Christian
117,50	94,00	1497,0	55,300	Bétancourt
—	—	1403,3	51,840	Schmidl
118,00	94,40	1383,2	51,099	Christian
118,06	94,45	1321,3	48,810	Watt
118,51	94,81	1430,9	52,860	Ure
118,75	95,00	1564,6	57,800	Bétancourt
—	—	1466,6	54,180	Schmidt
—	—	1469,6	54,290	Biker

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
119,00	95,20	1426,6	52,699	Christian
119,45	95,56	1369,7	50,600	Watt
120,00	96,00	1637,7	60,500	Bétancourt
—	—	1535,1	56,710	Schmidt
—	—	1532,4	56,608	Biker
—	—	1472,9	54,422	Christian
—	—	1452,0	53,640	Taylor
120,28	96,22	1421,4	52,510	Watt
120,46	96,37	1534,1	56,670	Ure
120,63	96,50	1483,4	54,797	Arzberger
121,00	96,80	1503,2	55,531	Christian
121,13	96,90	1528,9	56,480	Regnault
121,25	97,00	1716,2	63,400	Bétancourt
—	—	1602,0	59,180	Schmidt
121,29	97,03	1696,6	62,675	Robison
—	—	1523,9	56,295	Southern
—	—	1572,2	58,080	Ure
121,39	97,11	1472,6	54,400	Watt
122,00	97,60	1563,4	57,754	Christian
—	—	1519,8	56,143	Taylor
122,25	97,80	1515,9	56,000	Héron de Villefosse
122,50	98,00	1524,0	56,300	Watt
—	—	1792,0	66,200	Bétancourt
—	—	1671,6	61,750	Schmidt
123,00	98,40	1606,5	59,346	Christian
123,70	98,96	1629,5	60,194	Arago
123,75	99,00	1967,8	69,000	Bétancourt
—	—	1740,1	64,280	Schmidt
123,89	99,11	1575,5	58,200	Watt
123,90	99,12	1668,6	61,640	Regnault
124,00	99,20	1659,8	61,316	Christian
124,08	99,26	1708,1	63,100	Ure
125,00	100,00	1626,9	60,100	Watt
—	—	1804,3	66,654	Biker
—	—	1943,6	71,800	Bétancourt
—	—	1813,7	67,000	Schmidt
—	—	1713,1	63,286	Christian
126,00	100,80	1756,5	64,886	„
126,11	100,89	1676,4	61,930	Watt
126,25	101,00	2030,2	75,000	Bétancourt
—	—	1882,2	69,530	Schmidt
126,85	101,48	2039,5	75,341	Robison
126,86	101,49	1836,4	67,840	Ure
127,00	101,60	1823,1	67,348	Christian
127,23	101,78	1727,3	63,810	Watt
127,50	102,00	2116,7	78,200	Bétancourt
—	—	1961,5	72,460	Schmidt
128,00	102,40	1883,1	69,564	Christian
128,06	102,45	1775,8	65,600	Watt
128,47	102,78	1915,2	70,750	Regnault
128,50	102,80	1924,2	71,120	„
128,75	103,00	2192,7	81,000	Bétancourt
—	—	2038,1	75,290	Schmidt
129,00	103,20	1949,7	72,026	Christian
—	—	1899,7	70,178	Taylor
129,18	103,34	1824,5	67,400	Watt

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
129,64	103,71	1982,1	73,220	Ure
130,00	104,00	2273,9	84,000	Bétancourt
—	—	2117,8	78,220	Schmidt
—	—	2092,0	77,280	Biker
—	—	2013,7	74,390	Christian
—	—	1959,1	72,370	Taylor
130,28	104,22	1875,9	69,300	Watt
131,00	104,80	2066,4	76,334	Christian
131,11	104,89	1927,7	71,210	Watt
131,25	105,00	2349,8	86,800	Bétancourt
—	—	2191,3	80,950	Schmidt
—	—	2169,1	80,130	Biker
—	—	2198,1	81,200	Mayer
131,95	105,56	1978,8	73,100	Watt
132,00	105,60	2159,7	79,782	Christian
132,43	105,94	2390,0	88,289	Robison
—	—	2191,9	80,970	Ure
132,50	106,00	2409,2	89,000	Bétancourt
—	—	2300,7	84,990	Schmidt
132,78	106,22	2030,2	75,000	Watt
132,82	106,25	2176,7	80,410	Arago
133,00	106,40	2249,6	83,105	Christian
133,30	106,64	2181,6	80,591	Arago
133,32	106,66	2209,2	81,610	Regnault
133,61	106,89	2080,9	76,870	Watt
133,75	107,00	2471,5	91,300	Bétancourt
—	—	2388,1	88,220	Schmidt
134,00	107,20	2323,0	85,813	Christian
134,38	107,50	2223,8	82,151	Arzberger
135,00	108,00	2531,0	93,500	Bétancourt
—	—	2492,1	92,060	Schmidt
—	—	2479,1	91,580	Biker
—	—	2389,6	88,275	Christian
—	—	2279,7	84,214	Dulong
135,20	108,16	2375,4	87,750	Ure
135,68	108,54	2371,6	87,610	Regnault
136,00	108,80	2479,6	91,598	Christian
136,25	109,00	2587,9	95,600	Bétancourt
—	—	2604,1	96,200	Schmidt
137,00	109,60	2545,4	94,029	Christian
137,50	110,00	2652,9	98,000	Bétancourt
—	—	2726,5	100,720	Schmidt
137,99	110,39	2689,7	99,360	Robison
—	—	2588,2	95,610	Ure
138,00	110,40	2639,5	97,507	Christian
138,30	110,64	2538,6	93,779	Arago
—	—	2561,9	94,640	Regnault
133,75	111,00	2824,7	104,350	Schmidt
138,88	111,10	2273,9	84,000	Héron de Villefosse
138,89	111,11	2599,3	96,020	Regnault
139,00	111,20	2709,4	100,090	Christian
140,00	112,00	2955,5	109,180	Schmidt
—	—	2779,5	102,680	Christian
—	—	2636,1	97,380	Taylor
140,45	112,36	2659,6	98,250	Dulong
140,88	112,70	2850,5	105,300	Ure

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
140,93	112,74	2755,2	101,780	Regnanlt
141,00	112,80	2856,2	105,510	Christian
141,25	113,00	3061,6	113,100	Schmidt
141,46	113,17	2801,2	103,480	Regnanlt
142,00	113,60	2926,0	108,090	Christian
142,50	114,00	3170,4	117,120	Schmidt
143,00	114,40	3006,1	111,050	Christian
143,55	114,84	3050,8	112,700	Ure
144,00	115,20	3089,5	114,130	Christian
145,00	116,00	3172,9	117,210	„
145,20	116,16	3039,5	112,285	Dulong
145,44	116,35	3047,8	112,590	Sonthern
145,98	116,78	3163,7	116,870	Regnault
146,00	116,80	3256,0	120,280	Christian
146,33	117,06	3275,5	121,000	Ure
147,00	117,60	3342,6	123,480	Christian
147,48	117,98	3307,4	122,180	Regnanlt
148,00	118,40	3439,2	127,050	Christian
148,30	118,64	3361,3	124,170	Regnault
149,00	119,20	3525,9	130,250	Christian
149,11	119,29	3548,9	131,100	Ure
149,70	119,76	3475,9	128,404	Arago
150,00	120,00	3625,7	133,940	Christian
—	—	3511,8	129,730	Taylor
—	—	3419,5	126,321	Dnlong
151,00	120,80	3729,2	137,760	Christian
151,63	121,30	3031,8	112,000	Héron de Villefosse
151,90	121,52	3686,8	136,195	Arago
—	—	3825,0	141,300	Ure
152,00	121,60	3859,1	142,560	Christian
153,00	122,40	3926,0	145,030	„
153,70	122,96	3881,0	143,369	Arago
154,00	123,20	4025,8	148,720	Christian
—	—	3799,5	140,357	Dnlong
154,68	123,74	4095,7	151,300	Ure
155,00	124,00	4149,0	153,270	Christian
155,79	124,63	4222,9	156,000	Ure
156,00	124,80	4252,4	157,090	Christian
157,00	125,60	4362,3	161,150	„
158,00	126,40	4492,5	165,960	„
—	—	4179,4	154,392	Dulong
159,00	127,20	4598,9	169,890	Christian
160,00	128,00	4748,9	175,430	„
—	—	4559,1	168,420	Taylor
161,00	128,80	4613,0	170,410	Christian
161,25	129,00	4445,4	164,220	Arzberger
161,50	129,20	4559,3	168,428	Dulong
162,00	129,60	4780,3	176,590	Christian
163,40	130,72	4938,3	182,427	Arago
163,50	130,80	4937,6	182,401	Christian
164,70	131,76	4939,3	182,464	Dulong
165,00	132,00	5114,9	188,950	Christian
166,00	132,80	5282,2	195,130	„
167,50	134,00	5449,5	201,310	„
168,00	134,40	5616,7	207,490	„
—	—	5319,2	196,500	Dulong

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
168,50	134,80	5605,4	207,071	Arago
169,00	135,20	5784,0	213,670	Christian
169,40	135,52	5773,7	213,288	Arago
170,00	136,00	5951,3	219,850	Christian
170,50	136,40	5699,2	210,535	Dulong
172,34	137,87	6151,0	227,225	Arago
173,00	138,40	6079,1	224,571	Dulong
173,36	138,69	6095,5	225,180	Southern
180,70	144,56	7505,1	277,248	Arago
183,70	146,96	8032,5	296,731	"
187,10	149,68	8699,5	321,371	"
188,50	150,80	8840,0	326,561	"
188,75	151,00	8147,5	300,980	Arzberger
193,70	154,96	9998,9	369,372	Arago
198,50	158,80	11019,0	407,055	"
201,75	161,40	11862,0	438,198	"
204,17	163,34	12290,3	454,020	"
206,10	164,88	12987,2	479,764	"
206,80	165,44	13061,0	482,490	"
207,40	165,92	13127,6	484,950	"
208,90	167,12	13684,3	505,516	"
209,13	167,30	13761,9	508,382	"
210,50	168,40	14063,4	519,520	"
215,30	172,24	15499,5	572,571	"
217,50	174,00	16152,8	596,705	"
218,40	174,72	16381,3	605,146	"
220,80	176,64	17182,6	632,001	"
222,50	178,00	15552,5	574,53	Arzberger
224,15	179,32	18189,4	671,940	Arago

13. Es folgt nun die Zusammenstellung dreier Tabellen nach Biot, Magnus und Regnault über den Zusammenhang der Elasticitäten mit den Temperaturen des Wasserdampfs, welche nach Formeln berechnet sind.

Biot hat die Formel erfunden:

$$\log E = a - bc^{20+t} - dg^{20+t}$$

hier bedeutet E die Spannung in Millimetern Quecksilbersäule bei 0° C.

$$a = 5{,}96131330259$$
$$\log b = 0{,}82340688193 - 1$$
$$\log c = -0{,}01309734295$$
$$\log d = 0{,}74110951837$$
$$\log g = -0{,}00212510583$$

t die Temperatur in Centesimalgraden.

Magnus hat die Formel erfunden:

$$E = 4{,}525 \times 10^{\frac{7{,}4475 \times t}{234{,}69 + t}}$$

E und t wie bei Biot.

Regnault hat für Dämpfe unter 0° C. die Formel:

$$E = 0{,}0131765 + 0{,}29682 \times 1{,}0893^{t + 32}$$

Für Dämpfe zwischen 0° C. und 100° C. die Formel:

$$\log E = 4{,}738438 + 0{,}013616 \times 1{,}0159329^{t} - 4{,}0878 \times 0{,}992487^{t}$$

Tabelle

des Zusammenhangs der Elasticitäten des Wasserdampfs mit den verschiedenen Temperaturen desselben. Nach den vorstehenden Formeln berechnet.

Temperatnr	Nach Biot		Nach Magnus		Nach Regnault	
− C.	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz
32	—	—	—	—	0,310	0,026
31	—	—	—	—	0,336	0,029
30	—	—	—	—	0,365	32
29	—	—	—	—	0,397	34
28	—	—	—	—	0,431	37
27	—	—	—	—	0,468	41
26	—	—	—	—	0,509	44
25	—	—	—	—	0,553	49
24	—	—	—	—	0,602	52
23	—	—	—	—	0,654	57
22	—	—	—	—	0,711	63
21	—	—	—	—	0,774	67
20	1,333	—	0,916	0,083	0,841	75
19	—	—	0,999	90	0,916	80
18	—	0,546	1,089	97	0,996	88
17	—	—	1,186	104	1,084	95
16	—	—	1,290	113	1,179	105
15	1,879	—	1,403	122	1,284	114
14	—	—	1,525	130	1,398	123
13	—	0,752	1,655	141	1,521	135
12	—	—	1,796	151	1,656	147
11	—	—	1,947	162	1,803	160
10	2,631	—	2,109	175	1,963	174
9	—	0,929	2,284	187	2,137	190
8	—	—	2,471	200	2,327	206
7	—	—	2,671	215	2,533	225
6	—	—	2,886	229	2,758	246
5	3,660	—	3,115	246	3,004	267
4	—	—	3,361	263	3,271	282
3	—	1,399	3,624	281	3,553	326
2	—	—	3,905	300	3,879	345
1	—	—	4,205	320	4,224	376
0	5,059		4,525		4,600	

Temperatur	Nach Biot		Nach Magnus		Nach Regnault	
+ C.	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz
0	5,059	0,334	4,525	0,342	4,600	0,340
1	5,393	356	4,867	0,364	4,940	0,362
2	5,749	374	5,231	0,388	5,302	0,385
3	6,123	400	5,619	0,413	5,687	0,410
4	6,523	424	6,032	0,439	6,097	0,437
5	6,947	449	6,471	0,468	6,534	0,464
6	7,396	475	6,939	0,497	6,998	0,494
7	7,871	504	7,436	0,528	7,492	0,525
8	8,375	534	7,964	0,561	8,017	0,557
9	8,909	566	8,525	0,601	8,574	0,591
10	9,475	599	9,126	0,625	9,165	0,627
11	10,074	633	9,751	0,670	9,792	0,665
12	10,707	671	10,421	0,709	10,457	0,705
13	11,378	709	11,130	0,752	11,162	0,746
14	12,087	750	11,882	0,795	11,908	0,791
15	12,837	793	12,677	0,842	12,699	0,837
16	13,630	838	13,519	0,890	13,536	0,885
17	14,468	885	14,409	0,942	14,421	0,936
18	15,353	935	15,351	0,994	15,357	0,989
19	16,288	1,026	16,345	1,051	16,346	1,045
20	17,314	1,003	17,396	1,109	17,391	1,104
21	18,317	1,130	18,505	1,170	18,495	1,164
22	19,447	1,130	19,675	1,234	19,659	1,229
23	20,577	1,228	20,909	1,302	20,888	1,296
24	21,805	1,285	22,211	1,371	22,184	1,366
25	23,090	1,362	23,582	1,444	23,550	1,438
26	24,452	1,429	25,026	1,521	24,988	1,517
27	25,881	1,509	26,547	1,601	26,505	1,596
28	27,390	1,655	28,148	1,684	28,101	1,681
29	29,045	1,598	29,832	1,770	29,782	1,766
30	30,643	1,767	31,602	1,862	31,548	1,858
31	32,410	1,851	33,464	1,955	33,496	1,953
32	34,261	1,927	35,419	2,054	35,359	2,052
33	36,188	2,066	37,473	2,157	37,411	2,154
34	38,254	2,150	39,630	2,263	39,565	2,262
35	40,404	2,339	41,893	2,375	41,827	2,374
36	42,743		44,268		44,201	

Temperatur + C.	Nach Biot Millim.	Nach Biot Differenz	Nach Magnus Millim.	Nach Magnus Differenz	Nach Regnault Millim.	Nach Regnault Differenz
37	45,038	2,295	46,758	2,490	46,691	2,490
38	47,579	2,541	49,368	2,610	49,302	2,611
39	50,147	2,568	52,103	2,735	52,039	2,737
40	52,998	2,851	54,969	2,866	54,906	2,867
41	55,772	2,774	57,969	3,000	57,910	3,004
42	58,792	3,020	61,109	3,140	61,055	3,145
43	61,958	3,266	64,396	3,287	64,346	3,291
44	65,627	3,669	67,833	3,437	67,790	3,444
45	68,751	3,124	71,427	3,594	71,391	3,601
46	72,393	3,642	75,185	3,758	75,158	3,767
47	76,205	3,812	79,111	3,926	79,093	3,935
48	80,195	3,990	83,212	4,101	83,204	4,111
49	84,370	4,175	87,494	4,282	87,499	4,295
50	88,743	4,373	91,965	4,471	91,982	4,483
51	93,301	4,558	96,630	4,665	96,661	4,679
52	98,975	4,774	101,497	4,867	101,543	4,882
53	103,060	4,985	106,572	5,075	106,636	5,093
54	108,270	5,210	111,864	5,292	111,945	5,309
55	113,710	5,440	117,378	5,514	117,478	5,533
56	119,390	5,680	123,124	5,746	123,244	5,766
57	125,310	6,920	129,109	5,985	129,251	6,007
58	131,500	6,190	135,341	6,232	135,505	6,254
59	137,940	6,440	141,829	6,488	142,015	6,510
60	144,660	6,720	148,579	6,750	148,791	6,776
61	151,700	7,040	155,603	7,024	155,839	7,048
62	158,960	7,260	162,908	7,305	163,170	7,331
63	166,560	7,600	170,502	7,594	170,791	7,621
64	174,470	7,910	178,397	7,895	178,714	7,923
65	182,710	8,240	186,601	8,204	186,945	8,231
66	191,270	8,560	195,124	8,523	195,496	8,551
67	200,180	8,910	203,975	8,851	204,376	8,880
68	209,440	9,260	213,166	9,191	213,596	9,220
69	219,060	9,620	222,706	9,540	223,165	9,569
70	229,070	10,010	232,606	9,900	233,093	9,928
71	239,450	10,380	242,877	10,271	243,393	10,300
72	250,230	10,780	253,530	10,653	254,073	10,680
73	261,430	11,200	264,577	11,047	265,147	11,074

Temperatur	Nach Biot		Nach Magnus		Nach Regnault	
+ C.	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz
74	273,030	11,600	276,029	11,452	276,624	11,477
75	285,070	12,040	287,898	11,869	288,517	11,893
76	297,570	12,500	300,193	12,295	300,838	12,321
77	310,490	12,950	312,934	12,741	313,600	12,762
78	323,890	13,400	326,127	13,193	326,811	13,211
79	337,760	13,870	339,786	13,659	340,488	13,677
80	352,080	14,320	353,926	14,140	354,643	14,155
81	367,000	14,900	368,558	14,632	369,287	14,644
82	382,380	15,380	383,697	15,139	384,435	15,148
83	398,280	15,900	399,357	15,680	400,101	15,666
84	414,730	16,450	415,525	16,168	416,298	16,197
85	431,710	16,980	432,295	16,770	433,041	16.743
86	449,260	17,550	449,603	17,308	450,344	17,303
87	467,380	18,120	467,489	17,886	468,221	17,877
88	486,090	18,710	485,970	18,481	486,687	18,466
89	505,380	19,290	505,060	19,090	505,759	19,072
90	525,280	19,900	524,775	19,715	525,450	19,691
91	545,800	19,520	545,133	20,358	545,778	20,328
92	566,950	21,150	566,147	21,014	566,757	20,979
93	588,740	21,790	587,836	21,689	588,406	21,649
94	611,180	22,440	610,217	22,381	610,740	22,334
95	634,270	23,090	633,305	23,088	633,778	23,038
96	658,050	23,780	657,120	23,815	657,535	23,757
97	682,590	24,540	681,683	24,563	682,029	24,494
98	707,630	25,040	707,000	25,317	707,280	25,251
99	733,460	25,830	733,100	26,100	733,305	26,025
100	760,000	26,540	760,000	26,900	760,000	26,695

14. Folgende Tabelle, wegen ihres Nutzens für Anlage von Dampfkesseln für gewerbliche Zwecke höchst wichtig, ist den No. 9 gedachten Beobachtungen der Pariser Academie entsprechend berechnet worden und zwar nach Formeln die in dem Sinne abgeleitet worden sind, dafs sie in den Resultaten jenen Beobachtungen möglichst nahe kommen.

Die erste dieser Formel von Tredgold liegt dieser Tabelle für Dämpfe bis zu 4 Atmosphären Spannung zu Grunde. Sie ist

1. $t = 85 \sqrt[6]{e} - 75$

wo t die Temperatur in Centesimalgraden von 0 ab und e die Spannung der Dämpfe in Centimetern Quecksilbersäule bedeutet.

Die zweite Formel von Dulong, schon unter No. 10 aufgeführt, ist

$E = (1 + 0{,}7153\,T)^5$

nach welcher es sich bequemer rechnet als mit der daselbst aufgeführten corrigirten Formel und die beide nur geringe Abweichungen geben, hat zu den Däm-

pfen aller höheren Spannungen gedient und nicht erst, wie von einigen Schriftstellern behauptet wird, von der Spannung 24 Atmosphären ab aufwärts, bis wohin die Beobachtungen der Academiker gereicht haben.

Wird E gegeben, so ist die Formel zu schreiben:

$$\text{II.}\quad T = \frac{-1 + \sqrt[5]{E}}{0{,}7153}$$

Es hedeutet hier E die Spannnng der Dämpfe in Atmosphären und T die Temperatur über 100° der Art, dafs die Temperatur t für die Tabelle erhalten wird $t = (1 + T)\, 100°$.

Beispiele. 1. Für $E = 1$ Atmosphäre ist in Formel I $e = 76$ und man erhält

$t = 85 \sqrt[6]{76} - 75 = 174{,}94 - 75 = 99{,}94$ statt 100° in Formel II ist

$$E = 1,\ \text{also}\ -1 + \sqrt[5]{E} = 0 = T$$

folglich $t = (1 + 0)\, 100° = 100°$

2. Für $E = 4$ Atmosphären ist in Formel I $e = 4 \times 76 = 304$ daher

$t = 85 \sqrt[6]{304} - 75 = 220{,}41 - 75 = 145{,}41°$

in Formel II: $E = 4$ gesetzt, erhält man

$$T = \frac{-1 + \sqrt[5]{4}}{0{,}7153} = \frac{0{,}31951}{0{,}7153} = 0{,}44668$$

daher $t = (1 + 0{,}44668)\, 100° = 144{,}668°$

In die Tabelle ist $t = 145{,}4°$ gesetzt; es ist bis hierher Formel I. angewendet, Formel II. weicht aber nicht bedentend ab.

3. Für $E = 5$ Atmosphären hat man nach Formel II.

$$T = \frac{-1 + \sqrt[5]{5}}{0{,}7153} = \frac{0{,}37973}{9{,}7153} = 0{,}530868$$

also $t = 153{,}0868°$

In der Tabelle steht $t = 153{,}08$

Formel I. würde geben:

$t = 85 \times \sqrt[6]{380} - 75 = 228{,}76 - 75 = 153{,}76°$

4. Für $E = 40$ Atmosphären hat man nach Formel II.

$$T = \frac{-1 + \sqrt[5]{40}}{0{,}7153} = \frac{1{,}09128}{0{,}7153} = 1{,}52562$$

daher $t = 252{,}562°$

wofür in die Tabelle 252,55° gesetzt ist.

Formel I. würde geben:

$t = 85 \sqrt[6]{3040} - 75 = 323{,}51 - 75 = 248{,}51°$

welches schon etwas mehr abweicht, nämlich um 4° C., ein Unterschied, der bei einer so hohen Spannung als unbedentend gelten kann. Zuverlässig ist aber die Tabelle nur bis zu 24 Atmosphären Spannung, bis zu der Grenze der stattgehabten Beobachtungen; jedoch ist meines Wissens von einer so hohen Spannung in der Praxis noch kein Gebrauch gemacht worden.

Die Angaben des Drucks auf 1 preufs. □″ sind von mir noch zugefügt worden:

Es ist $1^m = 3{,}186199$ pr. Fufs $= 38{,}234388$ pr. Zoll.

1 $□^{cm} = 0{,}146187$ preufs. □ Zoll.

1 Kilgr. = 2 Zollpfund.

1 preufs. $□'' = 6{,}84056\ □^{cm}$

Tabelle

des Zusammenhangs der Elasticitäten des Wasserdampfs mit den Temperaturen desselben über 100° C., nach den vorstehenden Formeln berechnet.

Temperatur Celsius	Druck in Atmosphären	Druck in Quecksilbersäule Meter	Druck in Quecksilbersäule preufs. Zoll	Druck auf 1 □ centimeter Kilogr.	Druck auf 1 preufs. □″ Zollpfund
100,00	1,0	0,76	29,058	1,033	14,133
112,20	1,5	1,14	43,587	1,549	21,192
121,40	2,0	1,52	58,116	2,066	28,265
128,80	2,5	1,90	72,645	2,582	35,325
135,10	3,0	2,28	87,174	3,099	42,398
140,60	3,5	2,66	101,503	3,615	49,457
145,40	4,0	3,04	116,233	4,132	56,530
149,06	4,5	3,42	130,762	4,648	63,590
153,08	5,0	3,80	145,291	5,165	70,663
156,80	5,5	4,18	159,820	5,681	77,722
160,20	6,0	4,56	174,349	6,198	84,796
163,48	6,5	4,94	188,878	6,714	91,855
166,50	7,0	5,32	203,407	7,231	98,928

Temperatur Celsius	Druck in Atmosphären	Druck in Quecksilbersäule		Druck auf 1 □ centimeter Kilogr.	Druck auf 1 preuſs. □" Zollpfund
		Meter	preuſs. Zoll		
169,37	7,5	5,70	217,936	7,747	105,988
172,10	8	6,08	232,465	8,264	113,061
177,10	9	6,84	261,523	9,297	127,193
181,60	10	7,60	290,581	10,330	141,326
186,03	11	8,36	319,639	11,363	155,458
190,00	12	9,12	348,698	12,396	169,591
193,70	13	9,88	377,806	13,429	183,724
197,19	14	10,64	406,814	14,462	197,856
200,48	15	11,40	435,872	15,495	211,989
203,60	16	12,16	464,930	16,528	226,122
206,57	17	12,92	493,987	17,561	240,254
209,40	18	13,68	523,046	18,594	254,387
212,10	19	14.44	552,105	19,627	268,519
214,70	20	15,20	581,163	20,660	282,652
217,20	21	15,96	610,221	21,693	296,785
219,60	22	16,72	639,279	22,726	310,917
221,90	23	17,48	668,337	23,759	325,050
224,20	24	18,24	697,395	24,792	339,212
226,30	25	19,00	726,453	25,825	353,315
236,20	30	22,80	871,744	30,990	423,978
244,85	35	26,60	1017,035	36,155	494,641
252,55	40	30,40	1162,325	41,320	565,304
259,52	45	34,20	1307,616	46,485	635,967
265,89	50	38,00	1452,907	51,650	706,630

15. Die Dichtigkeiten der Dämpfe stehen in geradem Verhältniſs mit den Druckwirkungen, welche auf sie ausgeübt werden und in umgekehrtem Verhältniſs mit ihren Temperaturen; die Volumina der Dämpfe also in umgekehrtem Verhältniſs mit jenen Druckwirkungen und in geradem Verhältniſs mit ihren Temperaturen. Nimmt man daher die Dichtigkeit d und das Volumen v des Wasserdampfs unter 760^{mm} Druck Quecksilbersäule und bei 100° C. Temperatur als Einheiten, so hat man zur Ermittelung der Dichtigkeit D und des Volum V von Wasserdampf unter dem Druck p^{mm} Quecksilbersäule und t° C. Temperatur die Proportionen

1. Abgesehen von den Temperaturen beider Dämpfe

$$d : D = 760 : p$$
$$v : V = p : 760$$

2. Abgesehen von den auf sie einwirkenden Druckkräften (s. Bd. 1, pag. 201 und 214)

$$d : D = 1 + 0{,}00365 \times t : 1 + 0{,}00365 \times 100$$
$$v : V = 1 + 0{,}00365 \times 100 : 1 + 0{,}00365 \times t$$

Mithin hat man überhaupt:

$$d : D = 760\,(1 + 0{,}00365 \times t) : 1{,}365\,p$$
$$v : V = 1{,}365 \times p : 760\,(1 + 0{,}00365 \times t)$$

Um nun d und v zu finden hat nach Gay-Lussac 1 Kubikcentimeter (cub^{cm}) trockene Luft von 0° C. und unter einem Druck von $0{,}76^{m}$ Quecksilbersäule ein Gewicht von 0,001299 Gramme; also nimmt 1 Gramm dieser Luft einen Raum ein

von $\frac{1}{0{,}001299} = 769{,}823\ cub^{cm}$.

Die Luft dehnt sich aus von 0° bis 100° C. auf 1,365 seines ersten Volumen, also nimmt 1 Gramme trockene Luft von 100° C. einen Raum ein von $1{,}365 \times 769{,}823\ cub^{cm} = 1050{,}8084\ cub^{cm}$.

Ferner ist Wasserdampf nach Gay-Lussac 1,6 mal leichter als trockene Luft, folglich nimmt 1 Gramme Wasserdampf bei 100° C. einen Raum ein von $1{,}6 \times 1050{,}8084 = 1681{,}29\ cub^{cm}$.

Nun ist 1 Gramme das Gewicht eines cub^{cm} Wassers in seiner gröſsten Dichtigkeit bei 4° C., welches gegen Wasser von 0° C. eine Dichtigkeit hat von 1,000118 (s. Bd. 1, pag. 201); mithin nimmt Wasserdampf von 100° C. einen Raum ein

von $\frac{1681{,}29}{1{,}000118} = 1680$ mal den Raum einer gleichen Menge Wasser von 0° C., also

ist $v = 1680$ und $d = \frac{1}{1680}$. Man hat also

$$D = \frac{1}{v} = \frac{1,365}{760 \cdot 1680} \times \frac{p}{1 + 0,00365\,t}$$
$$= \frac{0,00000106908 \times p}{1 + 0,00365 \times t}$$
$$V = \frac{1}{D} = 935384 \times \frac{1 + 0,00365 \times t}{p}$$

oder

$$log\,D = 0,0290098 - 6$$
$$+ log\,p - log\,(1 + 0,00365 \times t)$$
$$log\,V = 5,9709902 - log\,p + log(1 + 0,00365 \times t)$$

Die Dichtigkeiten und Volumina sind also abhängig von der Spannung p des Dampfs, bei dessen Temperatur t und von t, die Spannung p wird aber, wie Tabelle pag. 232 zeigt, von verschiedenen Physikern verschieden angegeben und folglich ist dies auch mit den Dichtigkeiten und den Volumen der Fall.

Ich habe nun aus der Tabelle pag. 232 von den Angaben Biots, Magnus und Regnault's das Mittel für p genommen und die Tabelle pag. 241 berechnet, die Spannungen selbst auch noch in preufsischen Linien Quecksilbersäule ausgedrückt. Damit aber diese Tabelle für andere beliebige p möglichst benutzt werden kann, habe ich in der folgenden Tabelle für alle vorkommenden Temperaturen $log\,p$ und $log\,(1 + 0,00365 \times t)$ angegeben. Die ersten 3 Versuchsangaben von Biot für $t = -20°$, $-15°$ und $-10°$ sind nicht mit berücksichtigt, weil diese Zahlen wegen ihrer Gröfse gegen die zugehörigen beiden anderen eine Inconsequenz in der Tabelle veranlassen.

Hülfstabelle zur Berechnung der Dichtigkeiten und Volume des Wasserdampfs bei gegebenen Spannungen und Temperaturen von − 32° C. bis 100° C.

Temperatur − C.	$1 + 0,00365 \times t$ numerus	$1 + 0,00365 \times t$ logarithmus − 10	Spannung p in Millimeter numerus	Spannung p in Millimeter logarithmus
32	0,88320	9,946 0591	0,3100	0,491 3617 − 1
31	0,88685	9,947 8502	0,3360	0,526 3393 − 1
30	0,89050	9,949 6339	0,3650	0,562 2929 − 1
29	0,89415	9,951 4104	0,3970	0,598 7905 − 1
28	0,89780	9,953 1796	0,4310	0,634 4773 − 1
27	0,90145	9,954 9416	0,4680	0,670 2459 − 1
26	0,90510	9,956 6966	0,5090	0,706 7178 − 1
25	0,90875	9,958 4444	0,5530	0,742 7251 − 1
24	0,91240	9,960 1853	0,6020	0,779 6965 − 1
23	0,91605	9,961 9192	0,6540	0,815 5777 − 1
22	0,91970	9,963 6462	0,7110	0,851 8696 − 1
21	0,92335	9,965 3664	0,7740	0,888 7410 − 1
20	0,92700	9,967 0797	0,8785	0,943 7418 − 1
19	0,93065	9,968 7864	0,9575	0,981 1388 − 1
18	0,93430	9,970 4863	1,0425	0,018 0761
17	0,93795	9,972 1797	1,1350	0,064 9959
16	0,94160	9,973 8664	1,2345	0,091 4911
15	0,94525	9,975 5467	1,3435	0,128 2377
14	0,94890	9,977 2204	1,4615	0,164 7988
13	0,95255	9,978 8878	1,5880	0,200 8505
12	0,95620	9,980 5487	1,7260	0,237 0408
11	0,95985	9,982 2034	1,8750	0,273 0013
10	0,96350	9,983 8517	2,0360	0,308 7778
9	0,96715	9,985 4938	2,2105	0,344 4905
8	0,97080	9,987 1298	2,3990	0,380 0302
7	0,97445	9,988 7596	2,6020	0,415 3073
6	0,97810	9,990 3833	2,8220	0,450 5570
5	0,98175	9,992 0009	3,2597	0,513 1776
4	0,98540	9,993 6126	3,3160	0,520 6145
3	0,98905	9,995 2182	3,5885	0,550 9430
2	0,99270	9,996 8180	3,8920	0,590 1728
1	0,99635	9,998 4119	4,2145	0,624 7461
0	1,00000	10,000 0000	4,7280	0,674 6775

Temperatur + C.	$1 + 0{,}00365 \times t$		Spannung p in Millimeter	
	numerus	logarithmus	numerus	logarithmus
0	1,00000	0,000 0000	4,7280	0,674 6775
1	1,00365	0,001 5823	5,0667	0,704 7252
2	1,00730	0,003 1588	5,4273	0,734 5838
3	1,01095	0,004 7297	5,8097	0,764 1537
4	1,01450	0,006 2521	6,2173	0,793 6018
5	1,01815	0,007 8118	6,6507	0,822 8674
6	1,02180	0,009 3659	7,1110	0,851 9307
7	1,02545	0,010 8680	7,5997	0,880 7964
8	1,02910	0,012 4576	8,1187	0,909 4865
9	1,03285	0,014 0373	8,6693	0,937 9840
10	1,03650	0,015 5693	9,2553	0,966 3905
11	1,04015	0,017 0960	9,8723	0,994 4183
12	1,04380	0,018 6173	10,528	1,022 3459
13	1,04745	0,020 1333	11,223	1,050 1090
14	1,05110	0,021 6440	11,959	1,077 6949
15	1,05475	0,023 1496	12,738	1,105 1012
16	1,05840	0,024 6498	13,562	1,132 3237
17	1,06205	0,026 1450	14,433	1 159 3566
18	1,06570	0,027 6350	15,354	1,186 2215
19	1,06935	0,029 1200	16,326	1,212 8798
20	1,07300	0,030 5997	17,367	1,239 7248
21	1,07665	0,032 0343	18,439	1,265 7374
22	1,08030	0,033 5444	19,594	1,292 1231
23	1,08395	0,035 0093	20,791	1,317 8754
24	1,08760	0,036 4692	22,067	1,343 7433
25	1,09125	0,037 9244	23,407	1,369 3458
26	1,09490	0,039 3745	24,822	1,394 8368
27	1,09855	0,040 8199	26,311	1,419 1374
28	1,10220	0,042 2604	27,880	1,445 2928
29	1,10585	0,043 6963	29,553	1,470 6016
30	1,10950	0,045 1273	31,264	1,495 0445
31	1,11315	0,046 5538	33,093	1,519 7361
32	1,11680	0,047 9754	35,013	1,544 2293
33	1,12045	0,049 3925	37,024	1,568 4833
34	1,12410	0,050 8049	39,150	1,592 7318
35	1,12770	0,052 1936	41,375	1,616 7380
36	1,13140	0,053 6162	43,737	1,640 8490
37	1,13505	0,055 0151	46,162	1,664 2846
38	1,13870	0,056 4093	48,750	1,687 9746
39	1,14235	0,057 7993	51,430	1,711 2165
40	1,14600	0,059 1846	54,291	1,734 7278
41	1,14965	0,060 5657	57,217	1,757 5251
42	1,15330	0,061 9423	60,319	1,780 4541
43	1,15695	0,063 3156	63,567	1,803 2317
44	1,16060	0,064 6826	67,083	1,826 6125
45	1,16425	0,066 0463	70,523	1,848 3308
46	1,16790	0,067 4057	74,245	1,870 6672
47	1,17155	0,068 7609	78,136	1,892 8512
48	1,17520	0,070 1118	82,204	1,914 8930
49	1,17885	0,071 4586	86,454	1,936 7851
50	1,18250	0,072 8011	90,897	1,958 5495
51	1,18615	0,074 1396	95,531	1,980 1443
52	1,18980	0,075 4740	100,37	2,001 6039
53	1,19345	0,076 8042	105,42	2,022 9230
54	1,19710	0,078 1304	110,69	2,044 1084
55	1,20075	0,079 4526	116,19	2,065 1688

Temperatur + C.	1 + 0,00365 × t		Spannung p in Millimeter	
	numerus	logarithmus	numerus	logarithmus
56	1,20440	0,080 7707	121,92	2,086 0750
57	1,20805	0,082 0849	127,89	2,106 8366
58	1,21170	0,083 3951	134,12	2,127 4935
59	1,21535	0,084 7014	140,59	2,147 9544
60	1,21900	0,086 0037	147,34	2,168 3207
61	1,22265	0,087 3022	154,38	2,188 5910
62	1,22630	0,088 5967	161,69	2,208 6832
63	1,22995	0,089 8876	169,28	2,228 6057
64	1,23360	0,091 1744	177,19	2,248 4392
65	1,23725	0,092 4575	185,42	2,268 1566
66	1,24090	0,093 7368	193,96	2,287 7122
67	1,24455	0,095 0124	202,84	2,307 1536
68	1,24820	0,096 2842	212,07	2,326 4792
69	1,25185	0,097 5523	221,73	2,345 8245
70	1,25550	0,098 8167	231,59	2,364 7198
71	1,25915	0,100 0775	241,91	2,383 6538
72	1,26280	0,101 3346	252,61	2,402 4505
73	1,26645	0,102 5881	263,72	2,421 1431
74	1,27010	0,103 8379	275,23	2,439 6958
75	1,27375	0,105 0842	287,16	2,458 1239
76	1,27740	0,106 3269	299,53	2,476 4403
77	1,28105	0,107 5661	312,34	2,494 6276
78	1,28470	0,108 8017	325,61	2,512 6977
79	1,28835	0,110 0339	339,34	2,530 6351
80	1,29200	0,111 2625	353,55	2,548 4508
81	1,29565	0,112 4877	368,28	2,566 1781
82	1,29930	0,113 7094	383,50	2,583 7654
83	1,30295	0,114 9278	399,25	2,601 2449
84	1,30660	0,116 1427	415,52	2,618 5919
85	1,31025	0,117 3542	432,35	2,635 8355
86	1,31390	0,118 5623	449,74	2,652 9615
87	1,31755	0,119 7671	467,70	2,669 9674
88	1,32120	0,120 9686	486,25	2,686 8596
89	1,32485	0,122 1668	505,40	2,703 6352
90	1,32850	0,123 3616	525,17	2,720 2999
91	1,33215	0,124 5431	545,57	2,736 8505
92	1,33580	0,125 7414	566,62	2,753 2919
93	1,33945	0,126 9265	588,33	2,769 6210
94	1,34310	0,128 1083	610,71	2,785 8350
95	1,34675	0,129 2870	633,78	2,801 9385
96	1,35040	0,130 4624	657,57	2,817 9420
97	1,35405	0,131 6347	682,07	2,833 8289
98	1,35770	0,132 8038	707,30	2,849 6037
99	1,36135	0,133 9698	733,29	2,865 2758
100	1,36500	0,135 2327	760,00	2,880 8136

Hülfstabelle zur Berechnung der Dichtigkeiten und Volume des Wasserdampfs bei gegebenen Spannungen und Temperaturen über 100° C.

Temperatur + C.	1 + 0,00365 × t		Spannung p in Millimeter	
	numerus	logarithmus	nnmerus	logarithmus
100,00	1,36500	0,135 1327	760	2,880 8136
112,20	1,40953	0,149 0743	1140	3,056 9049
121,40	1,44311	0,159 2994	1520	3,181 8436

Temperatur + C.	1 + 0,00365 × t numerus	1 + 0,00365 × t logarithmus	Spannung p in Millimeter numerus	Spannung p in Millimeter logarithmus
128,80	1,47012	0,167 3528	1900	3,278 7536
135,10	1,49312	0,174 0947	2280	3,357 9384
140,60	1,51319	0,179 8936	2660	3,424 8816
145,40	1,53071	0,184 8929	3040	3,482 8736
149,06	1,54407	0,188 6670	3420	3,534 0261
153,08	1,55874	0,192 7737	3800	3,579 7836
156,80	1,57232	0,196 5409	4180	3,621 1763
160,20	1,58473	0,199 9553	4560	3,658 9648
163,48	1,59670	0,203 2233	4940	3,693 7269
166,50	1,60772	0,206 2104	5320	3,725 9116
169,37	1,61820	0,209 0322	5700	3,755 8749
172,10	1,62817	0,211 6998	6080	3,783 9036
177,10	4,64642	0,216 5407	6840	3,835 0561
181,60	1,66284	0,220 8504	7600	3,880 8136
186,03	1,67901	0,225 0533	8360	3,922 2063
190,00	1,69350	0,228 7852	9120	3,959 9948
193,70	1,70701	0,232 2361	9880	3,994 7569
197,19	1,71974	0,235 4628	10640	4,026 9416
200,48	1,73175	0,238 4852	11400	4,056 9049
203,60	1,74314	0,241 3323	12160	4,084 9336
206,57	1,75398	0,243 7770	12920	4,111 2625
209,40	1,76431	0,246 5749	13680	4,136 0861
212,10	1,77417	0,248 9953	14440	4,159 5672
214,70	1,78366	0,251 3121	15200	4,181 8436
217,20	1,79278	0,253 5270	15960	4,203 0329
219,60	1,80154	0,255 8849	16720	4,223 2363
221,90	1,80994	0,257 6642	17480	4,242 5414
224,20	1,81833	0,259 6727	18240	4,261 0248
226,30	1,82563	0,261 4127	19000	4,278 7536
236,20	1,86213	0,270 0100	22800	4,357 9348
244,85	1,89370	0,277 3112	26600	4,424 8816
252,55	1,92181	0,283 7105	30400	4,482 8736
259,52	1,94725	0,289 1987	34200	4,534 0261
265,89	1,97050	0,294 5764	38000	4,579 7836

Tabelle über Spannung, Dichtigkeit und Volumen des Wasserdampfes bei Temperaturen von − 32° C. bis 100° C.

(Die Spannung in Millimetern in Tabelle pag. 232.)

Temperaturen − C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
32	0,142	0,00000 0375		2 664 941	
			30		196055
31	0,154	0405		2 468 886	
			33		186279
30	0,167	0438		2 282 607	
			37		175871
29	0,212	0475		2 106 736	
			38		158272
28	0,198	0513		1 948 464	
			42		146750
27	0,215	0555		1 801 714	
			47		138420
26	0,234	0601		1 663 294	

Temperaturen − C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
			50		126168
25	0,254	0,00000 0651	55	1 537 126	119770
24	0,276	0706	57	1 417 356	107174
23	0,300	0763	63	1 310 182	100234
22	0,326	0826	70	1 209 948	94073
21	0,355	0896	117	1 115 875	128850
20	0,403	1013	86	987 025	77870
19	0,439	1099	94	909 155	70853
18	0,468	1193	131	838 302	82907
17	0,521	1324	78	755 395	41942
16	0,566	1402	118	713 453	55342
15	0,616	1520	127	658 111	50799
14	0,671	1647	135	607 312	46228
13	0,729	1782	148	561 084	42883
12	0,792	1930	158	518 201	39359
11	0,860	2088	171	478 842	36188
10	0,934	2259	164	442 654	33400
9	1,014	2443	199	409 254	30733
8	1,101	2642	213	378 521	28219
7	1,194	2855	159	350 302	26100
6	1,295	3014	455	324 202	42485
5	1,496	3469	119	281 717	3743
4	1,521	3598	245	277 974	17781
3	1,646	3843	349	260 193	21612
2	1,786	4192	330	238 581	17447
1	1,934	4522	533	221 134	23295
0	2,169	0,00000 5055		197 839	
+ C.					
0	2,169	0,00000 5055	342	197 839	12551
1	2,325	5397	363	185 288	11682
2	2,490	5760	384	173 606	10839
3	2,665	6144	408	162 767	10137
4	2,853	6552	431	152 630	9433
5	3,051	6983	457	143 197	8789
6	3,263	7440	484	134 408	8207
7	3,487	7924	510	126 201	7635
8	3,721	8434	529	118 566	7125
9	3,977	8973		111 441	

Temperaturen + C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
10	4,246	0,00000 9546	573	104 754	6687
11	4,529	0,00001 0146	600	98 575	6179
12	4,830	1 0783	637	92 739	5736
13	5,149	1 1445	662	87 300	5439
14	5,487	1 2164	719	82 212	5088
15	5,844	1 2911	747	77 453	4759
16	6,222	1 3699	788	72 999	4454
17	6,622	1 4529	830	68 830	4169
18	7,044	1 5403	874	64 924	3906
19	7,490	1 6322	919	61 268	3656
20	7,968	1 7303	981	57 792	3476
21	8,460	1 8311	1008	54 612	3180
22	8,990	1 9391	1080	51 572	3040
23	9,539	2 0506	1115	48 767	2805
24	10,124	2 1691	1185	46 102	2665
25	10,739	2 2931	1240	43 608	2494
26	11,388	2 4237	1306	41 260	2348
27	12,071	2 5546	1309	39 145	2115
28	12,791	2 7042	1496	36 979	2166
29	13,559	2 8571	1529	35 001	1978
30	14,344	3 0194	1623	33 195	1806
31	15,183	3 1783	1589	31 464	1731
32	16,064	3 3517	1734	29 836	1628
33	16,987	3 5327	1810	28 307	1529
34	17,962	3 7234	1907	26 857	1450
35	18,983	3 9224	1990	25 494	1363
36	20,066	4 1328	2104	24 197	1297
37	21,179	4 3479	2151	23 000	1197
38	22,366	4 5769	2290	21 849	1151
39	23,596	4 8020	2251	20 776	1073
40	24,909	5 0531	2511	19 774	1002
41	26,275	5 3207	2676	18 795	979
42	27,674	5 5914	2707	17 885	910
43	29,143	5 8739	2825	17 025	860
44	30,778	6 1793	3054	16 183	842
45	32,356	6 4757	2964	15 477	706
46	34,063	6 7963	3206	14 714	763

Temperaturen + C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
47	35,849	0,00007 1302	3339	14 025	689
48	37,715	7 4781	3479	13 372	653
49	39,665	7 8403	3622	12 754	618
50	41,704	8 2179	3776	12 169	585
51	43,830	8 6103	3924	11 614	555
52	46,050	9 0186	4083	11 088	526
53	48,367	9 4434	4248	10 589	499
54	50,785	9 8853	4419	10 116	473
55	53,308	0,00010 3449	4596	9666,6	449,4
56	55,937	10 8221	4772	9240,5	426,1
57	58,676	11 3178	4957	8835,6	404,9
58	61,534	11 8331	5153	8450,7	384,9
59	64,503	12 3670	5339	8086,1	364,6
60	67,600	12 9222	2552	7738,8	347,3
61	70,830	13 4989	5767	7408,0	330,8
62	74,183	14 0960	5971	7094,2	313,8
63	77,666	14 7139	6179	6796,3	297,9
64	81,295	15 3559	6420	6512,2	284,1
65	85,071	16 0217	6656	6241,5	270,7
66	88,995	16 7103	6886	5984,3	257,2
67	93,063	17 4241	7138	5739,2	245,1
68	97,269	18 1637	7396	5505,5	233,7
69	101,730	18 9357	7720	5281,0	224,5
70	106,010	19 7203	7846	5071,0	210,0
71	110,988	20 5393	8190	4868,7	202,3
72	115,897	21 3858	8465	4676,0	192,7
73	120,995	22 2620	8762	4491,9	184,1
74	126,275	23 1669	9049	4316,5	175,4
75	131,749	24 1018	9349	4149,1	167,4
76	137 424	25 0682	9664	3989,1	160,0
77	143,302	26 0658	9976	3835,6	153,5
78	149,290	27 0960	10302	3690,6	145,0
79	155,780	28 1586	10626	3551,3	139,3
80	162,209	29 2549	10963	3418,2	133,1
81	168,967	30 3878	11329	3290,9	127,3
82	175,960	31 5548	11670	3169,1	121,8
83	183,176	32 7587	12039	3052,6	116,5

Temperaturen + C.	Spannung in preuſs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
84	190,641	0,00033 9984	12397	2941,3	111,3
85	198,362	35 2770	12786	2834,7	106,6
86	206,341	36 5940	13170	2732,7	102,0
87	214,581	37 9499	14559	2635,0	97,7
88	223,092	39 3460	13961	2541,5	93,5
89	231,878	40 7829	14369	2452,0	89,5
90	240,948	42 2627	14789	2366,3	85,7
91	250,308	43 7842	15215	2283,9	82,4
92	259,965	45 3482	15640	2205,1	78,8
93	269,926	46 9574	16092	2129,6	75,5
94	280,194	48 6112	16538	2057,1	72,5
95	290,778	50 3108	16996	1987,2	69,9
96	301,693	52 0582	17474	1920,9	66,3
97	312,934	53 8523	17941	1857,4	63,5
98	324,509	55 6949	18426	1795,6	61,8
99	336,433	57 5858	18909	1736,5	59,1
100	348,688	59 5238	19380	1680,0	56,5

Tabelle über Dichtigkeit und Volumen des Wasserdampfs bei Temperaturen über 100° und den auf Tabelle pag. 236 angegebenen Spannungen.

Temperatur + C.	Dichtigkeit	Volumen	Temperatur + C.	Dichtigkeit	Volumen
100,00	0,0005 9524	1680,0	193,70	0,0061 8772	161,61
112,20	0,0008 6465	1156,5	197,19	0,0066 1437	151,19
121,40	0,0011 2604	888,07	200,48	0,0070 3768	142,09
128,80	0,0013 8169	723,75	203,60	0,0074 5781	134,09
135,10	0,0016 3245	612,56	206,57	0,0078 7944	126,91
140,60	0,0018 7931	532,11	209,40	0,0082 8936	120,64
145,40	0,0021 2320	470,99	212,10	0,0087 0124	114,92
149,06	0,0023 6893	422,31	214,70	0,0091 1048	109,76
153,08	0,0026 0627	383,69	217,20	0,0095 1734	105,07
156,80	0,0028 4214	351,85	219,60	0,0099 1656	100,84
160,20	0,0030 7623	325,07	221,90	0,0103 2490	96,853
163,48	0,0033 0760	302,33	224,20	0,0107 2410	93,248
166,50	0,0035 3762	282,68	226,30	0,0111 2630	89,877
169,37	0,0037 6576	265,55	236,20	0,0130 8980	76,395
172,10	0,0039 9221	250,49	244,85	0,0150 1690	66,591
177,10	0,0044 4145	225,15	252,55	0,0169 1114	59,133
181,60	0,0048 8622	204,66	259,52	0,0187 8612	53,231
186,03	0,0053 2308	187,86	265,89	0,0206 1660	48,505
190,00	0,0057 5731	173,69			

Decimal als Vorwort zeigt an, dafs der Begriff des Hauptworts, vor dem es sich befindet, in einer Beziehnng zur Zahl 10 steht.

Decimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner die Zahl 10 oder eine ganze Potenz von 10 ist; als $\frac{1}{10}, \frac{3}{100}, \frac{7}{1000}$ u. s. w. Die Schreibweise nnd nähere Erklärungen s. Bd. I, pag. 434, No. 4.

Die 4 Species der Decimalbrüche.

1. Die Addition und die Subtraction geschehen wie mit ganzen Zahlen: Es werden Einer unter Einer, Zehntel unter Zehntel n. s. w. gesetzt und addirt oder subtrahirt.

Addition.

0,34	0,3400
21,0873	21,0873
420,451	420,4510
441,8783	441,8783

Bei der zweiten Darstellung sind die fehlenden Decimalstellen durch Nullzeichen ersetzt nm in den Summanden gleich viel Stellen zn erhalten.

Subtraction.

0,485	21,89	21,890
0,037	15,008	15,008
0,448	6,882	6,882

1,0005	1,0005
0,89	0,8900
0,1105	0,1105

2. Multiplication.

Regel. Multiplicire Decimalbrüche, als wenn sie ganze Zahlen wären und gebe dem Product so viel Decimalstellen, als die Factoren znsammengenommen haben.

Z. B. $0{,}34 \times 0{,}86$ Rechne:

```
 34
 86
---
204
272
------
0,2924
```

$10{,}5 \times 0{,}07$ Rechne

```
105
  7
-----
0,735
```

Denn es ist

$$0{,}34 \times 0{,}86 = \frac{34}{100} \times \frac{86}{100} = \frac{2924}{1000} = 0{,}2924$$

nnd

$$10{,}5 \times 0{,}07 = \frac{105}{10} \times \frac{7}{100} = \frac{735}{1000} = 0{,}735$$

Eben so ist

$0{,}008 \times 0{,}04 = 0{,}00032$
$0{,}372106 \times 0{,}0054 = 0{,}0020093724$
$5{,}78 \times 34 = 196{,}52$
$0{,}000054 \times 3785 = 0{,}20439$

Die abgekürzte Multiplication s. Bd. I, pag. 5. Hierbei ist zn bemerken, dafs auch vorgezogen wird, statt mit der letzten Ziffer (6) des Multiplicators, mit der ersten (5) desselben anzufangen, so dafs 1927 die oberste nnd 23 die unterste Reihe der Partialproducte wird.

4. Division.

Regel. Verrücke das Komma im Divisor nm so viele Stellen, dafs derselbe eine ganze Zahl wird; dann das Komma im Dividendus um eben so viele Stellen und dividire. Z. B.

1. Beispiel. 3,45 : 0,2.

Hierfür schreib 34,5 : 2 und dividire. Denn es ist

$$3{,}45 : 0{,}2 = \frac{345}{100} : \frac{2}{10} = \frac{345}{10} : 2 = 34{,}5 : 2$$

Nnn dividirt:

```
      | 2
34,5  |17,25
2
--
14
14
--
 5
 4
--
 10
 10
```

Sprich: 2 in 3 geht 1 mal, in 14 geht 7 mal; hinter 17 wird das Komma gesetzt, weil jetzt 34 Ganze dividirt sind. 2 in $\frac{5}{10}$ geht $\frac{2}{10}$ mal, bleibt $\frac{1}{10}$; eine Null hinter 1 gesetzt gibt $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$; 2 in $\frac{10}{100}$ geht $\frac{5}{100}$ mal.

2. Beispiel 0,0005 : 25 = 0,00002

Hier ist der Divisor schon eine ganze Zahl. Also: 25 in 0 Einer geht 0 mal, 0 gesetzt mit Komma dahinter; 25 in $\frac{0}{10}$ geht $0 = \frac{0}{10}$ mal, die 0 als Zehntel gesetzt, 25 in $\frac{0}{100}$, desgleichen in $\frac{0}{1000}$ geht 0 mal, die Nullen als Hnndertel und Tausendtel gesetzt, 25 in $\frac{5}{10000}$ geht 0 $= \frac{0}{10000}$ mal, diese 0 als 4te Stelle gesetzt, hinter 5 eine 0 gedacht macht $\frac{5}{10000}$ zn $\frac{50}{100000}$, hierin mit 25 dividirt geht $\frac{2}{100000}$ mal.

3. Beispiel 2034 : 0,0018 schreibe 20340000 : 18 gibt 1130000.

So ist $400 : 0{,}25 = 1600$
$40 : 0{,}25 = 160$
$4 : 0{,}25 = 16$
$4 : 0{,}025 = 160$
$4 : 0{,}0025 = 1600$
$0{,}0001 : 0{,}02 = 0{,}005$
$45 : 0{,}1 = 450$ u. s. w.

4. Das Ausziehen einer Quadratwurzel s. Bd. I, pag. 241, No. 5; einer Kubikwurzel Bd. I, pag. 242. Dafs die Klassentheilung der Potenz vom Komma ab geschehen mufs ist klar, denn es ist

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} \text{ oder } 0{,}1^2 = 0{,}01$$
$$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} \text{ oder } 0{,}1^3 = 0{,}001$$

u. s. w.

5. Aus der Lehre von der Division der Decimalbrüche entspringt die Regel zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, denn man hat nur nöthig, die Division, welche der gemeine Bruch verlangt, auf die obige Weise wirklich auszuführen, indem man mit Beobachtung des Komma dem Zähler Nullen anhängt. Z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{1{,}0}{2} = 0{,}5$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3{,}00}{4} = 0{,}75$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1{,}000\ldots}{3} = 0{,}3333\ldots$$

Das letzte Beispiel gibt einen Decimalbruch mit einer unbegrenzten Anzahl von Ziffern und dies geschieht bei der Verwandlung eines jeden Bruchs, dessen Nenner aufser der 2 und der 5 noch andere Primfactoren enthält.

Dagegen hat ein solcher Decimalbruch die Eigenschaft, dafs eine gewisse Anzahl von Ziffern in derselben Reihenfolge immer wiederkehrt. Z. B.

$$\frac{1}{11} = 0{,}09\ 09\ 09\ 09\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ 142857\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{44} = 0{,}02\ 27\ 27\ 27\ 27\ldots\ldots$$

Denn mit welcher Zahl und in welche Zahl man auch dividiren mag, so können immer nur so viele verschiedene Reste entstehen als der Divisor Einheiten enthält weniger 1. Z. B. bei der Division mit 6 können nur die Reste 1, 2, 3, 4, 5; bei der Division mit 5 nur die Reste 1, 2, 3, 4 vorkommen, und da die zu dem jedesmaligen Rest genommene Endziffer immer $= 0$ ist, so hat man bei dem Divisor 6 die Partialdividenden 10, 20, 30, 40, 50; bei der Division mit 5 die Partialdividenden 10, 20, 30, 40. Wo also ein Rest zum zweiten Mal vorkommt, mufs eine Wiederkehr von Ziffern im Quotient beginnen.

Bei der Division $\frac{1}{7} = \frac{1{,}\overset{3}{0}\overset{2}{0}\overset{6}{0}\overset{4}{0}\overset{5}{0}\overset{1}{0}\overset{3}{0}}{7} = 0{,}142857$ erhält man auf einanderfolgend die Reste 3, 2, 6, 4, 5, 1; und da der Dividend mit 1 anfängt, so fangen auch die weiteren Reste wieder mit 3 an, werden der Reihenfolge nach dieselben und eben so ist es mit den ferner folgenden Ziffern im Quotienten.

Man hat auch viele Fälle, wo die Entwicklung einer Zahl in einen Decimalbruch bis ins Unendliche fortlaufende Ziffern ohne Wiederkehr erzeugt. Dies findet z. B. statt, wenn eine Wurzel aus einer unvollkommenen Potenz gezogen wird als $\sqrt[2]{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$ u. s. w. wie Bd. I, pag. 241, 242 u. f. wo bei dem Gewinn jeder neuen Ziffer in der Wurzel ein Rest entsteht, der noch nicht dagewesen ist und ebenso ein neuer noch nicht da gewesener Divisor hervorgeht.

6. Decimalbrüche mit begrenzter Anzahl von Ziffern heifsen geschlossene D.; mit unbegrenzter Stellenanzahl fortlaufende D. Letztere mit wiederkehrenden Ziffern der Reihenfolge nach heifsen wiederkehrende oder circulirende oder periodische D. Die immer wiederkehrende Reihe von Ziffern heifst Periode. Fängt die Periode mit der ersten Ziffer nach dem Komma an, so heifst der D. vollständig periodisch wie: 0,47 47 47..; gehen nach dem Komma der ersten Periode eine oder mehrere Ziffern voran, so heifst der D. unvollständig periodisch wie 0,31 47 47 47.... Die Perioden heifsen 1ziffrig, 2ziffrig, ...$n$ziffrig, je nachdem sie aus 1, 2, ...n Ziffern bestehen.

7. Ein geschlossener D. wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man ihn als ganze Zahl in den Zähler und den zugehörigen decadischen Nenner darunter schreibt, wonach man wo möglich noch heben kann. Als

$$0{,}575 = \frac{575}{1000} = \frac{23}{40}$$

8. Ein vollständig periodischer D. ist = demjenigen gemeinen Bruch, der die Periode zum Zähler und den zu ihr gehörigen decadischen Nenner weniger 1 zum Nenner hat.

Z. B. $0{,}333\ldots$ ist $= \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$0{,}27\,27\,27\ldots = \frac{27}{100-1} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$$0{,}296\,296\ldots = \frac{296}{1000-1} = \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$$

Denn es sei $0{,}abcd\ldots n\;abcd\ldots n\ldots$ ein D. von $n$ziffriger Periode, der zu dieser Periode gehörige decadische Nenner also $= 10^n$, sein Werth $= x$, so hat man, wenn man mit 10^n multiplicirt

$10^n x = abcd\ldots n,\; abcd\ldots n\; abcd\ldots n\ldots\ldots$

hierzu

$x = \qquad 0,\; abcd\ldots\; n\; abcd\ldots\; n\ldots\ldots$

folglich subtrahirt, wobei die Decimalstellen sich aufheben

$$(10^n - 1)\,x = abcd\ldots n$$

und
$$x = \frac{abcd\ldots n}{10^n - 1}$$

9. Ein **unvollständig periodischer** D. ist = demjenigen gemeinen Bruch dessen Zähler = ist der Differenz zwischen den Vorziffern + der ersten Periode als ganze Zahl und den Vorziffern allein als ganze Zahl, und dessen Nenner = ist dem Product aus dem zur Periode ohne Vorziffern gehörenden decadischen Nenner weniger 1 multiplicirt mit dem zu den Vorziffern gehörenden dekadischen Nenner. Z. B.

$$0{,}3555\ldots = \frac{35-3}{(10-1)\times 10} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

$$0{,}27\,666\ldots = \frac{276-27}{(10-1)\times 100} = \frac{249}{900} = \frac{83}{300}$$

$$0{,}00\,15\,15\ldots = \frac{15-0}{(100-1)\times 100} = \frac{15}{9900} = \frac{1}{660}$$

Denn es sei

$0{,}abc\ldots m\; ABC\ldots .\; N\; ABC\ldots .\; N\ldots\ldots$

ein D. dessen Perioden $ABC\ldots N$ aus n Ziffern bestehen, welchen m Ziffern $abc\ldots m$ voranstehen, sein Werth sei x so ist

$$10^m x = abc\ldots m,\qquad ABC\ldots .N\; ABC\ldots .N\ldots .$$

$$10^n \cdot 10^m x = abc\ldots m\; ABC\ldots N,\; ABC\ldots .N\; ABC\ldots .N\ldots .$$

folglich subtrahirt, wobei die Decimalstellen sich aufheben

$$10^m(10^n - 1)x = abc\ldots m\; ABC\ldots N - abc\ldots .m$$

und
$$x = \frac{abc\ldots m\; ABC\ldots N - abc\ldots .m}{(10^n - 1)\,10^m}$$

Anmerk. Sollte es nicht angemessen gefunden werden, daſs man Buchstaben in dekadischer Ordnung wie Ziffern schreibt, so kann man den Beweisen ad 8 und 9 auch folgende Form geben: Der Werth einer $n$ziffrigen Periode als ganze Zahl sei A so ist der Werth des vollständigen D.

$$x = \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} + \frac{A}{10^{4n}} + \ldots .$$

mit 10^n multiplicirt gibt

$$10^n x = A + \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} + \frac{A}{10^{4n}} + \ldots\ldots$$

subtrahirt gibt, da sämmtliche Glieder der oberen Reihe gegen die ihnen gleichen Glieder der unteren Reihe sich aufheben

$$10^n x - x = A$$

woraus
$$x = \frac{A}{10^n - 1}$$

Es sei bei dem unvollständig periodischen D. der Werth der m Vorziffern, diese als ganze Zahl $= B$, so ist der Werth des Bruchs =

$$x = \frac{B}{10^m} + \frac{A}{10^{m+n}} + \frac{A}{10^{m+2n}} + \frac{A}{10^{m+3n}} + \ldots$$

mit 10^m multiplicirt gibt

$$10^m x = B + \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}}$$

Diese Gleichung mit 10^n multiplicirt gibt

$$10^m \cdot 10^n x = 10^n B + A + \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} + \ldots .$$

Die zweite Gleichung von der 3ten abgezogen

$$10^m 10^n x - 10^m x = 10^n B + A - B$$

woraus $x = \frac{10^n B + A - B}{(10^i - 1)\, 10^n}$

Rechnung mit periodischen Decimalbrüchen.

10. Da alle geschlossene und alle periodische D. auf bestimmte in gemeinen Brüchen darstellbare Werthe zurückgeführt werden, alle übrigen D. aber irrational sind, so mufs aus den Rechnungen mit geschlossenen und mit periodischen D. wiederum ein geschlossener oder ein periodischer Decimalbruch als Resultat hervorgehen, sobald man nicht abgekürzt rechnet und die vielleicht schriftlich weggelassenen nächst folgenden Ziffern der Periode unberücksichtigt läfst.

Addition: Beispiele

1) 0, 254
0, 777 77...
1, 031 77....

2) 0, 38
0, 056 56....
0, 43 65 65....

3) 0, 24 24...
0, 75 75...
0, 99 99... = 1

4) 0, 24 24....
0, 55 55...
0, 79 79...

5) 0, 25 25 25..
0, 00 77 77...
0, 26 03 03....

6) 0, 22 222...
0, 34 777...
0, 56 99.... = 0,57

7) 0, 253 253 253...
0, 65 65 65 65 65...
0, 909 818 909 818....

Subtraction: Beispiele

1) 1, 254
0, 77 77...
0, 476 222....

2) 0, 38
0, 056 56...
0, 32 343 343....

3) 1, 24 24 24....
0, 75 75 75.....
0, 48 48 48....

4) 1, 24 24...
0, 55 55...
0, 78 78 78....

5) 0, 25 25 25...
0, 00 77 77..
0, 24 47 47....

6) 0, 568 55....
0, 555 55...
0, 013

7) 0, 56 56....
0, 243
0, 322 65 65...

Multiplication:

1. Beispiel 3879 × 0,777.....

Multiplicire 7 × 3879 so erhält man 27153 als Partialprodukt jeder einzelnen Multiplicationsreihe. Jede vollständige senkrechte Ziffernreihe besteht aber aus der Summe der Ziffern dieses Partialproducts = 3 + 5 + 1 + 7 + 2 = 18, hierzu von der vorherigen senkrechten Reihe die Zehnerzahl 1 addirt gibt 19, betrachte die 19 als die Summe der letzten vollständigen senkrechten Reihe so schreib 9

1 (im Sinn) + 5 + 1 + 7 + 2 = 16;
6 vor die 9 geschrieben 69

1 (im Sinn) + 1 + 7 + 2 = 11;
1 vor die 6 geschrieben 169

1 (im Sinn) + 7 + 2 = 10;
0 vor die 6 geschrieben 0169

1 (im Sinn) + 2 = 3;
3 vor die 0 geschrieben 30169..

und es ist

3879 × 0,777.... = 3016,999 ...... = 3017

Die wirklich ausgeführte Multiplication hat die Gestalt.

```
     2(7153)
    27(153)
   271(53)
  2715(3)
 27153
27153
3016,99
```

Das Komma bestimmt sich aus dem gleich bleibenden Partialproduct 27153, welches man als 0,7 × 3879 betrachtet, so dafs eine Decimalstelle abgeschnitten wird.

2. Beispiel.

305217 × 0,341 341 .....

Die Periode besteht aus mehreren Ziffern.

Multiplicire mit nur einer Periode die Zahl. Man erhält 305217×341=104078997.

Nun liefse sich hier dieselbe Regel wie bei dem ersten Beispiel anwenden, man hätte nur zu beachten, dafs wenn die Producte aus den folgenden Perioden hinzutreten, die auf einander folgenden vollständigen senkrechten Reihen bestehen
aus der 1. + 4. + 7. Ziffer = 1 + 0 + 9 = 0
aus der 2. + 5. + 8. Ziffer = 0 + 7 + 9 = 16
aus der 3. + 6. + 9. Ziffer = 4 + 8 + 7 = 19

Um nun bei Anwendung der Regel keinen Irrthum zu begehen ist es besser, wenn man die Reihen wirklich untereinander setzt und addirt, nämlich

```
         104(078 997)
      104078(997)
   104078997
104078997
104183,180 180 180...
```

Das Komma bestimmt sich wieder aus dem Partialproduct der ersten Periode
305217 × 0,341 = 104078,997

3. Beispiel. Ist der D. ein unvollständig periodischer D., stehen z. B. in dem vorigen Beispiel der Periode noch die Ziffern 76 voran, ist also die Aufgabe:
305217 × 0,76341 341....
so hat man aus dem vor. Bsp.

	305217 × 0,00 341 341 ... =	1041, 83 180 180....
hierzu	305217 × 0,76	= 231964, 92
	Product	= 233006, 75 180 180....

Hat man periodische D. mit periodischen D. zu multipliciren so geschieht dies einfacher wenn man dieselben in gemeine Brüche verwandelt; desgleichen bei Division durch periodische D.

11. Ein D., der weder geschlossen noch periodisch ist, kann in seinem Werth nicht angegeben werden, z. B. der D., welcher $\sqrt[2]{15}$ ausdrückt und der als eine irrationale Zahl aus unbegrenzt vielen Ziffern besteht, ohne Perioden zu enthalten. Man gibt dessen Werth also näherungsweise auf eine bestimmte Anzahl Decimalstellen an, wobei man mit deren Anzahl, wie bei den Logarithmen geschieht, den Grad der Genauigkeit beliebig feststellt oder wahrnimmt.

Decimalfufs ist der Fufs als der 10te Theil der Ruthe, wenn diese, wie in Preufsen, das Normallängenmaafs ist, und er wird wieder in 10 Decimalzoll, der Zoll wieder in 10 Decimallinien eingetheilt. Decimalruthe sagt man nicht, sondern schlechtweg Ruthe, weil das Vorwort: Decimal nur auf diejenige Gröfse sich bezieht, welche der 10te Theil einer anderen Gröfse ist und weil dieselbe Ruthe auch andere Eintheilungen erhält, wie in Preufsen für Werkmaafs in 12 Fufse, so dafs die Ruthe als Werkmaafs unnützer Weise Duodecimalruthe genannt werden würde. Ist der Fufs das Normalmaafs, so nennt man ihn aus demselben Grunde schlechtweg Fufs.

Decimallinie s. u. Decimalfufs.

Decimalmaafs ist ein Maafs mit Decimal-Eintheilung, wie in Preufsen für Feldmesser die Längen- und Flächenmaafse, wenigstens die Ruthe und die □Ruthe; die Meile gehört schon nicht mehr dazu, denn sie hat 2000 Ruthen; der Morgen auch nicht, denn dieser enthält 180 □Ruthen. Mit den Kubikmaafsen und den Münzen haben wir ebenfalls nicht Decimalmaafse, jedoch sind die neuesten Gewichte, das Zollgewicht, in Centnern und Pfunden wenigstens, nach dem Decimalsystem eingerichtet; das unmittelbar hierauf folgende Loth ist wieder, statt $^1/_{10}$ oder $^1/_{100}$ Pfund zu sein, $^1/_{30}$ desselben.

In Frankreich ist die Decimaltheilung ganz allgemein eingeführt. Das Normallängenmaafs, das Meter (etwa 3′ 2″ preufs.) ist in 10tel, 100tel, 1000tel, in Decimeter, Centimeter und Millimeter getheilt; auch die gröfseren Längenmaafse sind 10fache, 100fache, 1000fache und 10000fache des Meters; nämlich das Decameter, das Hectometer, das Kilometer und das Miriameter.

Desgleichen die Feldmaafse: Die Are ist = 100□^{m} = 1□Decameter, sie ist eingetheilt in 100 Centiaren zu 1□^{m}, 100 Aren sind = der Hectare.

Desgleichen die Körpermaafse: die Stère, eingetheilt in 10 Decisteren, ist der Cubikmeter. Das Liter, zu 10 Deciliter zu 10 Centiliter zu 10 Milliliter ist = dem Kubikdecimeter = $^1/_{1000}$ Cubikmeter; 10 Liter sind der Decaliter, 10 Decaliter der Hectoliter, 10 Hectolitor der Kiloliter.

Desgleichen die Gewichte: das Gramm ist das Gewicht eines Cubikdecimeters destillirten Wassers bei seiner gröfsten Dichtigkeit. Es wird eingetheilt in 10 Decigramme zu 10 Centigramme zu 10 Milligramme. 10 Gramme sind das Decagramm, 10 Decagramme sind das Hektogramm, 10 Hectogramm das Kilogramm. (2 Zollpfund), 10 Kilogramme sind das Miriagramm.

Endlich haben die Münzen ebenfalls Decimalsystem: 1 Franc ist = 100 Centimes.

Das Decimalsystem bei Maafsen gewährt eine grofse Erleichterung beim Rechnen, weil jedes kleinere Maafs als Decimalbruch geschrieben werden kann, so dafs nur immer wie mit ganzen Zahlen zu rechnen ist.

Decimalstellen oder Decimalen sind die Ziffern, welche zu einem Decimalbruch gehören.

Decimalsystem ist im Allgemeinen jedes System, bei welchem alle Graduirungen nach Zehnteln und Zehnfachen gesche-

hen. Im Besondern ist D. gleichbedeutend mit dem dekadischen Zahlensystem.

Decimalzahlen sind die nach dem dekadischen System geschriebenen Zahlen.

Deckung in der Geometrie s. v. w. Congruenz (s. d.)

Declination eines Gestirns s. v. w. Abweichung eines Gestirns (s. d.). Sie ist für die Gestirne oder die Orte des Himmels das, was für die Orte der Erdoberfläche nördliche und südliche geographische Breite ist

Declinationskreis s. v. w. Abweichungskreis (s. d.).

Decrement ist der Unterschied zweier aufeinander folgender Glieder einer abnehmenden Reihe, im Gegensatz von Increment, dem Unterschied derselben bei einer zunehmenden Reihe. Für beide sagt man jetzt allgemein: Differenz.

Definition ist die Darstellung aller wesentlichen Merkmale eines Gegenstandes zu seinem Begriff. (s. d.) Dieser entsteht also durch die Zusammenstellung aller Vorstellungen, sowohl der die dem Gegenstande mit noch anderen von ihm verschiedenen gemeinsam sind als der, die ihm allein zukommen.

Bei mathematischen D. darf man keine Eigenschaften als Merkmale angeben, deren Vorhandensein oder Möglichkeit erst erwiesen werden mufs. Dafs ein Quadrat diejenige 4seitige Figur ist, welche lauter gleiche Seiten und 4 rechte Winkel hat, hätte Euklid in No. 30 nicht voranstellen sollen; erst mufste bewiesen werden, dafs in jedem Viereck die Summe aller 4 Winkel = 4 Rechten ist, dafs also 4 rechte Winkel in einem Viereck möglich sind. Desgleichen war die 27te Erklärung, dafs Triangel rechtwinklig heifsen wenn sie einen rechten Winkel haben, nicht voranzustellen; es mufste erst erwiesen werden, dafs ein Dreieck nicht 2 und nicht 3 rechte Winkel haben kann, wenn man die Frage nicht hören will, wie ein Dreieck mit zweien oder dreien Rechten Winkeln heifse. Können doch in spärischen Dreiecken alle 3 Winkel rechte sein.

Dehnbar ist ein Fossil, wenn es sich durch einen Hammer oder zwischen Walzen strecken läfst.

Dekadik, dekadisches System, zehntheiliges System nämlich Zahlensystem ist das System nach welchem die Zahlen, d. h. die verschiedenen ganzen Vielfachen der Einheit ausgesprochen und geschrieben werden. Das System besteht darin, dafs die Zahlen von der Einheit ab aufwärts in Klassen gebracht sind, von denen jede als höchstes Vielfaches die 9fache Einheit derselben Klasse enthält, so dafs die 10fache Einheit derselben Klasse schon die Einheit der folgenden Klasse ausmacht; und zwar wie in der mündlichen so in der schriftlichen Bezeichnungsweise.

Wie nämlich die grofse Anzahl von Wörtern, aus welchen eine Sprache besteht, nur wenige Urlaute hat und mit nur wenigen verschiedenen Buchstaben geschrieben wird, so sind für jede noch so grofse Zahl nur wenige Urzahlwörter erforderlich und nur 9 verschiedene Zahlzeichen reichen aus, (Null ist keine Zahl und also ist das Nullzeichen kein Zahlzeichen) um sie lesbar darzustellen.

Die Urzahlwörter sind die ersten 10 Zahlen von 1 ab bis 10, also die 9 verschiedenen Vielfache der ersten Klasse und die darauf folgende Einheit der zweiten Klasse, nach welcher das ganze System den Namen führt. Dann die Zahl Hundert, die Zahl Tausend und die Million, welches eine neuere Bezeichnung ist. Alle übrigen Zahlen werden mit abgeleiteten Zahlwörtern bezeichnet: Zweizig, Dreizig (Zwanzig, Dreifsig sind Sprachausnahmen), Vierzig... Neunzig sind die 2, 3, 4, ... 9fachen der Zahl 10, der Einheit der zweiten Klasse; die Hunderte werden gezählt, desgleichen die Tausende und die Millionen. Alle zwischen liegende und die aus allen Klassen zusammengesetzten Zahlen werden als Rechenexempel ausgesprochen. Z. B.

98765321

Acht und Neunzig Millionen, sieben mal hundert fünf und sechzigtausend drei hundert und ein und zwanzig. D. h. man rechne das Exempel aus:

$$(8+9\times 10)\ 1000000+(7\times 100+5+6\times 10)\times 1000+3\times 100+1+2\times 10.$$

Wie man aus den alten Sprachen ersieht war schon das dekadische System bei den gebildeten Völkern des Alterthums in Gebrauch, aber auch wilde Völker zählen nach Zehnfachen, was jedenfalls von den 10 Fingern herkommt, die an beiden Händen eines Menschen sich befinden, wie auch heut bisweilen noch bei uns an Fingern abgezählt wird. Die dekadische Schreibart dagegen ist mit den dekadischen Sprachweisen nicht zugleich erfunden worden: die Griechen bedienten sich der Buchstaben ihres Alphabets, die beschwerliche Zahlschreibung der Römer ist bekannt. Das jetzt allgemein gebräuchliche dekadische Schreibsystem ist eine Erfindung und zwar eine uralte Erfindung

der Inder (auch ein Nullzeichen hatten sie), von denen die Araber es uns erst spät herüber gebracht haben, so dafs das System im 13ten Jahrhundert noch erst wenig bekannt war.

Dekadische Brüche sind Brüche, deren Zähler 1 und deren Nenner dekadische Zahlen sind als $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$.

Dekadische Ergänzung einer Zahl ist der Rest, wenn man die Zahl von der zunächst gröfseren dekadischen Zahl abzieht. Die dekadische E von der Zahl 44 ist $100 - 44 = 56$.

Dekadische Ganze nennt man die dekadischen Zahlen im Gegensatz zu dekadischen Brüchen

Dekadische Zahlen sind die Eins und die ganzen Potenzen von Zehn, näml. 1, 10, 100, 1000 u. s. w.

Dekadisches Zahlensystem s. v. w. Dekadik.

Dekagon ist das reguläre Zehneck.

Dekagonalzahl, zehneckige Zahl ist diejenige Polygonalzahl deren zu Grunde liegendes Polygon das Zehneck ist. Die Zahlen sind nämlich die Anzahl der Punkte, welche die Ecken und die Seiten in gleichbleibenden Entfernungen von einander aufnehmen, wenn die Seiten des Polygons ein, zwei, drei, ... n mal vergröfsert werden. Fig. 556 macht dies anschaulich. $Aa..A$ ist das Zehneck, dessen Seite = 1 ist; die Ecken enthalten in Summa 10 Punkte, mithin ist 10 die Grundzahl der Reihe für die Dzahlen.

Indem man sich vorstellt, dafs das Zehneck bis zu dem Punkt A, von dem man bei der Construction sämmtlicher die Reihe erzeugenden Polygone ausgeht, wenn man die Seiten immerfort kleiner nimmt, verschwindet, so dafs das Polygon in dem Punkt A nur einen Punkt bildet, ist 1 die erste Zahl der Reihe, 10 die zweite Zahl.

Verlängert man nun die beiden Seiten Aa bis b um dieselbe Länge Aa und construirt das Zehneck, dessen Seiten von der Länge Ab sind, so erhält jede Seite des zweiten Polygons noch einen Punkt in der Mitte. Zu den schon aufgezählten 10 Punkten kommen nun hinzu: 9 Punkte b in den Ecken und 8 Punkte c in den Mitten von noch 8 Seiten, zusammen also 17 Punkte, und die 3te D. ist = $10 + 17 = 27$.

Verlängert man wiederum die beiden Seiten Ab bis d um die Länge $Aa = 1$, so erhält jede der beiden Seiten 2 Punkte in der Mitte; construirt man nun das zu diesen Seiten Ad gehörige Zehneck, so kommen zu den schon aufgezählten 27 Punkten noch 9 Punkte d in den neuen Ecken hinzu und 2 Punkte e in jeder der noch nicht aufgezählten 8 Seiten, also 16 Punkte, in Summa kommen 9+16=25 Punkte hinzu und die 4te D. ist $= 27 + 25 = 52$ u. s. w.

Die erste D. ist = 1
die zweite D.
$= 1 + (9) = 10$
die dritte D.
$= 10 + (9 + 1 \cdot 8) = 27$
die vierte D.
$= 27 + (9 + 2 \cdot 8) = 52$
die fünfte D.
$= 52 + (9 + 3 \cdot 8) = 85$
. . . .

Fig 556.

die $n$te D.

$= x + [9 + (n - 2) 8] = x + (8n - 7) = y$ wenn man mit x die $(n - 1)$te D. bezeichnet.

Die eingeklammerten Zahlen bilden also die erste Differenzenreihe der Dreihe und es ist dieselbe

$1 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 33 \cdot 41 \ldots\ldots 8n - 7$

bildet man von dieser Reihe die Differenzen, so erhält man dieselben einander gleich, $= 8$. Es ist also die Reihe der D. eine Reihe der zweiten Ordnung, von welcher das erste Glied der ersten Differenzenreihe $= 1$ und von der wieder die Differenz $= 8$ ist. Man erhält das $n$te Glied der Dreihe aus der Summe der ersten n Glieder der Differenzenreihe

$$= \frac{1 + (8n - 7)}{2} \cdot n = n\,(4n - 3)$$

(s. Arithmetische Reihe, pag. 120, No. 7, Formel 7).

Man hat also die arithmetische Darstellung der Reihe

Differenz

8 8 8 8 8 8

Differenzenreihe

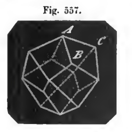
1 9 17 25 33 41 .... $8n - 7$

Dekagonalzahlen

1 10 27 52 85 126 .... $n(4n - 3)$

Deltoiddodekaeder, Hemitriakisoktaeder, Halbdreimalachtflächner, Trapezoiddodekaeder, ein Krystall von 12 Flächen, 24 Kanten und 14 Ecken. Die Flächen sind symmetrische Trapezoide. Von den Kanten sind 12 schärfere und längere, 12 stumpfere und kürzere. Von den Ecken sind 6 vierflächige symmetrische *A*, 4 dreiflächige stumpfe *B* und 4 dreiflächige spitze *C*.

Fig. 557.



Demonstration s. v. w. Beweis, und zwar besonders ein unwiderlegbarer, ein apodiktischer Beweis.

Depressionswinkel ist der Winkel in einer Vertikalebene von der Horizontallinie als dem festen Schenkel abwärts, im Gegensatz von Elevationswinkel, der von der Horizontalen aufwärts gemessen wird.

Descension eines Gestirns s. v. w. Absteigung eines Gestirns s. d.

Descensional-Differenz s. v. w. Absteigungs-Unterschied, s. d.

Deviation ist die Abweichung eines in Bewegung befindlichen Punkts von einer vorherigen Richtung.

Diakaustische Linie, Diakaustica a. u. Brennlinie.

Diagonal (διά durch, hinüber; γωνία Ecke). Von einer Ecke zur andern hinüber.

Diagonale, Diagonallinie ist eine gerade Linie, welche von einer Ecke einer ebenen Figur nach einer anderen, mit jener nicht zu derselben Seite der Figur gehörenden Ecke gezogen wird. Dieselbe kann auch aufserhalb der Figur fallen und dies geschieht wenn die beiden Seiten einer Ecke einen convexen Winkel bilden.

Hat die Figur n Seiten, also auch n Ecken, so ist die Summe aller möglichen D. in derselben $= \frac{1}{2}n(n - 3)$. Denn von jeder Ecke aus kann man $(n - 3)$ D. ziehen; von allen n Ecken aus also $n(n - 3)$ D. Nun ist aber jede dieser $n(n - 3)$ D. doppelt gerechnet, weil sie eine Ecke zum Anfangspunkt und eine zum Endpunkt hat, folglich nur die Hälfte derselben $= \frac{1}{2}n(n - 3)$ D. vorhanden.

Das Dreieck hat $\frac{1}{2}3\,(3 - 3) = 0$ D.
das Viereck hat $\frac{1}{2}4\,(4 - 3) = 2$ D.
das Fünfeck hat $\frac{1}{2}5\,(5 - 3) = 5$ D.
u. s. w.

Diagonalebene ist eine Ebene die durch 3 nicht in einerlei Umfangsebene liegenden Ecken eines Körpers gelegt wird.

Diameter, Durchmesser einer krummen Linie ist eine gerade Linie, durch welche irgend ein System von parallelen Sehnen dieser krummen Linie halbirt wird; ist das System der Sehnen rechtwinklig mit dem D., so heifst der D. auch Axe. In der Regel gebraucht man die Bezeichnung: Durchmesser, und nur beim Kreise sagt man auch Diameter, so wie man den Durchmesser des gröfsten Kreises einer Kugel, also jede durch den Mittelpunkt liegende zwischen zweien Punkten der Kugeloberfläche befindliche gerade Linie auch Diameter der Kugel nennt.

Dichtigkeit eines Körpers ist das Ver-

hältnifs seiner Masse zu dem Raum, den er einnimmt, also wenn man ein kubisches Maafs als Einheit festsetzt, die in dieser Kubikeinheit befindliche Masse selbst. Ist M die Masse, V das Volumen eines Körpers, so ist seine D. $= \frac{M}{V}$. Beträgt $V = n$ Kubikfufs, so ist $\frac{M}{n}$ die in einem Kubikfufs Raum befindliche Masse und D. $= \frac{M}{n}$.

Die Masse eines Körpers besteht in der unzähligen Menge seiner materiellen Theile; man hat von derselben nur einen relativen Begriff und zwar dadurch, dafs man sie den gleichen physikalischen Erscheinungen nach mit der Masse eines andern Körpers vergleicht und dies ermöglicht die Anziehungskraft unsres Erdkörpers, indem diese auf jedes einzelne Massenelement eines jeden Körpers eine gleich grofse Einwirkung ausübt, womit die Erde dafür von jedem einzelnen Massenelement einen gleich grofsen Druck empfängt, welcher sich durch Gewicht ausspricht.

Haben 2 verschiedene Stoffe von einerlei Volumen die Gewichte Q, q; die Massen M, m und beträgt der Druck eines Massenelements auf den Erdkörper, d. h. das Gewicht des Elements g Gewichtseinheiten so ist $gM = Q$ und $gm = q$

also $$M : m = \frac{Q}{g} : \frac{q}{g} = Q : q$$

d. h. die Massen zweier Körper verhalten sich wie deren Gewichte bei einerlei Volumen.

Ist das Volumen beider Körper $= V$, so sind die Dichtigkeiten D, d beider Stoffe $= \frac{M}{V}$ und $\frac{m}{V}$, daher hat man

$$D : d = \frac{M}{V} : \frac{m}{V} = M : m = Q : q$$

und die Dichtigkeiten beider Stoffe verhalten sich wie deren Gewichte bei einerlei Volumen.

Versteht man unter S, s die Gewichte der Volumeneinheit dieser Stoffe, d. h. die specifischen Gewichte, wenn man das Gewicht eines bestimmten Stoffes wieder als Gewichtseinheit festsetzt, so ist $Q = S \cdot V$ und $q = s \cdot V$

Also $D : d = M : m = Q : q = S : s$ also die Dichtigkeiten zweier Stoffe verhalten sich wie deren specifische Gewichte.

Aus diesem Grunde wählt man auch zur Einheit für die D. der Körper denselben Stoff, den man zur Einheit der specifischen Gewichte nimmt, nämlich das destilirte Wasser in dem Zustande seiner gröfsten Dichtigkeit bei 4° C. Nur bei den Gasen legt man auch die trockene atmosphärische Luft bei 0,76^m Druck Quecksilbersäule und 0° C. zu Grunde. Es wird demnach die Dichtigkeit und das specifische Gewicht eines Körpers durch einerlei abstracte Zahl ausgedrückt.

Dicke ist die dritte der drei Dimensionen eines körperlichen Raumes oder eines Körpers. Man sagt: Länge, Breite, Höhe und für Höhe auch Stärke oder Dicke.

Didodekaeder (δὶς zweimal) Zweimalzwölfflächner, Sechs und sechskantner ist ein Krystall von 24 Flächen, 36 Kanten in 14 Ecken in nebenstehender Form, bestehend aus zwei Pyramiden

Fig. 558.



mit gemeinschaftlicher symmetrischer 12-seitiger Basis. Die Flächen sind ungleichseitige Dreiecke, daher die Kanten und Ecken dreierlei. Von den Kanten sind 24 Scheitel- oder Endkanten, von denen abwechselnd je 2 und 2 einander gleich sind A und A, B und B, ferner 12 Seitenkanten D in der Ebene der Basis. Von den Ecken sind 2 symmetrische 12flächige Ecken C und 12 vierflächige Ecken von denen die, welche die Kanten A und die, welche die Kanten B verbinden untereinander symmetrisch sind. Die Ebene, welche durch 2 Paar einander gegenüberliegende Endkanten gelegt werden sind Rhomben, die Hauptaxe verbindet die Ecken C.

Ein Mehreres über diese Krystallform kann erst später erfolgen.

Differenz ist das Resultat einer Subtraction, oder auch der Theil, um welchen eine Gröfse vermehrt oder vermindert werden mufs, oder auch die Menge der Theile oder Einheiten, welche man einer Gröfse hinzufügen oder von ihr hinwegnehmen mufs um diese einer anderen Gröfse derselben Art gleich zu machen.

Die Differenzen gewähren einen ganz besonderen Nutzen beim practischen Rechnen, namentlich bei der Ausrechnung auf einander folgender Werthe gegebener Reihen und Formeln. So ist z. B. Bd. 1, in dem Art. „Briggische Logarithmen", No. 2, pag. 427 gezeigt, wie man mit Hülfe der Differenzen Logarithmen von Zahlen erhält, für die sie in den Tafeln nicht aufgeführt sind. In dem Art. Cubiktafeln pag 154 ist angegeben, wie man diese für die aufeinander folgenden ganzen Zahlen mit Hülfe der beiden Differenzenreihen erhält.

Band I, pag. 201 ist die zur Berechnung der Volumen des Wassers bei den verschiedenen Temperaturen von 0° C. bis 30° von Hallström aufgestellte Formel von der Form;

$$V = 1 - At + Bt^2 - Ct^3$$

Die Werthe der Constanten sind:

$$A = 0{,}000057577$$
$$B = 0{,}0000075601$$
$$C = 0{,}000000035091.$$

Nachdem ich die nach vorstehender Formel berechnete Tabelle in den meisten Zahlen unrichtig gefunden, indem nämlich die Differenzen der aufeinander folgenden Werthe auffallend unregelmäfsige Intervalle zeigten, berechnete ich die pag. 201 stehende Tabelle mit Hülfe der Differenzen nach folgendem Verfahren, wobei zu bemerken, dafs die mir vorgelegene Tabelle sämmtliche Zahlen auf 6 Decimalstellen enthält und dafs mithin eine Rechnung bis auf 9 Decimalstellen genügte, wenn die neue Tabelle 6 Stellen richtig haben sollte. Ist nach obiger Tabelle V für t berechnet, so erhält man für $t = (t + 1)$

$$V^1 = 1 - A(t+1) + B(t+1)^2 - C(t+1)^3$$

hiervon V abgezogen, gibt

$$V^1 - V = (-A + B - C) + (2B - 3C - 3Ct)t$$

oder

$$V^1 = V + (-A + B - C) + (2B - 3C - 3Ct)t$$

Nach den oben angegebenen Werthen von A, B, C hat man

$$-A + B - C = -0{,}000050052$$
$$2B - 3C = +0{,}000015015$$
$$-3C \times t = -0{,}000000105 \times t$$

Nun ist nach der Formel für $t = 1$

$$V = +1$$
$$-0{,}000057577$$
$$+0{,}0000075601$$
$$-0{,}0000000351$$
$$V = +0{,}999949948$$
$$\text{hierzu}\quad 0{,}999949948$$
$$-A + B - C = \quad 0{,}000050052$$
$$2B - 3C - 3C \times 1 = \quad 0{,}000014910$$
$$\text{gibt } V\ (\text{für } t = 2) = +0{,}999914806$$
$$\text{hierzu } -0{,}000050052$$
$$\text{und} \quad +0{,}000015015$$
$$2 \times 0{,}000000105 = -0{,}000000210$$
$$2 \times \quad 0{,}000014805 = +0{,}000029610$$
$$\text{gibt } V\ (\text{für } t = 3) = +0{,}999894364$$

u. s. w.

Um die Tabelle für t von 30° bis 100° fortzusetzen, mufste V für $t = 30°$ nach beiden Formeln berechnet werden und ich erhielt, wie pag. 201 angegeben V (für $t = 30°$) = 1,004184.

Da nun dieser Werth beiden Formeln angehört, so kann er für die Berechnung der folgenden Volumen, die allein der zweiten Formel angehören, nicht Summand sein. Demnach mufste V für $t = 31°$ nach der zweiten Formel speciell berechnet werden.

In dieser Formel ist

$$A = 0{,}0000094178$$
$$B = 0{,}00000533661$$
$$C = 0{,}0000000104086$$

Man hat also

$$-0{,}0000094178 \times 31 = \quad -0{,}000291952$$
$$+0{,}00000533661 \times 31^2 = \quad +0{,}005128482$$
$$-0{,}0000000104086 \times 31^3 = -0{,}000310083$$
$$\text{gibt } V\ (\text{für } t = 31°) = +1{,}004526447$$

Nun verfährt man weiter mit Hülfe der obigen Differenzen und zwar ist

$$-A+B-C=-0{,}000004092$$
$$2B-3C=+0{,}000010642$$
$$-3C=-0{,}000000031$$

Also für V (bei $t=32^\circ$)

$$-3C\times 31=-0{,}000000961$$
$$+2B-3C=+0{,}000010642$$
$$\text{Summa}=+0{,}000009681$$
$$\text{diese}\times 31=+0{,}000300111$$
$$-A+B-C=-0{,}000004092$$

hierzu $V(t=31^\circ)=+1{,}004526447$

giebt $V(t=32^\circ)=+1{,}004822466$

Auf diese Weise ist nun bis V für $t=100^\circ$ fortgefahren worden.

2. Die Differenzen sind von großer Bedentung, wenn sie sich auf veränderliche Größen beziehen, die von einander abhängig sind. Der gegenseitige Zusammenhang dieser Differenzen begründet die höhere Analysis, nämlich die Differenzialrechnung und die Integralrechnung, wie dies in dem Art. „Analysis" kurz gezeigt worden ist. Ausführlicheres darüber s. zunächst in den folgenden Artikeln: „Differenzial, u. s. w.

Differenzengleichung ist eine Gleichung zwischen den Differenzen zusammengehöriger Werthe zweier von einander abhängiger veränderlicher Größen.

Ist $y=x^3$

und es wird y zu $y+\triangle y$ wenn x zu $x+\triangle x$ wird, so hat man

$$y+\triangle y=(x+\triangle x)^3$$
$$=x^3+3x^2\triangle x+3x\cdot\triangle x^2+\triangle x^3$$

hiervon $y=x^3$

gibt die zwischen y und x bestehende Differenzengleichung

$$\triangle y=3x^2\triangle x+3x\triangle x^2+\triangle x^3$$

Anmerk. Die Bezeichnung $\triangle$ für Differenz, als $\triangle x$, die D. zwischen $x+\triangle x$ und $\triangle x$ ist allgemein, sie ist der Anfangsbuchstabe des Worts Διαφορα, Unterschied.

Differenzenquotient ist der Quotient oder dessen Werth, wenn man die Differenzen zusammengehöriger Werthe zweier von einander abhängiger variablen Größen durch einander dividirt. In dem Beispiel des vor. Art. ist der D zwischen y und x:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=3x^2+3x\triangle x+\triangle x^2$$

Differenzenreihen sind die Reihen, welche entstehen, wenn man in einer arithmetischen Reihe (s d. pag. 118 No. 1 und 2) die Differenzen der aufeinander folgenden Glieder bildet.

Differenzenzeichen oder Minuszeichen (−) s. algebraische Zeichen.

Differenzial einer Function ist in dem Art. Analysis als Grenzwerth des Differenzenquotien der Function erklärt und der Begriff durch ein Beispiel erläutert. Die Erklärung des D. soll nur hier gründlicher erfolgen:

Es sei y eine Größe, die dadurch veränderlich wird, dafs sie von der veränderlichen Größe x abhängt, also y als abhängig Veränderliche eine Function der Urveränderlichen x. Man bezeichnet dies abhängige Verhältnifs allgemein mit $y=fx$ oder $y=Fx$ oder $y=\varphi x$ u. s. w.

Für jeden besonderen Werth, den man für x der Reihe nach nehmen kann, hat y ebenfalls einen besonderen Werth. Nimmt man nun für x zwei auf einander folgende Werthe x, x' und bezeichnet die zu diesen gehörenden Werthe von y mit y und y', so ist $y=fx$ und $y'=fx'$.

Bezeichnet man den Unterschied $x'-x$ mit $\triangle x$ und $y'-y$ mit $\triangle y$, so kann man die beiden Werthe von x auch bezeichnen mit x und $x+\triangle x$, die von y mit y und $y+\triangle y$ und man hat

$$y=fx$$

und $$y+\triangle y=F(x+\triangle x)$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man die Gleichung für den Unterschied der Function

$$\triangle y=F(x+\triangle x)-fx$$

Man nennt den Unterschied zweier aufeinander folgender Werthe der Veränderlichen den Zuwachs der Veränderlichen, also ist $\triangle x$ der Zuwachs der Urveränderlichen und $\triangle y$ der Zuwachs der Function, und da man übereingekommen ist, immer den ersten Werth von dem zweiten abzuziehen, so ist der Zuwachs entweder additiv oder subtractiv, je nachdem der zweite Werth größer oder kleiner ist als der erste.

Z. B. es sei $y=ax^2$

so ist $y+\triangle y=a(x+\triangle x)^2$

also

$$\triangle y=a(x+\triangle x)^2-ax^2=2ax\triangle x+a\triangle x^2$$

2. Es liegt aber daran, das Verhältnifs zwischen dem jedesmaligen Zuwachs der Function und dem Zuwachs der Urveränderlichen zu erfahren, weil der Ausdruck dafür den Zusammenhang beider Aenderungen am entsprechendsten darstellt; also

$$\triangle y:\triangle x \text{ oder } \frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{F(x+\triangle x)-fx}{\triangle x}$$

In dem obigen Beispiel ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=2ax+a\triangle x$$

Den Zuwachs der Function durch den Zuwachs der Urveränderlichen dividirt nennt man den Zuwachsquotient oder den Differenzenquotient.

3. Mit diesem letzten Begriff wird der Begriff des Differenzials begründet. Wenn nämlich der Zuwachs $\triangle x$ der Urveränderlichen x beliebig klein, oder wie man auch sagt, unendlich klein wird, so hat der Zuwachsquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ einen Grenzwerth und dieser macht das Differenzial der Function y aus.

Nimmt man z. B. in dem obigen Beispiel $\triangle x$ kleiner als jede noch so kleine angebbare Gröfse, oder vielmehr nimmt man $a \triangle x$ kleiner, also $\triangle x$ um so viel mehr kleiner, als irgend eine noch so klein denkbare Gröfse, so wird auch die Differenz

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} - 2ax = a \triangle x$$

kleiner als jede noch so kleine angebbare Gröfse, $2ax$ ist also der Grenzwerth von $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ und zugleich das Differenzial von $y = ax^2$.

Das Differenzial einer Function ist also der Grenzwerth des Zuwachsquotienten der Function bei beliebiger Abnahme des Zuwachses $\triangle x$ der Urveränderlichen, oder für den Fall, dafs dieser Zuwachs unendlich klein wird.

4. Nach einer andern Begründung des Begriffs Differenzial läfst man $\triangle x$ nicht unendlich klein werden, sondern man setzt $\triangle x = 0$; dann ist $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ganz streng $= 2ax$. Da mit $\triangle x$ auch $\triangle y = 0$ wird, so erscheint der Differenzenquotient unter dieser Annahme in der Form $\frac{0}{0}$, eine unbestimmte Gröfse, die hier zu der bestimmten Gröfse $2ax$ wird.

5. Der Name Differenzial, den Leibnitz eingeführt hat, kommt natürlich daher, weil bei Bestimmung desselben zusammengehörige Differenzen auf einander folgender Werthe der Functionen und ihrer Urveränderlichen vorkommen.

Lagrange nennt den Grenzwerth des Zuwachsquotient Ableitung oder abgeleitete Function. Das Differenzial in dem obigen Beispiel enthält die Urvariable x, ist also eine Function von x; auch eine abgeleitete, weil sie aus der ursprünglichen Function entwickelt ist; ist aber das D. eine unveränderliche Gröfse, wie dies vorkommt, so ist diese keine Function und kann nur Ableitung genannt werden. Es ist jedoch die Benennung Ableitung unbestimmt, da jede Function oder jede Gröfse, die aus einer anderen Function entwickelt wird, gleich viel auf welche Weise, eine Ableitung genannt werden kann.

6. Die einfachste Bezeichnung des D. einer Function ist offenbar die, dafs man dem Functionszeichen den Anfangsbuchstaben des D. vorsetzt, also in dem obigen Beispiel $dy = 2ax$. Um aber das Zeichen dy von dem eines Products zu unterscheiden nimmt man, wie zuerst von Euler geschehen ist, ein ∂ von einiger Abänderung und schreibt $\partial y = 2ax$.

Da es nun auch Functionen mit mehreren Urveränderlichen gibt $f(x, y, z)$ und da man die Differenziale dieser Functionen bald in Beziehung auf die eine, bald auf die andere Urvariable zu nehmen hat, indem man die übrigen als unveränderlich betrachtet, da man ferner das D. einer Function (y) in Beziehung auf die nächste Veränderliche (x), hierauf auf eine folgende Veränderliche (z), von der wieder x unmittelbar abhängt, zu bestimmen hat, so mufs man aus dem Differenzial selbst ersehen können, auf welche Urveränderliche es sich bezieht.

In dem obigen Beispiel bezeichnet y die Function, x die Urveränderliche und $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist der Differenzenquotient; um nun den Ursprung des D. aus diesem Quotient mit zu bezeichnen hat man für die Bezeichnung des D. die Form des Quotient beibehalten und man schreibt das D. der Function $\frac{\partial y}{\partial x}$, bei welchem man sich aber nicht mehr einen Quotient zu denken hat, welches vielmehr nur vergegenwärtigen soll, dafs diese Gröfse aus dem Quotient der Zuwachse zweier Veränderlichen entstanden ist, von welchen das obere Zeichen y die Function, das untere x die Urveränderliche bedeutet.

Eine dritte Bezeichnung ist $\partial y = 2ax\,\partial x$ indem man den Zuwachs der Urveränderlichen bei dem D. als Factor sich denkt. In dem obigen Beispiel war

$$\triangle y = 2ax \triangle x + a \triangle x^2$$

$\triangle x$ als gemeinschaftlichen Factor hintergestellt gibt die Form

$$\triangle y = (2ax + a \triangle x) \triangle x$$

und für $\triangle x$ beliebig klein entsteht die Differenzialformel

$$\partial y = 2ax\,\partial x$$

Eine vierte Bezeichnungsart ist

$$\partial y_r = 2ax$$

7. Enthält das D. noch die Urveränderliche, so ist dasselbe ebenfalls eine Function der Urveränderlichen und es läfst sich mithin auch von dieser Function das D. bestimmen.

Das D. von $2ax$ erhält man bei dem

oben angezeigten Verfahren $= 2a$

es ist also $\frac{\partial 2ax}{\partial x} = 2a$

Will man nun bezeichnen, dafs dies D. das D. eines D. der Function y ist, so schreibt man $2a = \frac{\partial^2 y}{\partial x}$ und neunt dies D. ein D. der zweiten Ordnung.

Das D. $= 2a$ enthält nicht mehr die Urveränderliche x, bei jedem Zuwachs von x bleibt das D. $= 2a$ unverändert, $2a$ wächst nicht mit, es gibt also keinen Zuwachsquotient und kein D. von $2a$; wie überhaupt keine Constante ein Differenzial hat.

Enthält dagegen ein D. zweiter Ordnung, auch zweites Differenzial genannt, noch die Urveränderliche, und man nimmt von dem zweiten D. wieder ein D., so wird dies ein D. dritter Ordnung oder ein drittes D.

Man schreibt es: $\frac{\partial^3 y}{\partial x}$

und so kann man Differenziale beliebig vieler Ordnungen von einer Function bestimmen, wenn diese es zuläfst.

Man bezeichnet die D. verschiedener Ordnungen also:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x} = A \text{ oder } \partial^2 y = A\,\partial x \text{ oder } \partial^2 y_x = A$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x} = A \text{ oder } \partial^3 y = A\,\partial x \text{ oder } \partial^3 y_x = A$$

. . . .

$$\frac{\partial^n y}{\partial x} = A \text{ oder } \partial^n y = A\,\partial x \text{ oder } \partial^n y_x = A$$

Hängt die Function (y) von mehreren Urveränderlichen (x, z) ab, und man hat dieselbe in Beziehung auf jede von beiden differenzirt, so schreibt man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = P \text{ oder } \partial^2 y = P\partial x \cdot \partial z \text{ oder } \partial^2 y_{x,z} = P$$

das D., nachdem y in Beziehung auf x, $n$mal, in Beziehung auf z, $m$mal differenzirt ist schreibt man

$$\frac{\partial^{n+m} y}{\partial x^n \cdot \partial z^m} = Q \text{ oder } \partial^{n+m} y = Q\,\partial x^n \cdot \partial z^m = \partial^{n,m} y_{x,z}$$

Wegen der exponentiellen Bezeichnung der Urveränderlichen bei mehreren derselben in einer Function beobachtet man auch bei nur einer Urveränderlichen diese Bezeichnungsart, und schreibt das $n$te D:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = R \text{ oder } \partial^n y = R\,\partial x^n$$

Wie man in der Algebra, um die unbekannten Gröfsen von den bekannten mit dem Auge leicht unterscheiden zu können, jene mit den letzten Buchstaben, diese mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, so bezeichnet man auch in der Analysis die variablen Gröfsen mit den letzten und die constanten Gröfsen mit den ersten Buchstaben des Alphabets; eine äufsere Uebereinstimmung, die zu keiner Verwechselung Veranlassung geben darf.

8. Eine nützliche Anwendung der Differenziale ist in dem Art. berührende Linie, Bd. I, pag. 340 gegeben worden. Zuerst ist die Aufgabe: An einer krummen Linie eine berührende gerade Linie zu ziehen, elementar gelöst und die Subtangente s gefunden worden durch die allgemeine Formel

$$s = y_1 \frac{x - x_1}{y - y_1}$$

mit der Vorschrift, bei jedem besonderen Beispiel für die gegebenen Gröfsen x; x_1; y; y_1 die Werthe aus der Figur zu entnehmen und nach Reduction des Ausdrucks $y_1 = y$ und $x_1 = x$ zu setzen, welches wie aus den dortigen Beispielen zu entnehmen, eine weitläufige Arbeit ist. Nun sind $x - x_1$ und $y - y_1$ die Differenzen zweier aufeinander folgenden Werthe von x und von y, also die obigen $\triangle x$ und $\triangle y$; y_1 einer der Werthe von y also das obige $y + \triangle y$; folglich ist

$$s = (y + \triangle y)\frac{\triangle x}{\triangle y}$$

Nun wird pag. 344 dieselbe Aufgabe mit Hülfe der Differenzialrechnung gelöst und gezeigt, dafs $s = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$ ist.

Da nun $y_1 \frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{y_1}{\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)}$, so hat man das Uebereinstimmende beider Resultate anschaulich, wenn man für $y_1 = y$ setzt, wie geboten wird, und für $\triangle y$ und $\triangle x$ die Grenzwerthe, welche aber wirklich mit der Gleichsetzung von x_1 mit x und von y_1 mit y hervorgehen.

Es ist aus diesem Beispiele ersichtlich, dafs in dem Fall, wo die Differenzialrech-

nung eintreten kann, die elementare Behandlung der Aufgabe Differenzenquotienten und deren Grenzwerthe erst schaffen muſs, während die Differenzialrechnung sie ohne Weiteres in den Differenzialen liefert.

Entwickelung der Differenziale aus Functionen von verschiedener Art und Form.

I. Differenziale algebraischer Functionen.

9. Ist eine veränderliche Gröſse die algebraische Summe mehrerer veränderlichen Gröſsen derselben Art, von welchen jeder einzelnen ein D. zukommt, so ist das D. der Summe = der algebraischen Summe der D. der einzelnen Summanden.

Denn es sei $y = u \pm v \pm w \pm z + \ldots$ welche Gröſsen alle von der Urveränderlichen x abhängig sind. Für den Zuwachs Δx von x seien die Zuwachse derselben Δy, Δu, Δv, Δw, $\Delta z \ldots$ so ist

$$y + \Delta y = u + \Delta u \pm (v + \Delta v) \pm (w + \Delta w) \pm (z + \Delta z) + \ldots$$

hiervon $y = u \pm v \pm w \pm z$

giebt $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w \pm \Delta z$

Da nun jedem einzelnen der Summanden der gegebenen Summe ein D. zukommt, so kann der Zuwachs einer jeden beliebig klein werden, folglich auch deren algebraische Summe Δy und noch viel mehr Δx kann beliebig klein werden. Für die beliebige Abnahme der Zuwachse sind aber die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \frac{\Delta w}{\Delta x} \pm \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

zwischen den Veränderlichen und den Urveränderlichen die Grenzwerthe der Quotienten, d. h. die Differenziale der Veränderlichen.

Also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{\partial w}{\partial x} \pm \frac{\partial z}{\partial x} + \ldots$

10. Ist eine Function das Product aus einer Constanten mit einer Veränderlichen, der ein D. zukommt, so kommt auch der Function ein D. zu und dieses ist das Product der Constanten mit dem D. des veränderlichen Factors.

Denn es sei $y = Az$ und z eine Function der Veränderlichen x, so ist bei der Annahme ad 9

$$y + \Delta y = A(z + \Delta z)$$

hiervon $y = Az$

bleibt $\Delta y = A \Delta z$

da der Gröſse z ein D. zukommt, so kann Δz unendlich klein werden, folglich auch $A \Delta z = \Delta y$ und Δx. Für die unendlich kleinen Zuwachse werden aber die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

zwischen den Functionen und der Urvariablen die Differenziale der Functionen folglich hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A \frac{\partial z}{\partial x}$$

11. Ist eine Function das Product zweier Veränderlichen, von denen jeder ein D. zukommt, so ist das D. der Function = dem ersten Factor mal dem D. des zweiten Factors + dem zweiten Factor mal dem D. des ersten Factors.

Wenn also $y = u \cdot z$

so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

Denn es ist

$$(y + \Delta y) = (u + \Delta u)(z + \Delta z)$$
$$= uz + u\Delta z + z\Delta u + \Delta u \cdot \Delta z$$

hiervon $y = uz$

bleibt $\Delta y = (u + \Delta u)\Delta z + z \Delta u$

also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (u + \Delta u)\frac{\Delta z}{\Delta x} + z \frac{\Delta u}{\Delta x}$

Für die beliebige Abnahme der 4 Zuwachse Δy, Δz, Δu und Δx werden die Differenzenquotienten die Differenziale und u ist der Grenzwerth von $u + \Delta u$

folglich ist $\frac{\partial y}{\partial x} = u \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial x}$

Man kann auch erklären: Für $\Delta y = \Delta u = \Delta z = \Delta x = 0$ entstehen die Differenziale $u + \Delta u = u + 0 = u$ u. s. w.

Anmerk. Ist $y = Auz$

so hat man $\frac{1}{A} \cdot y = uz$

und endlich

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = (u + \Delta u)\frac{\Delta z}{\Delta x} + z \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

woraus $\frac{\partial y}{\partial x} = Au \frac{\partial z}{\partial x} + Az \frac{\partial u}{\partial x}$

12. Ist eine Function das Product beliebig vieler (n) Veränderlichen, von denen jeder ein D. zukommt, so ist das D. der Function = einer Summe von n Factoren, von denen jedes Glied das D. eines Factors der Function multiplicirt mit dem Product der übrigen ($n - 1$) Factoren ist.

Wenn also $y = u \cdot v \cdot w \ldots z$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = u \cdot v \cdot w \ldots \frac{\partial z}{\partial x} + uv \ldots . z \frac{\partial w}{\partial x} + uw \ldots z \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + vw \ldots . z \frac{\partial u}{\partial x}$$

Denn betrachtet man zunächst das Product aus 2 Factoren bestehend, nämlich aus $(uvw \ldots .)$ und z, so ist nach No. 11

$$\frac{\partial y}{\partial x} = uvw \ldots \frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial (uvw \ldots)}{\partial x}$$

Nun ist wieder $$z \frac{\partial (uvw \ldots)}{\partial x} = zuv \ldots . \frac{\partial w}{\partial x} + zw \frac{\partial (uv \ldots .)}{\partial x}$$

$$zw \frac{\partial (uv \ldots .)}{\partial x} = zwu \ldots . \frac{\partial v}{\partial x} + zwv \frac{\partial (u \ldots .)}{\partial x}$$

u. s. w. Also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = uvw \ldots . \frac{\partial z}{\partial x} + uv \ldots . z \frac{\partial w}{\partial x} + uw \ldots .. z \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots ..$$

13. Ist eine Function der Quotient zweier Veränderlichen von denen jede ein D. hat, so ist das D. der Function = dem Nenner mal dem D. des Zählers weniger dem Zähler mal dem D. des Nenners, diese Differenz dividirt durch das Quadrat des Nenners. Wenn also

$$y = \frac{u}{w}$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{w \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{w^2}$$

Denn es ist $$y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{w + \triangle w}$$

mithin

$$\triangle y = \frac{u + \triangle u}{w + \triangle w} - \frac{u}{w} = \frac{w \triangle u - u \triangle w}{w (w + \triangle w)}$$

also $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{w \left(\frac{\triangle u}{\triangle x}\right) - u \left(\frac{\triangle w}{\triangle x}\right)}{w (w + \triangle w)}$$

Für die beliebige Abnahme der Zuwachse entsteht mithin die obige Formel für $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Anmerk. Ist der Zähler constant, ist z. B.

$$y = \frac{A}{w}$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{w \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) - A \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{w^2} = \frac{0 - A \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{w^2} = -\frac{A}{w^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

14. Ist eine Function eine Potenz einer Veränderlichen mit constantem Exponenten, so ist das D. der Function gleich dem Exponenten mal der Potenz mit dem um Eins verminderten Exponenten mal dem D. der Veränderlichen. Wenn also

$$y = z^n$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = n z^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \triangle y &= (z + \triangle z)^n - z^n \\ &= \frac{n}{1} z^{n-1} \triangle z + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} z^{n-2} (\triangle z)^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{n-3} (\triangle z)^3 + \ldots .. \\ &= \triangle z \left[n z^{n-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} z^{n-2} \triangle z + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^{n-3} (\triangle z)^2 + \ldots . \right] \end{aligned}$$

und $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle z}{\triangle x} \left[n z^{n-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} z^{n-2} \triangle z + \ldots ... \right]$$

Mit der beliebigen Abnahme von $\triangle x$, $\triangle z$ und $\triangle y$ wird jedes einzelne Glied in der Klammer von dem zweiten Gliede an gerechnet beliebig klein, also auch deren Summe wird beliebig klein, und das erste Glied nz^{n-1} ist der Grenzwerth der Klammergröfse und $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ und $\frac{\triangle z}{\triangle x}$ werden die D. der Veränderlichen, folglich ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = n z^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Dem binomischen Lehrsatz zufolge (Bd. I, pag. 374) ist das Gesetz des Fortschritts der Reihe bei der Entwickelung der Potenz $(z + \triangle z)^n$ ganz dasselbe, n mag ganz oder gebrochen, positiv oder negativ sein.

Für $n = \frac{p}{q}$ erhält man zuletzt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x}\left[\frac{p}{q} z^{\frac{p}{q}-1} + \frac{\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot z^{\frac{p}{q}-2}\,\Delta z + \ldots\right]$$

wo wieder $\frac{p}{q} z^{\frac{p}{q}-1}$ der Grenzwerth der Klammergröfse ist und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z^{\frac{p}{q}}}{\partial x} = \frac{p}{q} z^{\frac{p}{q}-1}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Desgleichen ist für $n = -\frac{p}{q}$ der Grenzwerth der Klammergröfse $= -\frac{p}{q} z^{-\frac{p}{q}-1}$ und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z^{-\frac{p}{q}}}{\partial x} = \left(-\frac{p}{q}\right) z^{-\frac{p}{q}-1}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Hat man daher das D. einer Function zu bestimmen, welche eine Wurzel aus einer Veränderlichen ist, so darf man diese nur in eine Potenz mit gebrochenem Exponenten verwandeln und nach der Formel verfahren.

Beispiele.

Beispiel 1. $y = \sqrt{z}$ gibt $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{z}}{\partial x} = \frac{\partial z^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}-1}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

Ist die Veränderliche eine Potenz im Nenner, so verfährt man entweder nach No. 13 oder man setzt die Veränderliche als Potenz mit subtractivem Exponenten in den Zähler und verfährt wie vorher: z. B.

Beispiel 2. $y = \frac{A}{x^3}$ gibt nach No. 13 Anmerkung:

$$\partial y = -\frac{A}{x^6}\cdot 3x^2 = -\frac{3A}{x^4}$$

nach No. 14:

$$\partial y = \partial A x^{-3} = A(-3)x^{-3-1} = \frac{-3A}{x^4}$$

Beispiel 3. $y = \frac{A}{\sqrt[5]{x^2}}$ gibt nach No. 13, Anmerk.:

$$\partial y = -\frac{A}{\sqrt[5]{x^4}}\cdot\frac{\partial\sqrt[5]{x^2}}{\partial x} = -\frac{A}{\sqrt[5]{x^4}}\cdot\partial x^{\frac{2}{5}} = -\frac{A}{\sqrt[5]{x^4}}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}$$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\frac{A}{\sqrt[5]{x^4}}\cdot x^{-\frac{3}{5}} = -\frac{2}{5}\frac{A}{\sqrt[5]{x^4\cdot x^3}} = -\frac{2}{5}\frac{A}{x\sqrt[5]{x^2}}$$

nach No. 14:

$$\partial y = A\,\partial x^{-\frac{2}{5}} = -\frac{2}{5}\cdot A\,\partial x^{-\frac{2}{5}-1} = -\frac{2}{5}\cdot A\,\partial x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{2}{5}\frac{A}{x^{\frac{7}{5}}} = -\frac{2}{5}\frac{A}{x\sqrt[5]{x^2}}$$

Beispiel 4. $y = (a + bx^m)^n$

Setze $a + bx^m = z$, so ist $y = z^n$

daher $\frac{\partial y}{\partial x} = nz^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}$

Nun ist $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(a + bx^m)}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial bx^m}{\partial x} = 0 + b\frac{\partial x^m}{\partial x} = mbx^{m-1}$

folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = n(a + bx^m)^{n-1}\times mbx^{m-1} = nmbx^{m-1}(a + bx^m)^{n-1}$

Beispiel 5. $y = \frac{(a + bx^m)^n}{(A + Bx^p)^q}$

Setze $(a + bx^m)^n = z$

$(A + Bx^p)^q = u$

so ist $y = \frac{z}{u}$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{u^2}$

Nun ist nach Beispiel 4

$$\frac{\partial z}{\partial x} = nmb\,x^{m-1}(a + bx^m)^{n-1}$$

und $\frac{\partial u}{\partial x} = qpB\,x^{p-1}(A + Bx^p)^{q-1}$

folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(a + bx^m)^{n-1}}{(A + Bx^p)^{q+1}}[nmb(A + Bx^p)x^{m-1} - qpB(a + bx^m)x^{p-1}]$

Beispiel 6. $y = \frac{x\sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$

Setzt man den Zähler $= u$, den Nenner $= z$ so ist

$$y = \frac{u}{z}$$

und nach No. 13: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{z \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{z^2}$

Nnn ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(x\sqrt{a - x})}{\partial x} = x \cdot \partial\sqrt{a - x} + \sqrt{a - x} \times 1$

$$= \frac{-x}{2\sqrt{a - x}} + \sqrt{a - x} = \frac{2a - 3x}{2\sqrt{a - x}}$$

ferner ist $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{a + x}}{\partial x} - \frac{\partial\sqrt{a - x}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{a + x}} \cdot \frac{\partial(a + x)}{\partial x} - \frac{1}{2\sqrt{a - x}} \cdot \frac{\partial(a - x)}{\partial x}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a + x}} + \frac{1}{2\sqrt{a - x}} = \frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Diese Werthe in die obere Differenzislgleichung gesetzt, gibt den Zähler

$$(\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x})\frac{2a - 3x}{2\sqrt{a - x}} - x\sqrt{a - x}\,\frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Diesen Zähler unter einerlei Benennung gebracht und mit z^3 dividirt gibt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(a + x - \sqrt{a^2 - x^2})(2a - 3x) - x(\sqrt{a^2 - x^2} + a - x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}(\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x})^2}$$

Beispiel 7. $y = \sqrt[q]{d + \sqrt[p]{c + \sqrt[n]{a + bx^m}}}$

Zur Bestimmung des D.

Setze $d + \sqrt[p]{c + \sqrt[n]{a + bx^m}} = z$

so ist $y = \sqrt[q]{z} = z^{\frac{1}{q}}$

und

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{q} z^{\frac{1}{q} - 1} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{q\sqrt[q]{z^{q-1}}}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Setze $\sqrt[p]{c + \sqrt[n]{a + bx^m}} = w$

so ist $z = d + w$

folglich $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$

Setze $c + \sqrt[n]{a + bx^m} = v$

so ist $w = \sqrt[p]{v}$

und $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{p\sqrt[p]{v^{p-1}}}\frac{\partial v}{\partial x}$

Setze endlich $a + bx^m = u$

so ist $v = c + \sqrt[n]{u}$

und $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt[n]{u}}{\partial x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\frac{\partial u}{\partial x}$

Da nun $\frac{\partial u}{\partial x} = mbx^{m-1}$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{mbx^{m-1}}{q\sqrt[q]{z^{q-1}} \cdot p\sqrt[p]{v^{p-1}} \cdot n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

worein für z, v und u die obigen Werthe zu setzen sind.

Von dem 4ten Beispiel ab sind für zusammengesetzte Gröfsen einfache Zeichen gesetzt worden, um das jedesmalige Beispiel einer vorher entwickelten allgemeinen Differenzialformel anzupassen. In diesen zusammengesetzten Gröfsen befindet sich die eigentliche Veränderliche x

mit Constanten algebraisch verwickelt, sie sind also Functionen von x, und eben so wie y, sind auch dort z, u, v Functionen von x.

Man beachte, dafs bisher immer nur $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ u. s. w. vorgekommen sind, und nur für diese Fälle, nämlich wo in Beziehung auf die Urveränderliche x differenzirt worden ist, sind bisher die D. ermittelt.

Es kommen aber auch Fälle vor, wo das D. einer Function nicht unmittelbar auf die Urveränderliche genommen werden kann; wenn nämlich die Stammfunction y die Function einer vermittelnden u und u als Function der Urvariablen x, also $u = \varphi x$ gegeben wird und wenn zugleich die Function y auf u transcendent ist:

Wenn $y = a^x$, $y = arc\,(cos = x)$, $y = logn\,x$, dann ist die Function eine unmittelbare von x, wenn aber $y = a^{mx}$, $y = logn\,(a + nx)$ u. s. w. so sind $mx = u$, $a + nx = z$ die Variablen und es ist durch Bildung der Differenzenquotienten und deren Grenzwerthe nur $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, nicht aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu ermitteln. Damit nun diese Functionen auf die Urveränderliche differenzirt werden können ist ein allgemeines Verfahren dafür zu ermitteln erforderlich und hiervon handeln die 3 folgenden Sätze.

15. Ist eine veränderliche Gröfse y von einer veränderlichen Gröfse z abhängig, diese wieder von einer dritten Veränderlichen x und die erste y hat ein D. in Beziehung auf ihre nächste Veränderliche z, diese ein D. in Beziehung auf x, so hat sie auch ein D. in Beziehung auf die eigentliche Urveränderliche x, und zwar ist dies D. = dem Product ihres D. in Beziehung auf z mal dem D., welches z in Beziehung auf x hat, d. h. es ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$$

Denn sind die mit y, z, x zusammengehörigen Zuwachse Δy, Δz und Δx, also noch endliche Gröfsen, so ist offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \times \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

bei beliebiger Abnahme von Δx nehmen auch Δy und Δz beliebig ab und alle 3 können ∞ klein werden. Für diesen Fall verwandeln sich die 3 Differenzenquotienten in ihre Grenzwerthe; folglich ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$$

16. Sind 2 veränderliche Gröfsen y, z von einer 3ten veränderlichen x abhängig, in Beziehung auf welche beide Differenziale haben, so ist der Quotient dieser D. = dem D. der einen Veränderlichen y in Beziehung auf die zweite z, wenn das D. dieser zweiten den Nenner des Quotient ausmacht, oder es ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

Denn wie in No. 15 ist hier:

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)} \text{ und } \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$$

und es werden diese Differenzenquotienten zu ihren Grenzwerthen, wenn Δx, Δy, Δz beliebig abnehmen.

17. Ist eine veränderliche Gröfse y von einer veränderlichen Gröfse x abhängig, so ist es auch diese von jener und das D. der ersten y in Beziehung auf die zweite x ist = dem Quotient 1 dividirt durch das D. der zweiten in Beziehung auf die erste.

Also ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}$$

Denn es ist wie No. 15 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}$$

Bei beliebiger Abnahme der Differenzen Δx, Δy verwandeln sich aber die Differenzenquotienten in deren Grenzwerthe.

II. Differenziale transcendenter Functionen.

A. Exponential- und logarithmische Funtionen.

18. Ist die Function eine einfache Exponentialfunction, deren Grundzahl eine Constante, also

$$y = a^x$$

so hat man $y + \Delta y = a^{x + \Delta x}$

folglich $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\,[a^{\Delta x} - 1]$

und $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Der Grenzwerth des Zuwachsquotienten der Function ist also a^x mal dem Grenzwerth von $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ für die beliebige Abnahme von Δx.

Nun enthält diese letzte Gröfse die Urvariable x nicht, mithin mufs $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ zum Grenzwerth eine Constante haben,

die durch die Basis a der Exponentialgröfse bestimmt wird.

Denn da man sich unter $\triangle x$ als Zuwachs einer variablen Zahl x jede beliebige constante Zahl vorstellen kann, eine Constante aber (s. No. 7) keinen Grenzwerth hat, so hat auch $\triangle x$ keinen Grenzwerth; allein der Quotient $\frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x}$ selbst wird zu einem Grenzwerth, wenn man die Constante $\triangle x$ unendlich klein wählt [oder nach No. 4, wenn man $\triangle x = 0$ setzt, wo dann $\frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x} = \frac{a^0-1}{0} = \frac{0}{0}$ wird, ist $a^x \cdot \frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x}$ das D. von a^x] und setzt man für diesen constanten Grenzwerth die beliebige Zahl k, so hat man unter der Bedingung, dafs $\triangle x$ unendlich klein ist

$$\frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x} = k$$

oder wenn man $\triangle x = \frac{1}{n}$ setzt, unter der Bedingung, dafs n unendlich grofs wird:

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = k \tag{1}$$

oder a entwickelt

$$a = \left(1 + \frac{1}{n}k\right)^n \tag{2}$$

Aus Gleichung 1 erhält man eine Entwickelung von k in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen von a und aus Gleichung 2 eine Entwickelung von a nach Potenzen von k.

Aus Gleichung 1 hat man

$$k = n(a-1)\left[a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{n}-1} + a^{\frac{1}{n}-2} + \ldots\right]$$

ein Ausdruck, welcher zu einer brauchbaren Reihe nicht umgeformt werden kann.

Setzt man dagegen $a = 1 + b$ so erhält man nach dem binomischen Satz

$$a^{\frac{1}{n}} = (1+b)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}b + \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}-1}{1\cdot 2}b^2 + \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}-2}{1\cdot 2\cdot 3}b^3 + \ldots\ldots$$

mithin

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n}b + \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}-1}{1\cdot 2}\cdot b^2 + \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}-2}{1\cdot 2\cdot 3}b^3 + \ldots$$

und wenn man beiderseits mit $\frac{1}{n}$ dividirt

$$k = \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = b + \frac{\frac{1}{n}-1}{1\cdot 2}b^2 + \frac{\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}-2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot b^3 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}-2\ldots\ldots\frac{1}{n}-m+1}{2\cdot 3\ldots\ldots m}b^m$$

Läfst man nun n beliebig wachsen, also $\frac{1}{n}$ beliebig abnehmen, (nach No. 4: setzt man $\frac{1}{n} = 0$) so entstehen für alle Glieder deren Grenzwerthe und es ist

$$k = b - \tfrac{1}{2}b^2 + \frac{(-1)(-2)}{2\cdot 3}b^3 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\ldots$$

also

$$k = b - \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{4}b^4 + \tfrac{1}{5}b^5 - \ldots\ldots$$

und wenn man für b seinen Werth $(a-1)$ setzt:

$$k = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 + \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots\ldots \tag{3}$$

Diese Reihe ist der in dem Art. „Basis eines Logarithmensystems“ pag. 327 entwickelte Zähler in dem Ausdruck des Logarithmus der Zahl a. Wenn man also, wie dort, den Modul des Logarithmensystems mit M bezeichnet, so hat man

$$\log a = k \cdot M$$

und

$$k = \frac{\log a}{M} \tag{4}$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = k \cdot a^x$$

folglich ist das D. einer Exponentialgröfse = dieser Exponentialgröfse selbst, multiplicirt mit dem nach irgend einem System genommenen Logarithmus der Basis der Exponentialgröfse und dividirt durch den Modul desselben Systems.

Nimmt man die Basis a der Exponentialgröfse zur Basis des Logarithmensystems, so ist $\log a = 1$ und

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = k a^x = \frac{a^x}{M} \qquad (5)$$

Nimmt man das natürliche Logarithmensystem (s. Bd. I, pag. 327), so ist $M = 1$, $\log a$ wird $\log n\, a$ und man hat nach (4)

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = k \cdot a^x = a^x \log n\, a \qquad (6)$$

Hat die Exponentialfunction zur Grundzahl die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen so ist

$$\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x \cdot \ln e = e^x \qquad (7)$$

Die Function e^x hat also das Eigenthümliche, dafs ihr D. die Function selbst ist.

Der Modul eines Systems ist = dem nach demselben System genommenen Logarithmus der Basis e der natürlichen Logarithmen (Bd. I, pag. 327) mithin hat man nach Formel 4

$$k = \frac{\log a}{\log e} \text{ und } \frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x \cdot \frac{\log a}{\log e} \qquad (8)$$

aus welchem System auch diese Logarithmen genommen werden mögen. Ist a selbst die Basis des Systems so ist

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = \frac{a^x}{\log^a e} \qquad (9)$$

Aus Gleichung 2 die Grundzahl in eine Reihe nach Potenzen von k fortlaufend entwickelt gibt

$$a = \left(1 + \frac{1}{n}k\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\,\frac{k}{n} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \ldots.$$
$$= 1 + k + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{k^2}{1 \cdot 2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots.$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{k^m}{1 \cdot 2 \ldots m} + \ldots.$$

Für $\frac{1}{n} = 0$ oder ∞ klein erhält man von jedem Gliede der Reihe den Grenzwerth und jeder deren Coefficienten wird = 1, mithin hat man

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \frac{k^m}{1 \ldots m} \qquad (10)$$

Für jeden Werth von k entsteht ein zugehöriger von a, und der einfachste, der natürlichste Werth, den man für die allgemeine Gröfse k setzen kann ist offenbar = 1.

Nun hat man nach Formel 6: $k = \log n\, a$ und es wird, diesen Werth in die Reihe 10 gesetzt

$$a = 1 + \frac{\ln a}{1} + \frac{(\ln a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\ln a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

folglich wenn $k = \log n\, a = 1$ gesetzt wird, $a = e =$ der Basis des natürlichen Logarithmensystems (s. Bd. I, pag. 327) und man erhält dieselbe

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{(2)} + \frac{1}{(3)} + \frac{1}{(4)} + \ldots.\frac{1}{(m)}$$
$$= 2{,}71828\ 18284\ldots.$$

Ist der Exponent der Exponentialfunction y wieder eine Function von x, nämlich $z = fx$ so hat man nach No. 15:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial a^z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = k \cdot a^z \times \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a^z}{M} \times \frac{\partial z}{\partial x} = a^z \log n\, a \cdot \times \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a^z}{\log^a e} \times \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^z \times \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (12)$$

19. Ist die Function eine logarithmische Grundfunction,

$$y = \log^a x$$

so hat man $x = a^y$

Mithin nach No. 18, Formel 5

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \partial a^y = k a^y$$

und nach No. 17

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{k a^y}$$

und da $a^y = x$ ist, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \log^a x}{\partial x} = \frac{1}{kx} = \frac{1}{x \log n\, a} = \frac{M}{x} = \frac{\log^a e}{x} \qquad (1)$$

Für den natürlichen Logarithmus ist nach 18, $k = 1$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \, logn \, x}{\partial x} = \frac{1}{x} \qquad (2)$$

Ist der Numerus der logarithmischen Function eine Function von $x, = fx = z$, so ist nach No. 15

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \, log^a (fx)}{\partial x} = \frac{1}{k/x} \cdot \frac{\partial fx}{\partial x} = \frac{1}{kz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \, logn \, (fx)}{\partial x} = \frac{1}{fx} \cdot \frac{\partial fx}{\partial x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (4)$$

B. Kreisfunctionen.

20. Ist die Veränderliche der Sinus, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = sin \, x$$

so hat man bei dem beliebigen $\triangle x$ als Zuwachs von x

$$y + \triangle y = sin \, (x + \triangle x)$$

und $\triangle y = sin \, (x + \triangle x) - sin \, x$

$$= sin \, x \cdot cos \triangle x + cos \, x \cdot sin \triangle x - sin \, x$$

daher $\frac{\triangle y}{\triangle x} = cos \, x \cdot \frac{sin \triangle x}{\triangle x} - sin \, x \cdot \frac{1 - cos \triangle x}{\triangle x}$

Bei beliebiger Abnahme von $\triangle x$ kommt $cos \triangle x$ immer näher dem Werthe 1 folglich ist 1 der Grenzwerth von $cos \triangle x$ und folglich der Grenzwerth von

$$1 - cos \triangle x = 0$$

Daher der Grenzwerth von

$$sin \, x \cdot \frac{1 - cos \triangle x}{\triangle x} = 0$$

Nun ist $sin \triangle x < \triangle x < tg \triangle x$

hierzu $sin \triangle x = sin \triangle x = sin \triangle x$

gibt $\frac{sin \triangle x}{sin \triangle x} > \frac{sin \triangle x}{\triangle x} > \frac{sin \triangle x}{tg \triangle x}$

oder $1 > \frac{sin \triangle x}{\triangle x} > cos \triangle x$

Für $x = 0$ wird $cos \, x = 1$, durch beliebige Abnahme von $\triangle x$ kann also $cos \triangle x$ dem Werth 1 beliebig nahe gebracht werden und folglich ist der Werth 1 auch der Grenzwerth von $\frac{sin \triangle x}{\triangle x}$, weil er von dem Grenzwerth 1 und der Constanten 1 eingeschlossen ist.

Daher ist für die beliebige Abnahme von $\triangle x$ der Grenzwerth von

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = cos \, x \cdot 1 + 0$$

und $\frac{\partial y}{\partial x} = cos \, x$

21. Ist die Veränderliche der Cosinus, der Bogen die Urveränderliche, also $y = cos \, x$

so hat man $cos \, x = sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Setzt man $\frac{\pi}{2} - x = z$

so ist $y = sin \, z$

und nach No 19 und 15

$$\frac{\partial y}{\partial x} = cos \cdot z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\partial \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\partial x} = - cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = - sin \, x$$

22. Ist die Veränderliche die Tangente, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = tg \, x$$

so ist $\triangle y = tg \, (x + \triangle x) - tg \, x = \frac{sin \, (x + \triangle x)}{cos \, (x + \triangle x)} - \frac{sin \, x}{cos \, x}$

$$= \frac{sin \, (x + \triangle x) \, cos \, x - cos \, (x + \triangle x) \, sin \, x}{cos \, (x + \triangle x) \, cos \, x} = \frac{sin \, (x + \triangle x - x)}{cos \, (x + \triangle x) \, cos \, x}$$

$$= \frac{sin \triangle x}{cos \, (x + \triangle x) \, cos \, x}$$

also $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{cos \, (x + \triangle x) \, cos \, x} \cdot \frac{sin \triangle x}{\triangle x}$

Für die beliebige Abnahme von $\triangle x$ ist $cos \, x$ der Grenzwerth von $cos \, (x + \triangle x)$ und nach No. 19 der Grenzwerth von $\frac{sin \triangle x}{\triangle x} = 1$, daher hat man den Grenzwerth von $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{cos \, x \cdot cos \, x} \cdot 1$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \, tg \, x}{\partial x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x = 1 + tg^2 x$$

23. Ist die Veränderliche die Cotangente, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = cot \, x$$

so ist $cot \, x = tg \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

und setzt man $\frac{\pi}{2} - x = z$

so ist $z + \triangle z = \frac{\pi}{2} - (x + \triangle x)$

und $\triangle z = - \triangle x$

also $\frac{\triangle z}{\triangle x} = -1$

Nun ist $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{tg \, (z + \triangle z) - tg \, z}{\triangle z} \cdot \frac{\triangle z}{\triangle x}$

$$= - \frac{tg \, (z + \triangle z) - tg \, z}{\triangle z}$$

Für die beliebige Abnahme von $\triangle z$ ist aber der Grenzwerth des letzten Quotient $= \frac{\partial\, tg\, z}{\partial z} = sec^2 z$

folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, cot\, x}{\partial x} = -sec^2 z = -sec^2\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = -cosec^2 x$

$$= -(1 + cot^2 x) = -\frac{1}{sin^2 x}$$

24. Ist die Veränderliche die Secante, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = sec\, x$$

so ist $\triangle y = sec\,(x + \triangle x) - sec\, x = \frac{1}{cos\,(x + \triangle x)} - \frac{1}{cos\, x}$

$$= \frac{cos\, x - cos\,(x + \triangle x)}{cos\,(x + \triangle x) \cdot cos\, x} = \frac{2\, sin\, \frac{x + \triangle x + x}{2} \cdot sin\, \frac{x + \triangle x - x}{2}}{cos\,(x + \triangle x) \cdot cos\, x}$$

$$= \frac{2 \cdot sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \cdot sin\, \frac{\triangle x}{2}}{cos\,(x + \triangle x) \cdot cos\, x}$$

folglich $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)}{cos\,(x + \triangle x) \cdot cos\, x} \cdot \frac{sin\, \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}$

Für die beliebige Abnahme von $\triangle x$ ist der Grenzwerth von

$$sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = sin\, x$$

von $cos\,(x + \triangle x) = cos\, x$ und nach No. 19 von $\frac{sin\, \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} = 1$; daher hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, sec\, x}{\partial x} = \frac{sin\, x}{cos^2 x} = tg\, x \cdot sec\, x$$

Anmerk. Man kann, um $\frac{\partial\, sec\, x}{\partial x}$ zu ermitteln auch $sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$ setzen.

Dann hat man nach No. 13, Anmerk.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{cos^2 x} \cdot \frac{\partial\, cos\, x}{\partial x}$$

Nach No. 20 ist $\frac{\partial\, cos\, x}{\partial x} = -sin\, x$

daher $\frac{\partial\, sec\, x}{\partial x} = \frac{sin\, x}{cos^2 x}$

25. Ist die Veränderliche die Cosecante, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = cosec\, x = \frac{1}{sin\, x}$$

so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, cosec\, x}{\partial x} = -\frac{1}{sin^2 x} \cdot \frac{\partial\, sin\, x}{\partial x}$

also nach No. 19

$$\frac{\partial\, cosec\, x}{\partial x} = -\frac{cos\, x}{sin^2 x} = -cot\, x \cdot cosec\, x$$

Oder man setzt $cosec\, x = sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

so ist

$$\frac{\partial\, cosec\, x}{\partial x} = \frac{\partial\, sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\partial\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot \frac{\partial\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\partial x} = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -cot\, x \cdot cosec\, x$$

26. Ist die Veränderliche der Sinus versus, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = sinv\, x$$

so ist $\triangle y = sinv\,(x + \triangle x) - sinv\, x = 1 - cos\,(x + \triangle x) - (1 - cos\, \triangle x)$

$$= cos\, \triangle x - cos\,(x + \triangle x)$$

und $\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{cos\,(x + \triangle x) - cos\, x}{\triangle x}$

Nun ist der zweite Quotient der Zuwachsquotient des Cosinus, also dessen Grenzwerth das D. des Cosinus $= -sin\, x$, daher ist

$$\frac{\partial\, sinv\, x}{\partial x} = +sin\, x = \sqrt{1 - cos^2 x} = \sqrt{1 - (1 - sinv\, x)^2} = \sqrt{2\, sinv\, x - sinv^2 x} = \sqrt{2y - y^2}$$

27. Ist die Veränderliche der Cosinus versus, der Bogen die Urveränderliche, also $y = cosv\, x$

so ist, da $\cos v\, x = 1 - \sin x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \cos v\, x}{\partial x} = -\frac{\partial \sin x}{\partial x} = -\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$= -\sqrt{2 \cos v\, x - \cos v^2 x} = -\sqrt{2y - y^2}$$

28. Ist die Veränderliche ein Kreisbobogen, der Sinus des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc(\sin = x)$$

also gegenseitig $x = \sin y$

so ist $\Delta x = \Delta \sin y$

und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta \sin y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta \sin y}{\Delta y}\right)}$$

von diesen Differenzenquotienten zu den Grenzwerthen übergegangen gibt nach No. 20

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \sin y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

folglich ist $\frac{\partial\, arc(\sin = x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

29. Ist die Veränderliche ein Kreisbogen, der Cosinus des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc(\cos = x)$$

und gegenseitig $x = \cos y$

so hat man wie No. 28

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta \cos y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta \cos y}{\Delta y}\right)}$$

und zu den Grenzwerthen übergegangen nach No. 21

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \cos y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

also

$$\frac{\partial\, arc(\cos = x)}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

30. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, die Tangente des Bogens die Urveränderliche, also $y = arc(tg = x)$

und gegenseitig $x = tg\, y$

so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta tg\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta tg\, y}{\Delta y}\right)}$$

und zu den Grenzwerthen übergegangen nach No. 22

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial tg\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

also

$$\frac{\partial\, arc(tg = x)}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

31. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, die Cotangente des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc(\cot = x)$$

und gegenseitig $x = \cot y$

so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta \cot y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta \cot y}{\Delta y}\right)}$$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 23

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \cot y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{-\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

und

$$\frac{\partial\, arc(\cot = x)}{\partial x} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

32. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, die Secante des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc(\sec = x)$$

und gegenseitig $x = \sec y$

so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta \sec y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta \sec y}{\Delta y}\right)}$$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 24

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \sec y} = \frac{1}{tg\, y \cdot \sec y} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

also $\frac{\partial\, arc(sec = x)}{\partial x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

33. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, die Cosecante des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc(cosec = x)$$

und gegenseitig $x = cosec\, y$

so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, cosec\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, cosec\, y}{\Delta y}\right)}$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 25

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, cosec\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{-\cot y \cdot cosec\, y} = \frac{-1}{cosec\, y\sqrt{cosec^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

folglich $\frac{\partial\, arc(cosec = x)}{\partial x} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

34. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, der Sinus versus des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc(sinv = x)$$

und gegenseitig $x = sinv\, y$

so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{sinv\, y} = \frac{1}{\left(\frac{sinv\, y}{\Delta y}\right)}$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 26

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, sinv\, y}{\Delta y}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\, sinv\, y - sinv^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

daher $\frac{\partial\, arc(sinv = x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

35. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, der Cosinus versus des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc(cosv = x)$$

und gegenseitig $x = cosv\, y$

so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, cosv\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, cosv\, y}{\Delta y}\right)}$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 27

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, cosv\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{-\sqrt{2\, cosv\, y - cosv^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

daher $\frac{\partial\, arc(cosv = x)}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{2x - x^2}}$

Ist die Veränderliche x wieder von einer Veränderlichen z abhängig, so hat man in jedem der vorstehenden Fälle nach No. 15 zugleich

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \partial f x \cdot \frac{\partial x}{\partial z}$$

Zusammengesetzte transcendente Functionen.

36. Ist die Veränderliche der natürliche Logarithmus des natürl. Log. der Urveränderlichen, also

$$y = logn\,(logn\, x)$$

so setze $logn\, x = z$, und man hat nach No. 19, Formel 2

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial\, logn\, z}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

und $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\, logn\, x}{z\, \partial x} = \frac{1}{x z}$

also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, logn\,(logn\, x)}{\partial x} = \frac{1}{x\, logn\, x}$

37. Ist die Veränderliche der Briggische Log. des Briggischen Log. der Urveränderlichen, also

$$y = l \cdot br\,(l \cdot br\, x)$$

so setze $l \cdot br\, x = z$ und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, l \cdot br\, z}{\partial x} = \frac{\partial z}{z}\, log \cdot br\, e = \frac{\partial\, log \cdot br\, x}{log\, br \cdot x} \cdot log\, br \cdot e = \frac{log\, br\, e}{x\, log \cdot br\, x} \cdot log\, br \cdot e$$

also $\frac{\partial y}{\partial x} = log \cdot br \cdot (log\, br\, x) = \frac{(log\, br\, e)^2}{x\, log \cdot br\, x}$

38. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(sin\, x)$$

so setze $\sin x = z$, und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \ln z}{\partial x} = \frac{\partial z}{z} = \frac{\partial \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

daher $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \,logn \sin x}{\partial x} = \cot x$

39. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(\cos x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial logn(\cos x)}{\partial x} = \frac{\partial \cos x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tg\,x$$

40. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(tg\,x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \,logn\, tg\,x}{\partial x} = \frac{\partial\, tg\,x}{tg\,x} = \frac{\sec^2 x}{tg\,x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

41. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(\cot x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial logn(\cot x)}{\partial x} = \frac{\partial \cot x}{\cot x} = \frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} = \frac{-2}{\sin 2x}$$

42. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(\sec x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial logn(\sec x)}{\partial x} = \frac{\partial \sec x}{\sec x} = \frac{tg\,x \cdot \sec x}{\sec x} = tg\,x$$

43. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(\operatorname{cosec} x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial logn(\operatorname{cosec} x)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{-\cot x \cdot \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x} = -\cot x$$

Differenziale von Functionen die von mehreren Veränderlichen abhangen.

44. Wenn eine Function von mehreren Veränderlichen abhängt, so ist dies nur möglich, wenn alle diese Veränderlichen wieder Functionen einer und derselben Urveränderlichen sind, welche auch eine der eben gedachten Veränderlichen selbst sein kann.

Es sei $y = f(u, v, w, z \ldots.)$ so ist jede der Veränderlichen $u, v, w, z \ldots$ wiederum eine Function einer Urveränderlichen x, und welche man um dies zu bezeichnen in die obige allgemeine Darstellung als Veränderliche mit einführen kann und schreiben:

$$y = f(u, v, w, z \ldots. x)$$

Das D. dieser Function (y) in Beziehung auf die eigentliche Urveränderliche (x) ist nun gleich der Summe der Produkte aus den Differenzialen der Function (y) in Beziehung auf jede der Veränderlichen als Urvariable genommen, multiplicirt mit dem D. dieser letzten in Beziehung auf die eigentliche Urveränderliche (x) oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \ldots.. \qquad (1)$$

Um dies zu beweisen, soll zuerst der einfachste Fall genommen werden, nämlich der dafs y nur von 2 Veränderlichen u, z abhängt.

Also $\quad y = F(u, z)$

und es sei $\quad u = fx, \; z = \varphi x$

so ist $\quad u + \triangle u = f(x + \triangle x)$

$$z + \triangle z = \varphi(x + \triangle x)$$

$$y + \triangle y = F(u + \triangle u, z + \triangle z)$$

woraus $\quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{F(u + \triangle u, z + \triangle z) - F(u, z)}{\triangle x}$

Um nun die Function nach beiden Veränderlichen differenziren zu können, differenzirt man sie nach jeder von beiden einzeln, indem man jedesmal die andere sich constant denkt. Demnach schreibt man den Differenzenquotient

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{F(u + \triangle u, z + \triangle z) - F(u, z + \triangle z) + F(u, z + \triangle z) - F(u, z)}{\triangle x}$$

$$= \frac{F(u + \triangle u, z + \triangle z) - F(u, z + \triangle z)}{\triangle u}\cdot\frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{F(u, z + \triangle z) - F(u, z)}{\triangle z}\cdot\frac{\triangle z}{\triangle x}$$

Der erste Factor des ersten Summand ist nun der Differenzenquotient der Veränderlichen u, indem $z+\triangle z$ constant genommen wird, und der erste Factor des zweiten Summand der Differenzenquotient der Veränderlichen z, indem u constant gesetzt ist.

Mit der beliebigen Abnahme von $\triangle x$ nehmen $\triangle u$ und $\triangle z$ beliebig ab, der erste Differenzenquotient für die Abnahme von $\triangle u$ wird also zum Differenzial der Function $F(u, z+\triangle z)$, welchen Werth auch $z+\triangle z$ haben möge. Da aber mit $\triangle x$ auch $\triangle z$ beliebig abnimmt, so nähert sich mit diesen Abnahmen die Gröfse $z+\triangle z$ ihrem Grenzwerthe z. Man hat also, um den Grenzwerth des ersten Factors zu bestimmen, die Function $F(u, z+\triangle z)$ nach u als Urvariablen zu differenziren, wobei $z+\triangle z$ als constant betrachtet wird und in dem Resultat $\triangle z=0$ zu setzen. Da es aber gleichgültig ist, ob man erst nach u differenzirt und dann $\triangle z=0$ setzt oder erst $\triangle z=0$ setzt und dann nach u differenzirt, weil nämlich z und $\triangle z$ bei der Operation des Differenzirens nach u wie Constanten behandelt werden, so erhält man als Grenzwerth des ersten Factors im ersten Summand das Differenzial

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial F(u,z)}{\partial u}$$

der Grenzwerth des zweiten Factors $\frac{\triangle u}{\triangle x}$ ist das D. von u in Beziehung auf $x=\frac{\partial u}{\partial x}$ und folglich wird der erste Summand

$$\frac{\partial F(u,z)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

Eben so ist der erste Factor des zweiten Summand der Zuwachsquotient der Function $F(u, z)$ wenn z variabel und u constant ist, dessen Grenzwerth das D. dieser Function

$$\frac{\partial F(u,z)}{\partial z}=\frac{\partial y}{\partial z}$$

und der Grenzwerth des zweiten Factors $=\frac{\partial z}{\partial x}$, mithin der Grenzwerth des zweiten Summand:

$$\frac{\partial F(u,z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

also
$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (2)$$

Ist zweitens die Function von 3 Veränderlichen abhängig,

oder $y=F(u, z, v)$

so hat man die zusammengehörigen Aenderungen

$$x+\triangle x,\ y+\triangle y,\ z+\triangle z,\ v+\triangle v$$

Also
$$\triangle y = F(u+\triangle u, z+\triangle z, v+\triangle v) - F(u, z, v)$$
$$= F(u+\triangle u, z+\triangle z, v+\triangle v) - F(u, z, v+\triangle v) + F(u, z, v+\triangle v) - F(u, z, v)$$

woraus der Zuwachsquotient

$$\frac{F(u+\triangle u, z+\triangle z, v+\triangle v) - F(u, z, v+\triangle v)}{\triangle x}+\frac{F(u, z, v+\triangle v) - F(u, z, v)}{\triangle x}$$

und das gesuchte D. von y ist der Grenzwerth dieser Summe, also die Summe der Grenzwerthe beider Summanden für die beliebige Abnahme von $\triangle x$.

Nun ist der erste Summand der Zuwachsquotient der Function $F(u, z, v+\triangle v)$, wenn u und z sich ändern, $v+\triangle v$ aber constant ist. Man kann daher den Grenzwerth dieses Summanden nach dem eben geführten Beweis bestimmen; da nun $v+\triangle v$ wie constant sich verhält und in beiden Gliedern des Zuwachses mit demselben Werth $v+\triangle v$ vorkommt, so hat diese Gröfse auf das D. nach u und v keinen Einflufs. Da aber mit beliebiger Abnahme von $\triangle x$ auch $\triangle v$ beliebig abnimmt und $v+\triangle v$ seinen Grenzwerth v erhält, indem $\triangle v=0$ wird, so kann man eben so gut vor wie nach dem Differenziren $\triangle v=0$ setzen und man hat den Grenzwerth des ersten Summanden

$$\frac{\partial F(u,z,v)}{\partial x}=\frac{\partial F(u,z,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F(u,z,v)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

In dem zweiten Summand sind u und z als constant betrachtet und nur v ist veränderlich; dieser Summand ist also der Zuwachsquotient der Function y in welcher v die Variable ist. Setzt man diesem noch den Factor $\frac{\triangle v}{\triangle v}$ hinzu, so erhält man ihn:

$$\frac{F(u,z,v+\triangle v)-F(u,z,v)}{\triangle v}\cdot\frac{\triangle v}{\triangle x}$$

Der Grenzwerth des ersten Factors ist also das D. der Function y in Beziehung auf die Variable v und der des zweiten Factors das D. der Variablen v in Beziehung auf die eigentliche Urvariable x, mithin der Grenzwerth des zweiten Summand

$$= \frac{\partial F(u, z, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

mithin das D. der Function $y =$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

Man sieht, dafs das Gesetz nun auch für 4 Variable eben so erwiesen wird, indem man 2 Summanden bildet, deren erster der Zuwachsquotient der Function wird, wenn die ersten 3 Variablen sich ändern, die vierte constant bleibt und dessen Grenzwerth nach dem 2ten Theil des Beweises aus den 3 Summanden der Formel 3 besteht. Bezeichnet man die 4te Variable mit w, so wird der 4te Summand im D. $= \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$ analog mit dem 3ten Summand $\frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ im 2ten Theil des Beweises bestimmt u. s. f. für beliebig viele Veränderliche.

Beispiele.

1. Es sei $y = u^z = (fx)^{\varphi x}$
so ist nach Formel 2

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

Nun ist in der Forderung, welche der erste Summand ausspricht, z constant, folglich hat man nach No. 14:

$$\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot u^{z-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

In der Forderung des zweiten Summand ist u coustant und z variabel, also nach No. 18:

$$\frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = u^z \cdot logn\, u \frac{\partial z}{\partial x}$$

folglich $\frac{\partial u^z}{\partial x} = zu^{z-1} \frac{\partial u}{\partial x} + u^z\, ln\, u \frac{\partial z}{\partial x}$

2. Es sei (nach diesem 1. Beispiel)

$$y = x^x$$

so ist

$$\frac{\partial x^x}{\partial x} = x \cdot x^{x-1} + x^x\, ln\, x = x^x (1 + ln\, x)$$

3. Es sei (nach demselben t. Beispiel)

$$y = (x^m)^{x^n} = x^{mx^n}$$

Setze $mx^n = z$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^z}{\partial x} = zx^{z-1} + x^z\, ln\, x \frac{\partial z}{\partial x} = mx^n \cdot x^{mx^n - 1} + x^{mx^n}\, ln\, x \cdot nmx^{n-1}$$

$$= mx^{mx^n + n - 1} [1 + n\, ln\, x]$$

4. Es sei

$$y = sin^m\, x \cdot (ax^n + b)^p \cdot logn\, (a^x + c)$$

Setzt man

$$sin\, x = u;\; ax^n + b = z;\; a^x + c = v$$

so erhält man dio mittelbare Function

$$y = Fu \cdot fz \cdot \varphi v = u^m \cdot z^p \cdot ln\, v$$

Nun ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial Fu} \cdot \frac{\partial Fu}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial fz} \cdot \frac{\partial fz}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi v} \cdot \frac{\partial \varphi v}{\partial x}$$

$\frac{\partial y}{\partial Fu}$ besagt, dafs in diesem D. sowohl fz als φv constant ist, demnach da Fu als die Urvariable gilt ist

$$\frac{\partial y}{\partial Fu} = fz \cdot \varphi v = z^p \cdot ln\, v$$

eben so ist

$$\frac{\partial y}{\partial fz} = Fu \cdot \varphi v = u^m \cdot ln\, v$$

und $$\frac{\partial y}{\varphi v} = Fu \cdot fz = u^m \cdot z^p$$

Man hat also, diese Werthe in die Differenzialformel gesetzt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = z^p\, ln\, v \cdot \frac{\partial u^m}{\partial x} + u^m \cdot ln\, v \cdot \frac{\partial z^p}{\partial x} + u^m z^p \cdot \frac{\partial\, ln\, v}{\partial x}$$

Nun ist nach No. 15, 14 und 20

$$\frac{\partial u^m}{\partial x} = \frac{\partial u^m}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = mu^{m-1} \cdot \frac{\partial\, sin\, x}{\partial x} = m\, sin^{m-1}\, x \cdot cos\, x$$

Nach No. 15, t4 und 1

$$\frac{\partial z^p}{\partial x} = \frac{\partial z^p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = pz^{p-1} \cdot \frac{\partial (ax^n + b)}{\partial x} = p(ax^n + b)^{p-1} \cdot anx^{n-1} = pnax^{n-1}(ax^n + b)^{p-1}$$

Nach No. 15, 19 und 18

$$\frac{\partial\, ln\, v}{\partial x} = \frac{\partial\, ln\, v}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial (a^x + c)}{\partial x} = \frac{1}{a^x + c} \cdot a^x \cdot ln\, a$$

Setzt man alle diese Werthe in die Differenzialgleichung so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (ax^n + b)^p \cdot ln(a^x + c) \cdot m\, sin^{m-1} x \cdot cos\, x + sin^m x\, ln(a^x + c) pnax^{n-1} (ax^n + b)^{p-1}$$

$$+ sin^m x \cdot (ax^n + b)^p \cdot \frac{a^x}{a^x + c} ln\, a$$

$$= (ax^n + b)^{p-1} sin^{m-1} x \left[m (ax^n + b)\, ln (a^x + c) cos\, x + pna\, x^{n-1} ln (a^x + c) sin\, x \right.$$

$$\left. + (ax^n + b) \frac{a^x}{a^x + c} sin\, x\, ln\, a\right]$$

45. Wenn man die Differenziale einer Function in Beziehung auf eine Veränderliche so nimmt, als wenn die anderen Veränderlichen constant wären, so nennt man diese D. **Theil-Differenziale** oder **Partial-Differenziale** der Function. Nimmt man dagegen das D. in Beziehung auf die gemeinschaftliche Urveränderliche für alle in der Formel vorkommenden Veränderlichen, so heifst das D. **Total-Differenzial** oder **Gesammt-Differenzial**.

In der No. 44 gegebenen Function

$$y = F(u, v, w, z \ldots . x)$$

sind $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ Partial-Differenziale, weil in dem ersten $v, w, z \ldots$, in dem zweiten $u, w, z \ldots$, in dem dritten $u, v, z \ldots$ und in dem vierten $u, v, w \ldots$ constant genommen sind. Dagegen ist $\frac{\partial (y)}{\partial x}$ das Gesammtdifferenzial, bei welchem nach allen Veränderlichen u, v, w, z in Beziehung auf x als die Urveränderliche differenzirt ist.

Differenziale höherer Ordnungen.

46. Der Begriff und die Schreibweise der höheren D. sind in No. 7 angegeben.

Ist $y = x^4$ die Function, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 3 \cdot 4 \cdot x^2$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Höhere D. sind für die Function y unmöglich weil eine constante Gröfse kein D. hat.

Die Bildung der höheren D. aus den ihnen unmittelbar vorhergehenden D. geschieht wie die der ersten D. aus der Function. Jedoch sind einige Entwickelungen von Formeln als Erleichterungsmittel für die Auffindung der höheren D. in speciellen Fällen und Regeln aufanstellen erforderlich, die mit Beispielen begleitet werden sollen.

Da man die höheren D. und deren Grade in Beziehung auf die Function nimmt, so mufs bei den Regeln und Formeln auch die Function selbst zu Grunde gelegt werden. Denn wollte man von dem zunächst vorberstehenden D. ausgehen, so hätte man (von diesem D. nämlich als Function) ein erstes D. und kein höheres D. zu nehmen.

47. Besteht die Function aus einer algebraischen Summe von Veränderlichen (No. 9), so erhält man als D. die algebraische Summe der D. aller einzelnen Glieder, als D. dieser Function also als zweites D. wieder die algebr. Summe der D. des ersten D. u. s. w. Es ist also das höhere D. einer algebraischen Summe von Veränderlichen = der algebraischen Summe der höheren D. der Glieder, oder wenn

$$y = fx + \varphi x \pm \psi x \pm \ldots.$$

so ist

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^n fx}{\partial x^n} + \frac{\partial^n \varphi x}{\partial x^n} \pm \frac{\partial^n \psi x}{\partial x^n} \pm \ldots.$$

Ist $y = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$

so ist
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 9x^2 + 8x + 5$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 18x + 8$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 18$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

Man kann aber auch schreiben

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(3x^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(4x^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(5x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(1)}{\partial x^2}$$

worin die 2 letzten Glieder = 0 werden und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(3x^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(4x^2)}{\partial x^2} = 18x + 8$$

u. s. w.

48. Ist die Function ein Product von 2 Veränderlichen, so ergibt sich die Regel für die Bildung der D. höherer Ordnungen aus Folgendem.

Es sei allgemein

$$y = u \cdot z$$

so ist
$$\frac{\partial y}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(No. 11)}$$

Nun ist nach No. 47

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(u\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(z\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = u\cdot\frac{\partial\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= u\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Nnn hat man als D. dieses D. die Snmme der D. der vorstehenden 3 Producte, mithin

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = u\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + z\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= u\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + z\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Setzt man die Schlüsse so fort, so erhält man immer in dem $n$ten D. zn den beiden äufseren Gliedern $u\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ und $z\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, die mittleren Glieder enthalten der Reihe nach

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} \cdots\cdots \frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

also die Exponenten nach der Ordnung der binomischen Reihe; und auch die Coefficienten sind die dazu gehörigen Binomial-Coefficienten. Von der Allgemeingültigkeit dieses Gesetzes überzeugt man sich, wenn man das Gesetz für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ als richtig annimmt und die Reihe noch einmal differenzirt, woraus $\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}$ entsteht.

Die erste Reihe ist:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = u\cdot\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + n_1\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + n_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots..$$

$$+ n_m\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial^{n-m} z}{\partial x^{n-m}} + \ldots n_{n-1}\frac{\partial^{n-1} n}{\partial x^{n-1}}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\cdot z$$

und man erhält

$$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} = u\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} + (n+1)_1\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + (n+1)_2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots$$

$$+ (n+1)\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}\cdot z$$

49. Ist die Function ein Quotient zwischen 2 Veränderlichen, so ergiebt sich die Regel für die Bildung der höheren D. aus Folgendem:

Es sei $y = \frac{u}{z}$

so Ist nach No. 13

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{z^2}\left[z\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

Nun erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{z^4}\left[z^2\partial\left(z\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{1}{\partial x} - \left(z\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z^2}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{1}{z^4}\left[z^2\left(z\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - u\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2z\frac{\partial z}{\partial x}\left(z\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{1}{z^3}\left[z^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - zu\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2z\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$$

Beispiel.

Es sei $u = x^2$

$z = a + bx^3$

so ist $\frac{u}{z} = \frac{x^2}{a + bx^3}$

Nun ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3b\,x^2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot bx$$

nnd man hat

$$\frac{\partial^2 \frac{u}{z}}{\partial x^2} = [2\,(a + bx^3)^2 - 6\,bx\,(a + bx^3)\,x^2 - 2\,(a + bx^3) \cdot 3bx^2 \cdot 2x + 2x^2\,(3bx^2)^2] \times \frac{1}{(a + bx^3)^3}$$

oder rednclrt $\frac{\partial^2 \frac{u}{z}}{\partial x^2} = \frac{2\,(a^2 - 7abx^3 + b^2\,x^6)}{(a + bx^3)^3}$

Nimmt man u und z in x ausgedrückt den Quotient $\frac{x^2}{a + bx^3}$, nnd differenzirt nach No. 13, so hat man

$$\frac{\partial \frac{u}{z}}{\partial x} = \frac{(a + bx^3)\,2x - x^2 \cdot 3bx^2}{(a + bx^3)^2} = \frac{2ax - bx^4}{(a + bx^3)^2}$$

nnd wieder differenzirt, gibt

$$\frac{\partial^2 \frac{u}{z}}{\partial x^2} = \frac{(a + bx^3)^2 \times (2a - 4bx^3) - (2ax - bx^4) \times 2\,(a + bx^3) \cdot 3bx^2}{(a + bx^3)^4}$$

und reducirt

$$\frac{2\,(a^2 - 7abx^3 + b^2x^6)}{(a + bx^3)^3}$$

Die Formeln für die folgenden höheren D. gewähren noch weniger Vortheile gegen eine directe zweimalige Differenzirnng.

50. Die höheren D. von Potenzen mit constantem Exponent sind am einfachsten herzuleiten wie schon No. 46 angegeben ist. Ist die Wnrzel Function einer anderen Veränderlichen, so hat man

$$\frac{\partial z^n}{\partial x} = n z^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z^n}{\partial x^2} = \partial \left(n z^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

und dieses D. mnfs nach No. 11 bestimmt werden, wenn man bei gegebener Function z nicht die directe Herleitnng von $\partial^2 z = \partial^2 y\, x$ vorzieht Nach No. 11 hat man

$$\left.\begin{aligned} \partial \left(n z^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}\right) &= n z^{n-1} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n\,(n - 1) z^{n-2} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^2} &= n z^{n-2} \left[z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (n - 1) \frac{\partial z}{\partial x} \right] \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Beispiel.

Es sei $y = z^4 = (a + bx^3)^4$

so hat man $\frac{\partial z}{\partial x} = 3bx^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6bx$$

Nach der Formel ist, da $n = 4$ ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4 \cdot (a + bx^3)^2 [(a + bx^3) \cdot 6bx + 3 \cdot 3bx^2]$$

$$= 12bx\,(a + bx^3)^2\,(2a + 3x + 2bx^3)$$

Differenzirt man zweimal hintereinander direct, so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4\,(a + bx^3)^3 \times 3\,bx = 12\,bx^2\,(a + bx^3)^3$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12 \cdot bx^2 \cdot 3(a + bx^3)^2 + (a + bx^3)^3 \times 2 \cdot 12 \cdot bx$$

$$= 12 \cdot bx\,(a + bx^3)^2 (2a + 3x + 2bx^3)$$

51. Differenzirt man Formei 1 noch einmal, so erhält man

$$n z^{n-1} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot n \cdot (n - 1)\, z^{n-2} \frac{\partial z}{\partial x} + n\,(n - 1)\, z^{n-2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^3} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot n\,(n - 1)(n - 2)\, z^{n-3} \frac{\partial z}{\partial x}$$

oder reducirt nnd geordnet

$$\frac{\partial^3 z^n}{\partial x^3} = n z^{n-1} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + n\,(n - 1)\, z^{n-2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + 1\right) + n\,(n - 1)\,(n - 2)\, z^{n-3} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

Wird nach dieser Formel das 3te D. des Beispiels No. 50 gebildet, so erhält man, da $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6b$ ist

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 4(a+bx^3)^3 \cdot 6b + 4 \cdot 3 \cdot (a+bx^3)^2 \cdot bx(3bx^2+1) + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (a+bx^3)(3bx^2)^2$$
$$= 24 \cdot b(a+bx^3)(a^2+3ax+11abx^3+12bx^4+10b^2x^6)$$

Differenzirt man das zweite D. in No. 50 direct, so erhält mau

$$12 \cdot bx(a+bx^3)^2(3+6bx^2)+(3x+2a+2bx^2)(a+bx^3)^2 \cdot 12 \cdot b$$
$$+ 12bx(3x+2a+2bx^3) \cdot 2(a+bx^2) \cdot 3bx^5$$

giht reducirt das eben angegebene $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$

52. Die höheren Differenziale der trigonometrischen Functionen sind aus den vorhergehenden leicht ahznleiten, wenn der Bogen als Urvariabel gegeben ist, weil die ersten D. ebenfalls trig. Fnnctionen sind.

Es ist $\partial \sin x = x$

also $\partial^2 \sin x = \partial \cos x = -\sin x$

$\partial^3 \sin x = \partial(-\sin x) = -\cos x$

$\partial^4 \sin x = \partial(-\cos x) = +\sin x$

n. s. w.

So ist bei allen übrigen Fnnctionen, dem *cos*, der *tg* n. s. w. zn verfahren; Formeln ahzuleiten ist ebenfalls nicht schwierig.

Ist dagegen der Bogen wieder Function einer anderen Urveränderlichen, dann erhält man

$$\frac{\partial \sin z}{\partial x} = \cos z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 \sin z}{\partial x^2} = \partial\left(\cos z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

also das D. aus einem Product; man hat nach No. 11, und für höhere D. nach No. 48 zu verfahren.

53. Ist die Fnnction eine Exponentialgröfse mit constanter Grundzahl, so finden sich die höheren D. folgender Art.

Es ist $\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x$ (pag. 265 No. 7)

folglich sind bei dieser deshalb so merkwürdigen Function alle höheren D. einander gleich und deren Anzahl ist unzählbar.

Es ist $\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x \, logn\, a$ (pag. 265 No. 6)

mithin $\frac{\partial^2 a^x}{\partial x^2} = logn\, a \cdot \frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x (logn\, a)^2$

also $\frac{\partial^3 a^x}{\partial a^3} = a^x \, (logn\, a)^3$

überhaupt $\frac{\partial^n a^x}{\partial x^n} = a^x (logn\, a)^n$

Ist der Exponent eine abhängig Veränderliche und es sollen in Beziehung auf die Urvariable die höheren D. genommen werden, so hat man

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^z \frac{\partial z}{\partial x} \text{ (pag. 265, No 12)}$$

also nach No. 48

$$\frac{\partial^2 e^z}{\partial x^2} = e^z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial e^z}{\partial x}$$
$$= e^z \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$$

und so hat man auch für die weiteren höheren D. nach No. 48 zu verfahren.

Ein Gleiches gilt von a^z.

Es ist

$$\frac{\partial a^z}{\partial x} = a^z \frac{\partial z}{\partial x} logn\, a \text{ (pag. 265, No. 11)}$$

also

$$\frac{\partial^2 a^z}{\partial x^2} = a^z \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 logn\, a\right] logn\, a$$
$$\text{oder} = a^z \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} ln \cdot a + \left(\frac{\partial z}{\partial y} ln\, a\right)^2\right]$$

n. s. w.

54. Die höheren D. von logarithmischen Gröfsen entstehen folgender Art:

Es ist

$$\frac{\partial\, logn\, x}{\partial x} = \frac{1}{x} \text{ (pag. 266, Formel 2)} \quad (1)$$

also

$$\frac{\partial^2 ln\, x}{\partial x^2} = \partial \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad (2)$$
$$\frac{\partial^3 ln\, x}{\partial x^3} = \partial\left(-\frac{1}{x^2}\right) = +2\frac{1}{x^3} \quad (3)$$
$$\frac{\partial^4 ln\, x}{\partial x^4} = 2\partial \frac{1}{x^3} = -6\frac{1}{x^4} \quad (4)$$

n. s. w.

Es ist (pag. 265, Formel 1) $a = 10$ gesetzt

$$\frac{\partial\, log \cdot br\, x}{\partial x} = \frac{1}{x\, ln\, 10} \quad (5)$$

also

$$\frac{\partial^2 l \cdot br\, x}{\partial x^2} = \frac{1}{ln\, 10} \cdot \partial \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2\, ln\, 10} \quad (6)$$
$$\frac{\partial^3 l \cdot br\, x}{\partial x^3} = +2\frac{1}{x^3\, ln\, 10} \quad (7)$$

n. s. w.

Ist die Veränderliche $z = fx$ von einer Urveränderlichen x abhängig, so ist

$$\frac{\partial\, ln\, z}{\partial x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \text{ (pag. 266, Formel 4)} \quad (8)$$

Man hat also für die höheren D. wie No. 53 nach No. 48 zu verfahren. Man erhält

$$\frac{\partial^2 ln\, z}{\partial x^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \partial \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x} \text{ n. s. w.} \quad (9)$$

Es ist $\frac{\partial \, log \; br \, z}{\partial x} = \frac{1}{k z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{z \, ln \, 10} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ (pag. 266, Formel 3) (10)

also $\frac{\partial^2 \, log \cdot br \cdot z}{\partial x^2} = \frac{1}{z \, ln \, 10} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \partial \frac{1}{z \, ln \, 10} = \frac{1}{z \, ln \, 10} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{z^2 ln \, 10} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ (11)

u. s. w.

Hiermit sollen die Regeln zur Bildung höherer D. von einfachen Functionen in Beziehung auf die Urveränderliche abgeschlossen sein.

55. Ist eine Function y in Beziehung auf eine Veränderliche z gegeben, die wieder von einer Urveränderlichen x abhängt, sind ferner die ersten und zweiten Differenziale von y und z in Beziehung auf x gegeben, und man will das zweite D. von y in Beziehung auf z durch die gegebenen D. ausdrücken, so hat man nach No. 16 zuerst

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$$

Um aus dieser Formel das zweite D., also $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ zu bilden hat man das D. des rechts stehenden Quotient in Beziehung auf x nach No. 13

$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

Soll dieses D. dem D. von $\frac{\partial y}{\partial z}$ = sein, so hat man dasselbe ebenfalls in Beziehung auf x zu nehmen, nämlich

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial x} = \partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \text{ (pag. 263, No. 15)}$$

$$\text{Es ist also } \partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

folglich beiderseits mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ dividirt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3}$$

Beispiel.

Es sei $y = z^2$

$z = a + bx^2$

folglich $y = (a + bx^2)^2$

Nun ist also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4bx\,(a + bx^2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4b\,(a + 3bx^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2bx$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2b$$

Nach der Formel hat man nun

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2bx \times 4b\,(a + 3bx^2) - 4bx\,(a + bx^2) \times 2b}{(2bx)^3} = \frac{16\,b^3 x^2}{8\,b^3 x^2} = 2$$

Zur Probe hat man

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \partial z^2 = 2z$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \partial 2z = 2$$

Noch 2 Beispiele über diesen Satz finden sich in den beiden Art. Cycloide No 6 pag. 198 und No. 5 pag. 205.

56. Enthält eine Function 2 Veränderliche und wird dieselbe zuerst nach der einen als Urveränderlichen differenzirt, während die andere als constant betrachtet wird (s. No. 44, 45), und dann mit dem erhaltenen D. in Beziehung auf die andere Veränderliche eben so verfahren, so erhält man das zweite D. der Function von 2 Veränderlichen (s. No. 7), und dies 2te D. ist dasselbe, man mag erst die eine und dann die andere oder erst die zweite und dann die erste als alleinige Urveränderliche ansehen.

Also wenn $y = f(x, z)$ ist, so ist

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial x}$$

oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x}$

Denn ändert man zuerst x in $x + \triangle x$, läfst z constant, so entsteht der Zuwachsquotient

$$\frac{f(x + \triangle x, z) - f(x, z)}{\triangle x} \quad (1)$$

Der Grenzwerth hiervon ist das D. von y in Beziehung auf x nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

Betrachtet man nun die beiden Werthe x und $x + \triangle x$ als Constanten und gibt z einen zweiten Werth $z + \triangle z$, so ändert sich der Zuwachsquotient in

$$\frac{f(x + \triangle x, z + \triangle z) - f(x, z + \triangle z)}{\triangle x} \quad (2)$$

Zieht man hiervon den ersten Zuwachsquotient ab, so erhält man den Zuwachs des Zuwachsquotienten als Function von z; in welcher die Gröfsen x und $x + \triangle x$ constant sind, und dieeen Zuwachs mit $\triangle z$ dividirt, den Zuwachsquotient der eben gedachten Function:

$$\frac{\frac{f(x + \triangle x, z + \triangle z) - f(x, z + \triangle z)}{\triangle x} - \frac{f(x + \triangle x, z) - f(x, z)}{\triangle x}}{\triangle z} \quad (3)$$

Nimmt man hierin zuerst z und $\triangle z$ constant und läfst $\triangle x$ beliebig abnehmen, so entstehen folgende Grenzwerthe: Der erste Quotient des Zählers wird zu dem Grenzwerthe der Function $f(x, z + \triangle z)$ wenn $z + \triangle z$ constant bleibt also wird

$$= \frac{\partial f(x, z + \triangle z)}{\partial x}$$

und der 2te Quotient des Zählers wird zu dem Grenzwerthe der Function $f(x, z)$ wenn z constant bleibt, also wird

$$= \frac{\partial f(x, z)}{\partial x}$$

mithin entsteht aus dem Zuwachsquotient (3) bei constant bleibendem z und $\triangle z$ dieser Grenzwerth:

$$\frac{\frac{\partial f(x, z + \triangle z)}{\partial x} - \frac{\partial (x, z)}{\partial x}}{\triangle z} \quad (4)$$

Dieser Grenzwerth ist aber der Zuwachsquotient der Function $\frac{\partial f(x, z)}{\partial x}$, wenn man darin x constant setzt, und z um $z + \triangle z$ sich ändern läfst, mithin ist der Grenzwerth des Zuwachsquotienten (4) das D. der Function $\frac{\partial f(x, z)}{\partial x}$, in Beziehung auf die Veränderliche z, also

$$= \frac{\partial \left(\frac{\partial f(x, z)}{\partial x}\right)}{\partial z} \quad (5)$$

Da nun der Zuwachsquotient (3) durch beliebige Abnahme von $\triangle x$ dem Zuwachsquotient (4) beliebig nahe kommen kann, dieser aber durch beliebige Abnahme von $\triangle z$ dem Differenzial (5), so kann auch der Zuwachsquotient (3) diesem D. beliebig nahe kommen, wenn in ihm $\triangle x$ und $\triangle z$ **zugleich** beliebig abnehmen. Folglich ist das D. (5) der Grenzwerth des Quotient (3) bei gleichzeitiger Abnahme von $\triangle x$ und $\triangle z$ in ihm.

Vertauscht man in dem Zuwachsquotient (3) die Mittelglieder, so erhält man

$$\frac{f(x + \triangle x, z + \triangle z) - f(x + \triangle x, z)}{\triangle x \triangle z} - \frac{f(x, z + \triangle z) - f(x, z)}{\triangle x \triangle z}$$

oder

$$\frac{\frac{f(x + \triangle x, z + \triangle z) - f(x + \triangle x, z)}{\triangle z} - \frac{f(x, z + \triangle z) - f(x, z)}{\triangle z}}{\triangle x} \quad (6)$$

Hieraus entsteht bei beliebiger Abnahme von $\triangle z$, während $\triangle x$ und x constant bleiben, statt der Formel 4, der Grenzwerth

$$\frac{\frac{\partial f(x + \triangle x, z)}{\partial z} - \frac{\partial (x, z)}{\partial z}}{\triangle x} \quad (7)$$

und dieser Grenzwerth ist wieder der Zuwachsquotient der Function $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$ wenn man darin z constant setzt und x um $x + \triangle x$ sich ändern läfst, mithin ist der Grenzwerth dieses Quotient (7) das D. der Function $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$ in Beziehung auf die Veränderliche x also

$$= \frac{\partial \left(\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}\right)}{\partial x} \quad (8)$$

Da nun wieder der Zuwachsquotient

(6) durch beliebige Abnahme von $\triangle z$ dem Zuwachsquetient (7) beliebig nahe kommen kann, dieser aber durch beliebige Abnahme von $\triangle x$ dem Differenzial (8), so kann auch der Zuwachsquetient (6) dem D. (8) beliebig nahe kommen wenn in ihm gleichzeitig $\triangle z$ und $\triangle x$ abnehmen, und folglich ist das D. (8) der Grenzwerth des Quotient 6.

Da nun die beiden Ausdrücke 3 und 6 eine und dieselbe Größe sind, so sind auch deren Grenzwerthe einander gleich; aus der gleichzeitigen beliebigen Abnahme von $\triangle x$ und $\triangle z$ entstehen also die Differenziale

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\right)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x}$$

womit die Richtigkeit des Satzes erwiesen ist.

57. Aus No. 56 erfolgt leicht, daſs es gleichgültig ist in welcher Reihenfolge höhere als zweite D. in Beziehung auf beide Veränderliche differenzirt werden, und es ist allgemein

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial^m x \cdot \partial^n y} = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial^n y \cdot \partial^m x} = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^p \cdot \partial y^q \cdot \partial x^{m-p}\, \partial y^{n-q}}$$

Differenzialformel ist ein Ausdruck, der das Differenzial einer veränderlichen Gröſse oder Function von bestimmter Form angiebt. Die geordnete Zusammenstellung von D.formeln, wie hier eine solche erfolgt, hat einen zweifachen Nutzen. Erstens hat man nicht nöthig die Differenziale zusammengesetzter Functionen aus den Elementarformeln erst abzuleiten. Zweitens kann man gegenseitig die Functionen als die Integrale der ermittelten Differenziale erkennen, Differenziale, die zu integriren gegeben sind, mit diesen vergleichen und beurtheilen, welche Transformationen man mit dem gegebenen Differenzial vornehmen muſs um es einem hier aufgeführten ähnlichen D. vollkommen gleich zu machen, so daſs dann das Integral in der dem D. hier vorgeschriebenen Function gefunden ist. Uebrigens ist, um Raum zu ersparen, die Schreibart $\partial y = z\,\partial x$ statt $\frac{\partial y}{\partial x} = z$ gewählt und x als Urvariabel angesehen, so daſs $\partial x = 1$ als Factor fortgelassen ist.

1. $y = a = ax^0 = az^0$	$\partial y = 0$
2. $y = x$	$\partial y = 1$
3. $y = z$	$\partial y = \partial z$
4. $y = a + x$	$\partial y = 1$
5. $y = a + z$	$\partial y = \partial z$
6. $y = fx$	$\partial y = \partial fx$
7. $y = fz$	$\partial y = \partial fz \cdot \partial z$
8. $y = ax$	$\partial y = a$
9. $y = afx$	$\partial y = a\partial fx$
10. $y = afz$	$\partial y = a\,\partial fz \cdot \partial z$

11. $y = Fx \pm fx \pm \varphi x$ ..	$\partial y = \partial Fx \pm \partial fx \pm \partial \varphi x$
12. $y = fz \pm \varphi z$	$\partial y = \partial fz \cdot \partial z \pm \partial \varphi z \cdot \partial z$
13. $y = fx \cdot \varphi x$	$\partial y = fx \cdot \partial \varphi x + \varphi x \cdot \partial fx$
14. $y = u \cdot z$	$\partial y = u\,\partial z + z\,\partial u$
15. $y = u \cdot z \cdot v$	$\partial y = uz\,\partial v + uv\,\partial z + zv \cdot \partial u$
16. $y = \frac{fx}{\varphi x}$	$\partial y = \frac{\varphi x \cdot \partial fx - fx \cdot \partial \varphi x}{(\varphi x)^2}$
17. $y = \frac{fz}{\varphi u}$	$\partial y = \frac{\varphi u \cdot \partial fz \cdot \partial z - fz \cdot \partial \varphi u \cdot \partial u}{(\varphi u)^2}$
18. $y = \frac{a}{\varphi x}$	$\partial y = -\, a\,\frac{\partial \varphi x}{(\varphi x)^2}$
19. $y = \frac{a}{fz}$	$\partial y = -\, a\,\frac{\partial fz \cdot \partial z}{(fz)^2}$

20. $y = \frac{a + bz}{\alpha + \beta z}$	$\partial y = \frac{b\alpha - a\beta}{(\alpha + \beta z)^2}\partial z$	23. $y = \frac{a - bz}{\alpha + \beta z}$	$\partial y = \frac{-\, b\alpha - a\beta}{(\alpha + \beta z)^2}\partial z$
21. $y = \frac{a - bz}{\alpha - \beta z}$	$\partial y = \frac{-\, b\alpha + a\beta}{(\alpha - \beta z)^2}\partial z$	24. $y = x^n$	$\partial y = nx^{n-1}$
22. $y = \frac{a + bz}{\alpha - \beta z}$	$\partial y = \frac{b\alpha + a\beta}{(\alpha - \beta z)^2}\partial z$	25. $y = (\varphi x)^n$	$\partial y = n(\varphi x)^{n-1}\,\partial \varphi x$
		26. $y = (\varphi z)^n$	$\partial y = n(\varphi z)^{n-1}\,\partial \varphi z \cdot \partial z$

27. $\begin{cases} y = z^{\frac{1}{n}} & \partial y = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} \partial z \\ y = \sqrt[n]{z} & \partial y = \frac{1}{n} \frac{\partial z}{\sqrt[n]{z^{n-1}}} \end{cases}$

28. $\begin{cases} y = z^{\frac{m}{n}} & \partial y = \frac{m}{n} z^{\frac{m}{n}-1} \partial z \\ y = \sqrt[n]{z^m} & \partial y = \frac{m}{n} \frac{\partial z}{\sqrt[n]{z^{n-m}}} \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = z^{-n} & \partial y = -n z^{-(n+1)} \partial z \\ y = \frac{1}{z^n} & \partial y = -n \frac{\partial z}{z^{n+1}} \end{cases}$

30. $\begin{cases} y = z^{-\frac{1}{n}} & \partial y = -\frac{1}{n} z^{-\left(\frac{1}{n}+1\right)} \partial z \\ y = \frac{1}{\sqrt[n]{z}} & \partial y = -\frac{1}{n} \frac{\partial z}{\sqrt[n]{z^{n+1}}} \end{cases}$

31. $\begin{cases} y = z^{-\frac{m}{n}} & \partial y = -\frac{m}{n} z^{-\left(\frac{m}{n}+1\right)} \partial z \\ y = \frac{1}{\sqrt[n]{z^m}} & \partial y = -\frac{m}{n} \frac{\partial z}{\sqrt[n]{z^{n+m}}} \end{cases}$

---

32. $y = z^3$ — $\partial y = 3z^2 \partial z$
33. $y = z^2$ — $\partial y = 2z \partial z$
34. $y = z^1$ — $\partial y = \partial z$
35. $y = z^{-1}$ — $\partial y = -z^{-2} \partial z$
36. $y = z^{-2}$ — $\partial y = -2z^{-3} \partial z$
37. $y = z^{-3}$ — $\partial y = -3z^{-4} \partial z$

Anmerk.
$\partial y = z^{-1}$ s. $y = \log n \cdot$ (No. 24)

---

38. $y = z^{\frac{1}{4}}$ — $\partial y = \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} \partial z$
39. $y = z^{\frac{1}{3}}$ — $\partial y = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \partial z$
40. $y = z^{\frac{1}{2}}$ — $\partial y = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \partial z$
41. $y = z^{-\frac{1}{2}}$ — $\partial y = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \partial z$
42. $y = z^{-\frac{1}{3}}$ — $\partial y = -\frac{1}{3} z^{-\frac{4}{3}} \partial z$
43. $y = z^{-\frac{1}{4}}$ — $\partial y = -\frac{1}{4} z^{-\frac{5}{4}} \partial z$

---

44. $y = z^{\frac{3}{4}}$ — $\partial y = \frac{3}{4} z^{-\frac{1}{4}} \partial z$
45. $y = z^{\frac{2}{3}}$ — $\partial y = \frac{2}{3} z^{-\frac{1}{3}} \partial z$
46. $y = z^{-\frac{2}{3}}$ — $\partial y = -\frac{2}{3} z^{-\frac{5}{3}} \partial z$
47. $y = z^{-\frac{3}{4}}$ — $\partial y = -\frac{3}{4} z^{-\frac{7}{4}} \partial z$

---

48. $y = \frac{1}{z}$ — $\partial y = -\frac{\partial z}{z^2}$
49. $y = \frac{1}{z^2}$ — $\partial y = -2 \frac{\partial z}{z^3}$
50. $y = \frac{1}{z^3}$ — $\partial y = -3 \frac{\partial z}{z^4}$
51. $y = \frac{1}{z^4}$ — $\partial y = -4 \frac{\partial z}{z^5}$

---

52. $y = \sqrt{z}$ — $\partial y = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\sqrt{z}}$
53. $y = \sqrt[3]{z}$ — $\partial y = \frac{1}{3} \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^2}}$
54. $y = \sqrt[4]{z}$ — $\partial y = \frac{1}{4} \frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^3}}$

---

55. $y = \sqrt{z^3} (= z\sqrt{z})$ — $\partial y = \frac{3}{2} \frac{\partial z}{\sqrt{z^{-1}}} = \frac{3}{2} \sqrt{z} \cdot \partial z$
56. $y \sqrt[3]{z^2}$ — $\partial y = \frac{2}{3} \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z}}$
57. $y = \sqrt[4]{z^5} (= z\sqrt[4]{z})$ — $\partial y = \frac{5}{4} \frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^{-1}}} = \frac{5}{4} \sqrt[4]{z} \partial z$
58. $y = \sqrt[5]{z^3}$ — $\partial y = \frac{3}{5} \frac{\partial z}{\sqrt[5]{z^2}}$

---

59. $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ — $\partial y = -\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\sqrt{z^3}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial z}{z\sqrt{z}}$
60. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ — $\partial y = -\frac{1}{3} \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^4}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial z}{z\sqrt[3]{z}}$
61. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{z}}$ — $\partial y = -\frac{1}{4} \frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^5}} = -\frac{1}{4} \frac{\partial z}{z\sqrt[4]{z}}$

---

62. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z^5}}$ — $\partial y = -\frac{2}{3} \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^5}} = -\frac{2}{3} \frac{\partial z}{z\sqrt[3]{z^2}}$

63. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad \partial y = -\frac{5}{3}\frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^8}} = -\frac{5}{3}\frac{\partial z}{z^2\sqrt[3]{z^2}}$

64. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ $\quad \partial y = -\frac{3}{4}\frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^7}} = -\frac{3}{4}\frac{\partial z}{z\sqrt[4]{z^3}}$

---

65. $y = (a + bz^n)^m$ $\quad \partial y = mnbz^{n-1}(a + bz^n)^{m-1}\,\partial z$

66. $y = (a + bz^n)^{-m} = \frac{1}{(a - bz^n)^m}$ $\quad \partial y = -mnbz^{n-1}(a + bz^n)^{-(m+1)}\,\partial z = -\frac{mnbz^{n-1}\,\partial z}{(a + bz^n)^{m+1}}$

67. $y = (a + bz^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a + bz^n}$ $\quad \partial y = \frac{n}{m}bz^{n-1}(a + bz^n)^{\frac{n}{m}-1}\,\partial z = \frac{n}{m}\frac{bz^{n-1}\,\partial z}{\sqrt[m]{(a + bz^n)^{m-1}}}$

68. $y = (a + bz^n)^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a + bz^n}}$ $\quad \partial y = -\frac{n}{m}z^{n-1}(a + bz^n)^{-\left(\frac{1}{m}+1\right)}\,\partial z = -\frac{n}{m}\frac{b\cdot z^{n-1}\,\partial z}{\sqrt[m]{(a + bz^n)^{m+1}}}$

69. $y = (a + bz^n)^{\frac{m}{q}} = \sqrt[q]{(a + bz^n)^m}$ $\quad \partial y = \frac{mn}{q}bz^{n-1}(a + bz^n)^{\frac{m}{q}-1}\,\partial z = \frac{mn}{q}bz^{n-1}\sqrt[q]{(a + bz^n)^{m-q}}\,\partial z$

70. $y = (a + bz^n)^{-\frac{m}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(a + bz^n)^m}}$ $\quad \partial y = -\frac{mn}{q}bz^{n-1}(c + bz^n)^{-\left(\frac{m}{q}+1\right)}\,\partial z = -\frac{mn}{q}\frac{bz^{n-1}\,\partial z}{\sqrt[q]{(a + bz^n)^{m+q}}}$

---

71. $y = \sqrt{a + bz^2}$ $\quad \partial y = \frac{bz\cdot\partial z}{\sqrt{a + bz^2}}$

72. $y = \frac{1}{\sqrt{a + bz^2}}$ $\quad \partial y = -\frac{bz\,\partial z}{\sqrt{(a + bz^2)^3}}$

73. $y = \sqrt[3]{(a + bz^2)}$ $\quad \partial y = \frac{2}{3}\cdot\frac{bz\,\partial z}{\sqrt[3]{(a + bz^2)^2}}$

74. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(a + bz^2)}}$ $\quad \partial y = -\frac{2}{3}\frac{bz\,\partial z}{\sqrt[3]{(a + bz^2)^4}}$

---

75. $y = z^p(a + bz^n)^m$ $\quad \partial y = pz^{p-1}(a + bz^n)^m\,\partial z + mnbz^{n+p-1}(a + bz^n)^{m-1}\,\partial z$
$\quad = z^{p-1}(a + bz^n)^{m-1}[p(a + bz^n) + mnbz^n]\,\partial z$

76. $y = z^p(a + bz)^m$ $\quad \partial y = z^{p-1}(a + bz)^{m-1}[p(a + bz) + mnbz]$

77. $y = z\sqrt{a + bz^2}$ $\quad \partial y = \frac{a + 2bz^2}{\sqrt{a + bz^2}}\,\partial z$

78. $y = \frac{\sqrt{a + bz^2}}{z}$ $\quad \partial y = -\frac{a\,\partial z}{z^2\sqrt{a + bz^2}}$

79. $y = \frac{z}{\sqrt{a + bz^2}}$ $\quad \partial y = \frac{a\,\partial z}{\sqrt{(a + bz^2)^3}}$

80. $y = \frac{1}{z\sqrt{a + bz^2}}$ $\quad \partial y = -\frac{a + 2bz^2}{z^2(a + bz^2)^{\frac{3}{2}}}\,\partial z$

e die Basis des natürlichen Systems $= 2{,}7182\ 81828\ldots$

m den Modul des Briggschen Systems $= \log br\ e = 0{,}43429448\ldots.$

$$= \frac{1}{\log n\ 10} = \frac{1}{2{,}3025\ 8509\ldots}$$

so ist

81. $y = e^z$ $\quad \partial y = e^z\,\partial z$

82. $y = a^z$ $\quad \partial y = a^z \log n\ a\,\partial z$

83. $y = 10^z$ $\quad \partial y = a^z\,\partial z\ ln\,10 = 2{,}3025\ 8509\ldots a^z\,\partial z = \frac{a^z\,\partial z}{0{,}43429448\ldots}$

84. $y = \log n\ z$ $\quad \partial y = \frac{\partial z}{z} = z^{-1}\,\partial z$

85. $y = \log br\ z$ $\quad \partial y = m\,\partial \log n\ z = \frac{\partial z}{z\ ln\,10} = \frac{\partial z}{2{,}3024\,85\ldots z}$

$$= \log br\ e \cdot \frac{\partial z}{z} = 0{,}43429\ldots \frac{\partial z}{z}$$

---

86. $y = ln\,(a \pm bz)$ $\quad \partial y = \frac{\pm b\,\partial z}{a \pm bz}$

87. $y = ln\,(az \pm bz^2)$ $\quad \partial y = \frac{(a \pm 2bz)\,\partial z}{az \pm bz^2}$

88. $y = ln\left(z + \sqrt{a^2 + z^2}\right)$ $\quad \partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$

89. $y = ln\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right)$ $\quad \partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$

90. $y = ln\left(z - \sqrt{z^2 - a^2}\right)$ $\quad \partial y = \frac{-\partial z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$

91. $y = ln\,\frac{1}{z}\left(a + \sqrt{a^2 + z^2}\right)$ $\quad \partial y = -\frac{a\,\partial z}{z\sqrt{a^2 + z^2}}$

92. $y = ln\,\frac{1}{z}\left(a - \sqrt{a^2 - z^2}\right)$ $\quad \partial y = \frac{a\,\partial z}{z\sqrt{a^2 - z^2}}$

---

93. $y = ln\,(a + z)(b + z)$ $\quad \partial y = \frac{\partial z}{a + z} + \frac{\partial z}{b + z} = \frac{a + b + 2z}{(a + z)(b + z)}\,\partial z$

94. $y = ln\,(a - z)(b - z)$ $\quad \partial y = -\frac{\partial z}{a - z} - \frac{\partial z}{b - z} = -\frac{a + b - 2z}{(a - z)(b - z)}\,\partial z$

95. $y = ln\,\frac{a + z}{a - z}$ $\quad \partial y = \frac{2a\,\partial z}{a^2 - z^2}$

96. $y = ln\,\frac{a - z}{a + z}$ $\quad \partial y = -\frac{2a\,\partial z}{a^2 - z^2}$

97. $y = ln\,\frac{z - a}{z + a}$ $\quad \partial y = \frac{2a\,\partial z}{z^2 - a^2}$

98. $y = ln\,\frac{z + a}{z - a}$ $\quad \partial y = -\frac{2a\,\partial z}{z^2 - a^2}$

---

99. $y = (ln\,z)^n$ $\quad \partial y = (ln\,z)^{n-1} \cdot \frac{\partial z}{z}$

100. $y = z^m\,ln\,z$ $\quad \partial y = [m\ ln\,z + 1]\,z^{m-1}\,\partial z$

101. $y = \frac{1}{m}\,z^m\left(ln\,z - \frac{1}{m}\right)$ $\quad \partial y = z^{m-1}\,ln\,z\,\partial z$

102. $y = ln\,(ln\,z)$ $\quad \partial y = \frac{\partial z}{z\ ln\,z}$

103. $y = l \cdot br\,(l \cdot br \cdot z)$ $\quad \partial y = \frac{(\log \cdot br\ e)^2}{z \cdot \log \cdot br\ z}\,\partial z$

---

104. $y = \sin z$ $\quad \partial y = \cos z \cdot \partial z$

105. $y = \cos z$ $\quad \partial y = -\sin z\,\partial z$

106. $y = tg\,z$ $\quad \partial y = \sec^2 z\,\partial z = (1 + tg^2 z)\,\partial z$

107. $y = cot\, z$ $\qquad \partial y = -cosec^2 z\, \partial z = -(1 + cot^2 z)\, \partial z$
108. $y = sec\, z$ $\qquad \partial y = tg\, z \cdot sec\, z \cdot \partial z$
109. $y = cosec\, z$ $\qquad \partial y = -cot\, z \cdot cosec\, z \cdot \partial z$
110. $y = sinv\, z$ $\qquad \partial y = \sqrt{2y - y^2}\, \partial z = \sqrt{2\, sinv\, z - sinv^2 z}\, \partial z$
111. $y = cosv\, z$ $\qquad \partial y = \sqrt{2y - y^2} \cdot \partial z = -\sqrt{2\, cosv\, z - cosv^2 z}\, \partial z$

---

112. $y = sin^2 z$ $\qquad \partial y = 2\, sin\, z\, cos\, z\, \partial z = sin\, 2z \cdot \partial z$
113. $y = cos^2 z$ $\qquad \partial y = -2\, cos\, z \cdot sin\, z \cdot \partial z = -sin\, 2z \cdot \partial z$
114. $y = tg^2 z$ $\qquad \partial y = 2\, tg\, z\, (1 + tg^2 z)\, \partial z$
115. $y = cot^2 z$ $\qquad \partial y = -2\, cot\, z\, (1 + cot^2 z)\, \partial z$
116. $y = sec^2 z$ $\qquad \partial y = \partial\, tg^2 z = 2\, tg\, z\, (1 + tg^2 z)\, \partial z$
117. $y = cosec^2 z$ $\qquad \partial y = \partial\, cot^2 z = -2\, cot\, z \cdot (1 + cot^2 z)\, \partial z$

---

118. $y = arc\,(sin = z)$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{1 - z^2}}$
119. $y = arc\,(cos = z)$ $\qquad \partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{1 - z^2}}$
120. $y = arc\,(tg = z)$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{1 + z^2}$
121. $y = arc\,(cot = z)$ $\qquad \partial y = -\frac{\partial z}{1 + z^2}$
122. $y = arc\,(sec = z)$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{z\sqrt{z^2 - 1}}$
123. $y = arc\,(cosec = z)$ $\qquad \partial y = -\frac{\partial z}{z\sqrt{z^2 - 1}}$
124. $y = arc\,(sinv = z)$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{2z - z^2}}$
125. $y = arc\,(cosv = z)$ $\qquad \partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{2z - z^2}}$

Für Formel 118 bis 125 kann man auch schreiben:

126. $\partial\,(\text{Bogen } \varphi) = \frac{\partial\, sin\, y}{cos\, y}$
127. $\partial \varphi = -\frac{\partial\, cos\, y}{sin\, y}$
128. $\partial \varphi = \frac{\partial\, tg\, y}{sec^2 y} = cos^2 y \cdot \partial\, tg\, y$
129. $\partial \varphi = -\frac{\partial\, cot\, y}{cosec^2 y} = -sin^2 y \cdot \partial\, cot\, y$
130. $\partial \varphi = \frac{\partial\, sec\, y}{sec\, y \cdot tg\, y} = \frac{cos^2 y}{sin\, y} \cdot \partial\, sec\, y$
131. $\partial \varphi = -\frac{\partial\, cosec\, y}{cosec\, y \cdot cot\, y} = -\frac{sin^2 y}{cot\, y} \cdot \partial\, cosec\, y$
132. $\partial \varphi = \frac{\partial\, sinv\, y}{\sqrt{2\, sinv\, y - sinv^2 y}}$
133. $\partial \varphi = -\frac{\partial\, cosv\, y}{\sqrt{2\, cosv\, y - cosv^2 y}}$

---

134. $y = logn\, sin\, z$ $\qquad \partial y = cot\, z \cdot \partial z$
135. $y = logn\, cos\, z$ $\qquad \partial y = -tg\, z \cdot \partial z$
136. $y = logn\, tg\, z$ $\qquad \partial y = \frac{2\, \partial z}{sin\, 2z}$
137. $y = logn\, cot\, z$ $\qquad \partial y = \frac{-2\, \partial z}{sin\, 2z}$
138. $y = logn\, sec\, z$ $\qquad \partial y = tg\, z \cdot \partial z$
139. $y = logn\, cosec\, z$ $\qquad \partial y = -cot\, z \cdot \partial z$
140. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$
141. $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$
142. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}$

---

143. $\frac{\partial f(u, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, z)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$
144. $\frac{\partial f(u, z, v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, z, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u, z, v)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f(u, z, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ u. s. w.

---

145. $y = u^z$ $\qquad \partial y = z u^{z-1}\, \partial u \cdot + u^z\, ln\, u \cdot \partial z$
146. $y = x^x$ $\qquad \partial y = x^x\, (1 + ln\, x)$
147. $y = (x^m)^{x^n}$ $\qquad \partial y = m x^{m x^n + n - 1}[1 + n\, ln\, x]$
148. $\frac{\partial^2 (u \times z)}{\partial x^2} = u \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
149. $\frac{\partial^2 z^n}{\partial x^2} = n z^{n-1} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n(n-1(z^{n-2} \frac{\partial z}{\partial x}$
150. $\frac{\partial^n e^x}{\partial x^n} = e^x$
151. $\frac{\partial^n a^x}{\partial x^n} = a^x\, (logn\, a)^n$
152. $\frac{\partial^2 e^z}{\partial x^2} = e^z \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$
153. $\frac{\partial^2 a^z}{\partial x^2} = a^z \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot ln\, a + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, ln\, a\right)^2\right]$

154. $\frac{\partial^2 \ln x}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$

155. $\frac{\partial^2 \log \cdot br \cdot x}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2 \log n 10} = -\frac{\log br\, e}{x^2}$

156. $\frac{\partial^2 \ln z}{\partial x^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x} - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$

157. $\frac{\partial^2 \log \cdot br\, z}{\partial x^2} = \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right] \log \cdot br\, e$

158. $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$

2. Ausdrücke von höchst einfacher Form geben oft auffallend zusammengesetzte transcendente Integrale. Um sich von der Richtigkeit des Integrirens zu überzeugen, differenzirt man das erhaltene Integral zurück. Die folgenden Differenzial-Beispiele sollen dergleichen bedenklich scheinende Integrale sein.

1. Beispiel. Man erhalte

$$\int \frac{x}{x^4 - a^4} \partial x = -\frac{1}{4a^2} \log n \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}$$

so ist $y = -\frac{1}{4a^2} \log n \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}$

und $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{4a^2}\, \partial \ln \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2} \cdot \frac{1}{\partial x} = -\frac{1}{4a^2}\, \partial \left[\frac{\ln (x^2 + a^2)}{\partial x} - \frac{\ln (x^2 - a^2)}{\partial x}\right]$$

$$= -\frac{1}{4a^2}\left[\frac{1}{x^2 + a^2} \cdot \frac{\partial (x^2 + a^2)}{\partial x} - \frac{1}{x^2 - a^2} \cdot \frac{\partial (x^2 - a^2)}{\partial x}\right]$$

$$= -\frac{1}{4a^2} \cdot \left(\frac{2x}{x^2 + a^2} - \frac{2x}{x^2 - a^2}\right) = \frac{x}{x^4 - a^4}$$

2. Beispiel. Man erhalte $$\int \frac{\partial x}{x^4 - a^4} = -\frac{1}{4a^3}\left[\log n \frac{x + a}{x - a} + 2\, Arc\left(tg = \frac{x}{a}\right)\right]$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{4a^3} \cdot \left[\partial \ln \frac{x + a}{x - a} \cdot \frac{1}{\partial x} + 2\, \partial\, Arc\left(tg = \frac{x}{a}\right) \frac{1}{\partial x}\right]$$

$$= -\frac{1}{4a^3}\left[\frac{\partial \ln (x + a)}{\partial x} - \frac{\partial \ln (x - a)}{\partial x} + 2\, \frac{\partial\, Arc\left(tg = \frac{x}{a}\right)}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{-1}{4a^3}\left[\frac{1}{x + a} - \frac{1}{x - a} + \frac{2\, \partial \left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{4a^3}\left[\frac{-2a}{x^2 - a^2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{2a^2}{x^2 + a^2}\right] = +\frac{1}{x^4 - a^4}$$

3. Beispiel. Man erhalte

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log n \left[x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}\right]$$

Setzt man $x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}} = z$

so hat man $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\partial \ln z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$

Nun ist $$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}} \cdot \frac{\partial \frac{a + bx^2}{a}}{\partial x} = \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}} \cdot \frac{2b}{a} \cdot x$$

$$= \frac{a\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}} + bx}{a\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}}$$

nnd $\frac{\partial \ln z}{\partial z} = \frac{1}{x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}}$

folglich $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}} + bx}{a\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}} \times \left(x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}\right)\sqrt{b}}$$

um in dem Zähler $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ als gemeinschaftlichen Factor zu erhalten, dividire bx mit $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, so erhält man $x\sqrt{\frac{b}{a}}$, folglich hat man

$$\frac{\sqrt{\frac{a+bx^2}{a}}+x\sqrt{\frac{b}{a}}}{x\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a+bx^2}{a}}}\cdot\frac{a\sqrt{\frac{b}{a}}}{a\sqrt{\frac{a+bx^2}{a}}\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{a+bx^2}{a}}\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}$$

3. Das in der Form so sehr einfache Differenzial

$$\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}$$

läfst 2 Integrale zu: Man kann erhalten

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\times Arc\,tg\,\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad (1)$$

und

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\times logn\,\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}} \qquad (2)$$

Man ersieht hierans, dafs der so grofse Unterschied beider Resultate allein in der Wahl liegt, ob man, um eine reelle Wurzel zu erhalten, $4ac >$ oder $<$ als b^2 ansieht.

Differenzirt man zur Prüfung beide Integrale, so setze man in dem ersten I. vorläufig

$$\sqrt{4ac-b^2}=k$$
$$b+2cx=z$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2}{k}\,\partial\,Arc\,tg\,\frac{z}{k}=\frac{2}{k}\,\frac{\partial\frac{z}{k}}{1+\left(\frac{z}{k}\right)^2}=\frac{2}{k}\,\frac{\frac{1}{k}\partial z}{\frac{1}{k^2}(k^2+z^2)}=\frac{2\,\partial z}{k^2+z^2}$$

nun ist $\frac{\partial z}{\partial x}=2c$

ferner die Werthe von k und z gesetzt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{4c}{4ac-b^2+(b+2cx)^2}$$

und reducirt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

Setzt man in dem 2ten I. dagegen

$$\sqrt{b^2-4ac}=k$$
$$b+2cx=z$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{k}\,\partial\,ln\,\frac{z-k}{z+k}\,\partial z$$

also nach Formel 97

$$=\frac{1}{k}\,\frac{2k\cdot\partial z}{z^2-k^2}=\frac{2\cdot 2c}{(b+2cx)^2-(b^2-4ac)}=\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

4. Die Aehnlichkeit zwischen den Differenzialen der natürlichen Logarithmen und denen der Bogen in Beziehung auf ihre trigonometrischen Linien ist aber auch sehr grofs. So z. B. ist Formel No. 89

$$\partial\,logn\,(z+\sqrt{z^2-a^2})=\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

Setzt man $a=1$, so erhält man

$$\partial\,logn\,(z+\sqrt{z^2-1})=\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-1}}$$

Nach Formel No. 118 ist aber

$$\partial\,arc\,sin\,z=\frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-1}\sqrt{-1}}=\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-1}}\sqrt{-1}$$

Demnach ist

$$\partial\,ln\,(z+\sqrt{z^2-1})=\partial\,arc\,sin\,z\cdot\sqrt{-1}$$

Es ist nach Formel No. 97

$$\partial\,ln\,\frac{z-a}{z+a}=\frac{2a\,\partial z}{z^2-a^2}$$

Für $a=1$ gesetzt entsteht

$$\partial\, ln \frac{z-1}{z+1} = \frac{2\partial z}{z^2-1}$$

Setzt man $z\sqrt{-1}$ für z, so erhält man

$$\partial\, ln \frac{z\sqrt{-1}-1}{z\sqrt{-1}+1} = \frac{2\partial z\sqrt{-1}}{(z\sqrt{-1})^2-1} = \frac{2\,\partial z\sqrt{-1}}{-z^2-1} = -\frac{2\partial z}{z^2+1}\sqrt{-1}$$

Nun ist Formel 120

$$\partial\, arc\, tg\, z = \frac{\partial z}{z^2+1}$$

folglich ist

$$\partial\, ln \frac{-1+z\sqrt{-1}}{+1+z\sqrt{-1}} = -2\,\partial\, arc\, tg\, z \cdot \sqrt{-1}$$

Setzt man also in dem Beispiel No. 3, während der Operation des Integrirens

$$\sqrt{4ac-b^2} = \sqrt{b^2-4ah}\sqrt{-1}$$

so erhält man statt des ersten Integrals das zweite, und setzt man

$$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}$$

so erhält man statt des zweiten Integrals das erste.

Differenzialgleichung ist eine Gleichung die aufser der Veränderlichen noch Differenziale derselben enthält, also eine implicite Function zwischen der Veränderlichen und ihrem Differenzial mit der Urveränderlichen; oder eine Gleichung, in welcher das Differenzial einer Function y in Beziehung auf die Urveränderliche x sowohl als eine Function von der Function y wie von der Urveränderlichen x erscheint. Z. B.

$$(2ay+bx)\frac{\partial y}{\partial x} + by + 2cx = 0 \qquad (1)$$

ist eine D., in welcher x als Urveränderliche bezeichnet ist. Schreibt man die Gleichung

$$(2ay+bx)\,\partial y + (by+2cx)\,\partial x = 0 \qquad (2)$$

so ist nach Wahl y oder x als urveränderlich festzusetzen.

Die D.gleichungen entstehen dadurch, dafs man Gleichungen, die den Zusammenhang zweier Veränderlichen ausdrücken, differenzirt, um eine Gleichung zwischen den Veränderlichen und deren Differenzialen in gegenseitiger Beziehung zu einander zu erhalten, wie die vorstehende D.gleichung durch Differenzirung der Stamm- oder Integralgleichung

$$u = ay^2 + bxy + cx^2 = 0 \qquad (3)$$

entstanden ist.

Es ist nämlich nach dem Art.: Differenzial

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ay\frac{\partial y}{\partial x} + bx\frac{\partial y}{\partial x} + by + 2cx = 0$$

woraus Gleichung 1 zusammengezogen wird; so wie man durch Integriren dieser D.gleichung wieder die Integralgleichung erhält.

Man hat nun das Differenzial von y in Beziehung auf x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{by+2cx}{2ay+bx} \qquad (4)$$

und das D. von x in Beziehung auf y

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{2ay+bx}{by+2cx} \qquad (5)$$

Will man diese Differenziale für einen bestimmten Werth von z oder y angeben, so hat man y oder x aus der Stammgleichung 3 zu entwickeln und die erhaltenen Werthe in Gleichung 4 oder 5 einzusetzen.

2. Wenngleich nun die Differenzirung einer gegebenen Gleichung nach der in den vor. Art. gezeigten Weise immer zum Ziele führt, so hat man in der Anwendung von Theildifferenzialen (s. Differenzial No. 45) und nach deren Ermittelung in einer Formel zu Einsetzung derselben eine leichtere und schnellere Auffindung von $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder $\frac{\partial x}{\partial y}$, besonders wenn eine complicirte Stammformel gegeben ist. Es ist nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ ist das D. der Formel für u wenn x constant und y veränderlich gesetzt wird.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ das D. der Formel für u, wenn darin y constant und nur x veränderlich gesetzt wird.

Demnach hat man für Gleichung 3

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ay + bx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = by + 2cx$$

und es ist

$$(2ay+bx)\frac{\partial y}{\partial x} + by + 2cx = 0$$

wie schon No. 1 angiebt.

3. Um die Richtigkeit der Formel 5 allgemein zu erweisen, sei

$$u = f(x, y) = 0$$

eine Gleichung, der für alle zusammengehörigen Werthe von x und y Genüge geschehen mufs. Setzt man daher die folgenden zusammengehörigen Werthe $y + \triangle y$, $x + \triangle x$, $u + \triangle u$, so ist

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

mithin auch

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0$$

und folglich ist auch

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x + y) = 0$$

Eben so, wenn man jedes Glied der Gleichung durch eine beliebige Gröſse, z. B. mit Δx dividirt, besteht die Gleichung

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0$$

Mit beliebiger Abnahme von Δx und demgemäſs auch von Δy haben die 2ten Werthe $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ die Grenzwerthe x und y. Der zweite Summand der Gleichung ist aber der Zuwachsquotient der Formel $f(x, y)$ wenn y constant und nur x veränderlich ist, folglich ist sein Grenzwerth das Differenzial

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

d. h. das D. der Gleichungsformel in Beziehung auf x genommen und y constant gesetzt.

Der Zähler des ersten Summand ist die Differenz zweier aufeinander folgenden Werthe der Formel, wenn $x + \Delta x$ constant gesetzt wird; soll also der erste Summand ein Zuwachsquotient werden, so muſs Δy statt Δx in dem Nenner stehen, weil y allein veränderlich ist. Demnach schreibe man für Δx die Gröſse $\frac{\Delta y}{\Delta y} \Delta x$ und gebe dem ersten Summand die Form

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Indem nun Δy abnimmt wird y der Grenzwerth von $y + \Delta y$ und der Zuwachsquotient wird zum Differenzial

$$\frac{\partial f(x + \Delta x, y)}{\partial y}$$

mit der beliebigen Abnahme von Δy nimmt aber ebenfalls Δx ab und x wird der Grenzwerth von $x + \Delta x$ folglich entsteht das Differenzial

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

D. h. das D. der Gleichungsformel in Beziehung auf y genommen und x constant gesetzt.

Der zweite Factor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist der Zuwachsquotient der Function y, x als urvariabel gedacht, er wird also mit der beliebigen Abnahme beider Zuwachse zum Differenzial der Function y in Beziehung auf $x = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Es ist mithin

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Vertauscht man die allgemeinen Bezeichnungen x und y mit einander, so erhält man die gleichgeltende Formel

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \qquad (6)$$

Zu dieser letzten Formel kommt man auch direct, wenn man statt der behufs der Entwickelung eingeschobenen Glieder $- f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y)$ die Glieder $- f(y + \Delta y, x) + f(y + \Delta y, x)$ einschiebt.

4. Nicht immer liegt einer D. gleichung eine Stammfunction zu Grunde; es gibt Fälle, wo solche aus einer D. gleichung gar nicht herzuleiten ist. Um dies zu erkennen, hat man in dem Satz 56 Art. **Differenzial** ein sicheres Mittel. Denn die Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$$

gilt nur für wirkliche Differenziale, also auch nur für D. gleichungen, welche aus Stammformeln abgeleitet sind.

Gleichung 2:

$$(2ay + bx)\,\partial y + (by + 2cx)\,\partial x = 0$$

ist durch Differenzirung der algebraischen Formel 3 entstanden. Gesetzt man wüſste dies nicht, wollte es aber untersuchen, so denke man sich, daſs die etwaige Stammformel nach x differenzirt worden. Dann haben die Glieder derselben, aus welchen der erste Summand $(2ay + bx)\,\partial y$ hervorgegangen ist, den (constanten) Factor y gehabt, ∂y ist $= 0$ und es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (by + 2cx)\,\partial x$$

und da $\partial x = 1$ ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = by + 2cx$$

Differenzirt man nun $\frac{\partial u}{\partial x}$ nach y, so ist x constant und man erhält

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = b$$

Denkt man sich dagegen, daſs die D. gleichung durch die Differenzirung einer Stammfunction nach y entstanden ist,

so enthalten die Glieder derselben, aus welchen der zweite Summand $(by + 2cx)\partial x$ hervorgegangen ist den constanten Factor x, ∂x ist = 0 und es ist

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2ay + bx)\,\partial y$$

nnd da ∂y der Urvariablen $y = 1$ ist

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ay + bx$$

Dieses D. nach x differenzirt, also y constant gesetzt, gibt

$$\frac{\partial u}{\partial y \cdot \partial x} = b$$

Die beiden zweiten D. sind also einander gleich, $= b$ nnd es liegt der gegebenen D.gleichnng eine Stammformel zu Grunde.

Man darf in der gegebenen D.gleichnng 2 nnr einen Coefficient mit einem andern vertauschen nnd man erhält eine Gleichnng, die aus keiner Stammfunction abgeleitet worden ist. Z. B.

$\partial u = (2ay + gx)\,\partial y + (by + 2cx)\,\partial x = 0$ ergibt zwei ungleiche D. der 2ten Ordnnng.

Differenzialgleichungen, denen Stammformeln zugehören heifsen unmittelbare, solche aus welchen keine Stammformel znrückznleiten ist heifsen mittelbare D.gleichungen.

Differenzialrechnung ist die Rechnnng mit Differenzialen, die Anwendung der in den 3 vorigen Art. entwickelten Gesetze für die Bildung der Differenziale als Hülfswissenschaft zur Ermittelung anderweitiger Gesetze im Gebiet der mathematischen Wissenschaften, und diese kann überall eintreten, wo Grenzwerthe von veränderlichen Gröfsen vorkommen. Dagegen lassen sich die vielen verschiedenen Fälle der Anwendbarkeit von Differenzialen in Disciplinen bringen.

I. Anwendung der Differenzialrechnnng zur Entwickelung der Functionen in Reihen.

Die Entwickelung einer Function in eine Reihe ist die Verwandlung der Function in eine Reihe, deren Glieder nach einem bestimmten Gesetz in Beziehung auf die Urveränderliche fortschreiten, der Art, dafs für jeden beliebigen Werth der Urveränderlichen der zugehörige Werth der Function gleich der Summe der Reihe wird.

Die Reihe heifst convergirend, wenn die algebraische Summe beliebig vieler ersten Glieder der Reihe einem bestimmten Grenzwerth immer näher nnd näher kommt, indem die Werthe der anfeinander folgenden Glieder immer kleiner werden; in dem entgegengesetzten Fall heifst die Reihe divergirend.

Die Function $y = \frac{a}{a - x}$ läfst sich durch Partialdivision in die Reihe umformen

$$y = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots\ldots \frac{x^n}{a^n}$$

Für $x < a$ ist $\frac{x}{a}$ ein ächter Bruch, nnd jedes Glied der Reihe ist kleiner als das ihm zunächst vorhergehende, daher kommt die Summe einer beliebigen Anzahl erster Glieder dem Werth der Function y immer näher. Bleibt man bei dem Gliede $\frac{x^n}{a^n}$ mit der Division stehen, so ist der bleibende Rest $= \frac{x^{n+1}}{a^n}$, dieser durch $a - x$ dividirt und als Ergänzungsglied der Reihe hinzugefügt, gibt den vollständigen Werth von

$$y = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots \frac{x^n}{a^n} + \frac{x^{n+1}}{a^n(a - x)}$$

das Ergänzungsglied

$$\frac{x^{n+1}}{a^n(a-x)} \text{ ist } = \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}} \cdot \frac{a}{a-x} = \frac{a}{a-x}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}$$

ein Product, welches mit der Vergröfserung von n immer kleiner wird und beliebig klein werden kann. Die Reihe ist also convergirend und für einen Werth von $x < a$ der Werth der Function = der Summe der unendlichen Menge von Gliedern gleich, die Reihe also eine Entwickelung der Function y.

Für $x > a$ wird die Reihe divergirend.

2. Da die Entwickelung der Function in eine Reihe allein den Zweck hat, dafs man mit Hülfe derselben nnd zwar mit der Summirung mehrerer ersten Glieder dem Werth der Function bei gegebener Urvariablen möglichst nahe kommt, so sind auch nur convergirende Reihen von Nutzen, und von um so gröfserem Nutzen, je convergirender sie sind, je weniger erste Glieder man also nöthig hat um dem Werth der Function bis zu einem bestimmten Grade nahe zu kommen. Da man nnn statt der ursprünglichen Urveränderlichen wenn sie nicht geeignet sein sollte, durch Transformation eine andere Variable substituiren kann, bei deren beliebigen Abnahme jedes Glied kleiner wird als die Summe aller ihm nachfolgenden Glieder, so schränkt man den Begriff von Reihenentwickelnng auch dahin ein, und versteht unter der Reihe eine solche, die nach ganzen Potenzen einer in der Fnnction vorkommenden Veränderlichen fortschreitet nnd in welcher mit beliebiger Abnahme dieser Ver-

änderlichen jedes Glied gröfser wird als die absolute Summe sämmtlicher ihm nachfolgenden Glieder, so dafs man mit der 2maligen Aufnahme eines $m$ten Gliedes der Reihe einen zu grofsen Werth für die Function erhalten würde.

3. Es soll eine beliebige Function der Urveränderlichen in eine Reihe entwickelt werden, die nach ganzen positiven Potenzen der Urveränderlichen fortschreitet und convergirt.

Die allgemeine Darstellung der Forderung ist demnach

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Nx^n$$

worin die noch unbekannten Constanten $A, B, C \ldots$ so zu bestimmen sind, dafs jedes folgende Glied kleiner wird als das vorhergehende. Da die Exponenten der Urveränderlichen die natürlich auf einander folgenden Zahlen sind, so ist die Convergenz der Reihe um so gröfser, je kleiner x genommen wird.

Da nun die Differenziale von Potenzen ebenfalls mit ganzen Exponenten fortschreiten, so bilden die Differenziale der Reihe wiederum convergirende Reihen; man hat also die Zusammenstellung folgender Reihen

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots + Nx^n$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots n\,Nx^{n-1}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = + 2C + 2 \cdot 3\, Dx + 3 \cdot 4\, Ex^2 + \ldots n\,(n-1)\,Nx^{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1\, N + n+1 \cdot n \cdot n-1 \ldots 2 \cdot 1\, Px + \ldots$$

Soll nun die Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots Nx^n$$

eine Entwickelung von y sein, so mufs auch die Reihe

$$Bx + Cx^2 + \ldots Nx^n$$

eine Entwickelung der Function $y - A$ sein, und da mit beliebiger Abnahme von x jedes Glied dieser Reihe beliebig klein werden kann, folglich auch die Summe der Reihe, und folglich auch $y - A$ beliebig klein werden kann, so ist A der Grenzwerth der Function y bei beliebiger Abnahme von x, oder für $x = \infty$ klein, oder für $x = 0$, oder $A = [y]_0$ wenn $[y]_0$ den Werth der Function y bezeichnet, wenn man in derselben $x = 0$ setzt.

Es ist also

$$y - [y]_0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Nx^n + \ldots$$

Nun soll aber die Reihe der ersten Differenziale eine Entwickelung von $\frac{\partial y}{\partial x}$ sein, folglich die Reihe

$$2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots + n\,Nx^{n-1}$$

eine Entwickelung der Function $\frac{\partial y}{\partial x} - B$

Man hat also bei den vorherigen Schlüssen B als den Grenzwerth von $\frac{\partial y}{\partial x}$, wenn man in dem Ausdruck dafür $x = 0$ setzt, oder

$$B = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0$$

und eben so $2C = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0$

oder $C = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0$

u. s. w.

Demnach erhält man die verlangte Reihenentwickelung

$$y = fx = [y]_0 + \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0 \cdot \frac{x}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]_0 \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_0 \cdot \frac{x^n}{(x)} + \ldots$$

Diese Reihe heifst nach ihrem Erfinder die Mac Laurinsche Reihe.

Beispiel. Die Function $y = (a + x)^m$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach ganzen Potenzen der Urveränderlichen x fortschreitet.

Man hat zur Anwendung der Mac Laurinschen Reihe

$$y = (a + x)^m$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = m\,(a + x)^{m-1}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m\,(m-1)\,(a + x)^{m-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = m\,(m-1) \ldots (m-n+2)\,(a+x)^{m-n+1}$$
$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = m\,(m-1) \ldots (m-n+1)\,(a+x)^{m-n}$$

Setzt man in diesen Gleichungen $x = 0$, so erhält man

$$[y]_0 = a^m$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0 = ma^{m-1}$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0 = m(m-1)\,a^{m-2}$$

. . . .

$$\left[\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right]_0 = m(m-1)\ldots.(m-n+2)a^{m-n+1}$$

$$\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_0 = m(m-1)\ldots.(m-n+1)\,a^{m-n}$$

Diese Werthe in die allgemeine Mac Laurinsche Reihe gesetzt gibt

$$y = a^m + ma^{m-1}\frac{x}{1} + m(m-1)\,a^{m-2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ m(m-1)\ldots..(m-n+2)\,a^{m-n+1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)} + m(m-1)\ldots.(m-n+1\,a^{m-n}\frac{x^n}{(n)}$$

welche die Binomische Reihe ist.

4. Eine Function in eine Reihe zu entwickeln, die nach steigenden Potenzen des Zuwachses der Veränderlichen fortschreitet.

Es sei $y = fx$ die gegebene Function einer veränderlichen Gröfse x, der mau einen Zuwachs z gibt, so dafs $y' = f(x+z)$ wird. Bezeichuet man $x+z$ mit u so ist $y' = fu$ und nach der Mac Laurinschen Reihe ist

$$y' = fu = [y']_0 + \left[\frac{\partial y'}{\partial u}\right]_0 \frac{u}{1} + \left[\frac{\partial^2 y'}{\partial u^2}\right]_0 \frac{u^2}{1\cdot 2} + \ldots.$$

Da in deu mit 0 bezeichneten Gröfsen u nicht vorkommt, also auch nicht x und z, so sind diese Gröfsen Constanten, und bezeichnet man dieso mit den ihnen zugehörigen Zahlenfactoren $\frac{1}{1}, \frac{t}{(2)}, \frac{1}{(3)}\ldots$ multiplicirt, mit $a, b, c, \ldots.$ so erhält man allgemein

$$y' = fu = a + bu + cu^2 + du^3 + \ldots\ldots$$

Nimmt man von dieser Gleichnng die anf einander folgenden Differenziale, so erhält man

$$\frac{\partial y'}{\partial u} = \frac{\partial fu}{\partial u} = b + 2cu + 3du^2 + 4eu^3 + \ldots$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 fu}{\partial u^2} = 2c + 2\cdot 3\cdot u + 3\cdot 4\cdot eu^2 + \ldots.$$

. . . .

oder

$$f(x+z) = a + bu + cu^2 + \partial u^3 + \ldots.$$

$$\frac{\partial f(x+z)}{\partial u} = b + 2cu + 3du^2 + \ldots$$

$$\frac{\partial^2 f(x+z)}{\partial u} = 2c + 2\cdot 3\,\partial u + 3\cdot 4\cdot eu^2 + \ldots..$$

. . . .

Die rechten Seiten der Gleichungen bleiben ungeändert, man mag auf der linken Seite x variabel und z constaut oder z variabel und x constant annehmen.

Es sei, für x variabel $f(x+z) = Fx$

für z variabel $f(x+z) = \varphi z$

so ist $\frac{\partial f(x+z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+z)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

Da nnn $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} = 1$

so hat man $\frac{\partial(x+z)}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial u}$

und eben so $\frac{\partial(x+z)}{\partial z} = \frac{\partial(x+z)}{\partial u}$

desgleichen

$$\frac{\partial^2(x+z)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(x+z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(x+z)}{\partial u^2}$$

n. s. w. für alle höheren Differenziale.

Es ist demnach

$$\varphi z = f(x+z) = a + b(x+z) + c(x+z)^2 + d(x+z)^3 + \ldots. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi z}{\partial z} = \frac{\partial f(x+z)}{\partial u} = b + 2c(x+z) + 3d(x+z)^2 + \ldots.$$

$$\frac{\partial^2 \varphi z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f(x+z)}{\partial u^2} = 2c + 2\cdot 3\cdot d(x+z) + \ldots\ldots$$

Setzt man in diese Gleichungen $z = 0$, so entsteht

$$(\varphi z)_0 = fx = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi z}{\partial y}\right)_0 = \frac{\partial fx}{\partial x} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \ldots \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi z}{\partial z^2}\right)_0 = \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} = 2c + 2\cdot 3\cdot dx + 3\cdot 4\cdot ex^2 + \ldots \quad (4)$$

. . . .

Nun ist nach der Mac Laurinschen Reihe

$$\varphi z = (\varphi z)_0 + \left(\frac{\partial \varphi z}{\partial z}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{\partial^2 \varphi z}{\partial z^2}\right)_0 \frac{z^2}{(2)} + \ldots\ldots \qquad (5)$$

Aus den Gleichungen 1, 2, 3, 4, die gleichgeltenden Werthe eingesetzt erhält man:

$$f(x+z) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{z}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{z^3}{(3)} + \ldots \qquad (6)$$

Diese Reihe heifst nach ihrem Erfinder die Taylorsche Reihe.

Beispiel. $y = (x+a)^m$

Es ist hier $fx = x^m$, die Differenziale dieser Function sind No. 3 in dem Beispiel $y = (a+x)^m$ angegeben, wenn man dort $a = 0$ setzt. Demnach hat man

$$(x+a)^m = x^m + m x^{m-1} \frac{a}{1} + m(m-1) a^{m-2} \cdot \frac{a^2}{(2)} + m(m-1)(m-2) x^{m-3} \frac{a^3}{(3)} + \ldots\ldots$$

5. Eine Function zweier Urveränderlichen in eine Reihe zu entwickeln, die nach steigenden ganzen Potenzen beider Zuwachse der Urveränderlichen und deren Producte fortschreitet.

Es sei $y = f(x, z)$

so ist $y + \triangle y = f(x + \triangle x, z + \triangle z)$

in die verlangte Reihe zu entwickeln.

Betrachtet man zunächst z als constant, während x den Zuwachs $\triangle x$ erhält, und bezeichnet den zugehörigen Werth der Function mit y' so hat man

$y' = f(x + \triangle x, z) = f(x, z + \triangle x)$

und nach der Taylorschen Reihe

$$y' = f(x + \triangle x, z) = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\triangle x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\triangle x^3}{(3)} + \ldots\ldots \qquad (1)$$

Setzt man nun $z + \triangle z$ für z, so hat man die obige Function

$y + \triangle y = f(x + \triangle x, z + \triangle z) = f(x, z + \triangle z + \triangle x)$

Bezeichnet man die Function $f(x, z + \triangle z)$ mit y_1 so ist x ungeändert geblieben, und nur die Constante z ist in $z + \triangle z$ übergegangen, daher hat man wie Gleichung 1:

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x,\ z + \triangle z) = y_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\triangle x}{1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} \cdot \frac{\triangle x^3}{(3)} + \ldots\ldots \qquad (2)$$

Da nun y_1 die Function $y = f(x, z)$ mit dem Zuwachs $\triangle z$ ist, so kann man die in Gleichung 2, y_1 enthaltenden Gröfsen wieder nach der Taylorschen Reihe entwickeln indem man nach z differenzirt und man hat demnach

$$y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\triangle z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\triangle z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\triangle z^3}{(3)} + \ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\triangle z}{1} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\triangle z^2}{(2)} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\triangle z^3}{(3)} + \ldots. \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\triangle z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\triangle z^2}{(2)} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\triangle z^3}{(3)} + \ldots \qquad (5)$$

. . . .

Substituirt man die hier erhaltenen Werthe in Gleichung 2 für $y + \triangle y$ so erhält man

$$y + \triangle y = \text{Reihe}\,(3) + \frac{\triangle x}{1} \times \text{Reihe}\,(4) + \frac{\triangle x^2}{(2)} \times \text{Reihe}\,5 + \text{u. s. w. oder}$$

$$\begin{aligned} y + \triangle y = y &+ \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\triangle z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\triangle z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\triangle z^3}{(3)} + \ldots. \\ &+ \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\triangle x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} \cdot \frac{\triangle x}{1} \cdot \frac{\triangle z}{1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x \cdot \partial z^2} \cdot \frac{\triangle x}{1} \cdot \frac{\triangle z^2}{(2)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x \cdot \partial z^3} \cdot \frac{\triangle x}{1} \cdot \frac{\triangle z^3}{(3)} + \ldots \\ &+ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \cdot \partial z} \cdot \frac{\triangle x^2}{(2)} \cdot \frac{\triangle z}{1} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \cdot \partial z^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{(2)} \cdot \frac{\triangle z^2}{(2)} + \frac{\partial^5 y}{\partial x^2 \cdot \partial z^3} \cdot \frac{\triangle x^2}{(2)} \cdot \frac{\triangle z^3}{(3)} + \ldots \\ &+ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\triangle x^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^3 \cdot \partial z} \cdot \frac{\triangle x^3}{(3)} \cdot \frac{\triangle z}{1} + \frac{\partial^5 y}{\partial x^3 \cdot \partial z^2} \cdot \frac{\triangle x^3}{(3)} \cdot \frac{\triangle z^2}{(2)} + \frac{\partial^6 y}{\partial x^3 \cdot \partial z^3} \cdot \frac{\triangle x^3}{(3)} \cdot \frac{\triangle z^3}{(3)} + \ldots \end{aligned}$$

. . . .

und nach den Dimensionen der Zuwachse geordnet

$$y + \Delta y = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{(4)} + \ldots.$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{1 \cdot 1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x \cdot \partial z^2} \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta z^2}{1 \cdot (2)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x \, \partial z^3} \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta z^3}{1 \cdot (3)} + \ldots.$$

$$+ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \cdot \partial z} \cdot \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta z}{(2) \cdot 1} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \, \partial z^2} \cdot \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta z^2}{(2) \cdot 1} + \ldots.$$

$$+ \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\Delta z^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^3 \, \partial z} \cdot \frac{\Delta x^3 \cdot \Delta z}{(3) \cdot 1} + \ldots.$$

$$+ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \cdot \frac{\Delta z^4}{(4)} + \ldots.$$

6. Es bleibt nun noch übrig, die Bedingungen für die Convergenz der vorstehenden 3 verschiedenen Reihen festzustellen.

Es ist zuerst erforderlich die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen die Mac Laurinsche Reihe convergirt. Nimmt man dieselbe bis zu ihrem $(n+1)$ten Gliede, so ist die Differenz D zwischen der Function y und der Summe dieser $(n+1)$ Glieder = der Summe der dem $(n+1)$ten Gliede nachfolgenden Glieder.

Also $D = y - A - Bx - Cx^2 - Dx^3 - \ldots\ldots n\,Nx^n$

Differenzirt man diese Reihe $n$mal hinter einander, so erhält man

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - B - 2\,Cx - 3\,Dx^2 - \ldots\ldots n\,Nx^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2C - 2 \cdot 3\,Dx - \ldots\ldots (n-1)\,n\,Nx^{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{n-1} D}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,M - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,n\,Nx$$

$$\frac{\partial^n D}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots. (n-1)\,n\,N$$

Diese Reihen gelten für alle Werthe von x. Läfst man nun x von $x = 0$ bis zu einem bestimmten Werthe $= X$ fortdauernd wachsen, so sei der kleinste Werth, den $\frac{\partial^n D}{\partial x^n}$ bei irgend einem Werthe von x zwischen $x = 0$ und $x = X$ annehmen kann $= K$, und der gröfste Werth bei irgend einem anderen Werthe von x zwischen 0 und $X = G$, so ist bei

$$K = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots. n\,N$$

$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} - K$ immer positiv; nur in dem Fall, dafs $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ selbst der kleinste Werth K ist, wird

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} - K = 0 \text{ und } N = 0$$

Setzt man für den unbestimmten Coefficient N den Werth $\frac{K}{1 \cdot 2 \ldots. n}$, so ist die Differenz

$$\frac{\partial^n D}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} - K$$

und diese ist zugleich das Differenzial der Function $\frac{\partial^{n-1} D}{\partial x^{n-1}}$

Wenn aber irgend eine Function y von x mit dem Wachsthum von x ebenfalls wächst, so wird, wenn der Wachsthum Δx von x positiv ist, auch der Wachsthum Δy von y positiv, der Zuwachsquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird positiv und folglich auch das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ wird positiv. Gegenseitig wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv ist, so mufs auch wenn x positiv ist y positiv sein. Deshalb ist also

$$\frac{\partial^{n-1} D}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} - Kx \text{ positiv.}$$

Von diesem Integral als Differenzial des nächst vorherstehenden Ausdrucks auf diesen, und so weiter zurück bis auf die Reihe für D geschlossen, erhält man

das Resultat, dafs

$$D = y - A - Bx - \ldots\ldots - \frac{K}{1 \cdot 2 \ldots . n} x^n$$

eine positive Gröfse ist.

Setzt man dagegen den gröfsten Werth G, also

$$G = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . nN$$

und schliefst wie vorhin, so erhält man das entgegengesetzte Resultat, nämlich dafs

$$D' = y - A - Bx - \ldots\ldots - \frac{G}{1 \cdot 2 \ldots . n} x^n$$

eine negative Gröfse ist.

Man hat also, beide Fälle zusammengestellt

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots . - \frac{K}{(n)} x^n > 0$$

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots . - \frac{G}{(n)} x^n < 0.$$

aber

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots . - Nx^n$$

ist immer zwischen beiden Gröfsen begriffen, daher ist

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots . - Nx^n < \frac{G-K}{(n)} x^n$$

Kann also für den gehörigen Wachsthum von n dieser Unterschied beliebig klein werden, so ist die Mac Laurinsche Reihe convergirend und eine Entwickelung der Function y.

Da G der gröfste und K der kleinste Werth ist, den $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ annehmen kann, wenn x von 0 bis X wächst, so wird bei diesen verschiedenen Werthen von x ein Werth für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ statt finden, der statt N gesetzt, die Reihe

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots . Nx^n = 0$$

macht. Bezeichnet man X mit x selbst als den bestimmten Werth von x, bis zu dem x von 0 ab wachsen soll dürfen, und es sei λ die Zahl zwischen 0 und 1, welche mit x multiplicirt, denjenigen Werth von x angibt, bei welchem die Reihe $= 0$ wird, so hat man, den zu λx gehörenden Werth von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ mit $\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_{\lambda x}$ bezeichnet, y in einer begrenzten Reihe für vollkommene Gleichheit:

$$y = fx = [y]_0 + \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0 \cdot \frac{x}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0 \cdot \frac{x^2}{(2)} + \ldots . \left[\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right]_0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)} + \left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_{\lambda x} \frac{x^n}{(n)}$$

In den wenigsten Fällen wird der Zahlenwerth von λ zu ermitteln sein. Es ist aber Hauptsache zu erfahren, ob für ein bestimmtes x die Mac Laurinsche Reihe convergirt oder nicht; wenn man daher für λ die beiden Werthe nimmt, für welche das Ergänzungsglied den gröfsten und den kleinsten Werth annimmt, und beide Werthe des Gliedes können mit Vergröfserung von n beliebig klein werden, so convergirt die Reihe und man kann die Function mit beliebiger Annäherung bestimmen.

8. Anwendung des Ergänzungsgliedes.

In dem Beispiel No. 3: $y = (a + x)^m$ ist das $n + 1$te Glied

$$= \left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_0 \frac{x^n}{(n)} = m(m-1)(m-2) \ldots . (m-n+1) a^{m-n} \cdot \frac{x^n}{(n)}$$

Wird nun $x = \lambda x$ statt 0 gesetzt, dann entsteht für dieses Glied

$$m(m-1) \ldots . (m-n+1)(a+\lambda x)^{m-n} \frac{x^n}{(n)}$$

Ist m ganz und positiv und man nimmt $n = m + 1$ so wird der letzte Factor des Coefficienten, nämlich $m - n + 1 = 0$ und also das Ergänzungsglied $= 0$. Die Reihe drückt die Function y vollständig aus, das $m$te Glied ist das letzte, und heifst

$$\frac{m \cdot m - 1 \ldots . 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots . m - 2 \cdot m - 1 \cdot m} a^{m-m} x^m = x^m$$

Die Reihe ist die binomische Reihe für den ganzen positiven Exponenten $= m$.

Ist m positiv gebrochen, so wird der Coefficient eines Ergänzungsgliedes nie $= 0$, und es tritt der Fall ein, wo zu bestimmen ist, für welche Werthe von x dieses Ergänzungsglied mit dem Wachsthum von n beliebig klein werden kann, damit die Mac Laurinsche Reihe convergirend werde.

Die veränderliche Gröfse $(a + \lambda x)^{m-n} x^n$ kann unter der Bedingung, dafs $n > m$ ist, was bei $m =$ einem ächten Bruch immer der Fall ist, geschrieben werden

$$\frac{x^n}{(a+\lambda x)^{n-m}} = \left(\frac{x}{a+\lambda x}\right)^{n-m} \cdot x^m$$

Für $\lambda = 0$ wird der Werth dieses Ausdrucks am gröfsten

$$= \left(\frac{x}{a}\right)^{n-m} \cdot x^m$$

und dieser Werth wird mit dem Wachsthum von n immerfort kleiner, wenn $x < a$.

Nimmt man für λ den gröfsten Werth 1, so wird der Werth des Ausdrucks am kleinsten $= \left(\frac{x}{a+x}\right)^{n-m} \cdot x^m$ und kann um so mehr mit dem Wachsthum von n immerfort kleiner werden wenn $x < a$ ist. In beiden Fällen convergirt die Reihe um so mehr je kleiner x gegen a ist.

Der Coefficient $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots\ldots m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$ ist bei ächt gebrochenem m immer ein ächter Bruch und für ein ungerades n positiv, für ein gerades negativ, er wird mit dem Wachsthum von n immer kleiner, wenn gleich die aufeinander folgenden Abnahmen immer geringer werden. Ist $m > 1$ so wird bei $n = m$ der Coefficient sehr nahe an 1; von hier ab nimmt er mit dem Wachsthum von n in derselben Weise immerfort ab, wie bei ächt gebrochenem m.

Es ist mithin die Reihe für $x < a$ convergirend und es läfst sich auch darthun, dafs wenn m negativ gebrochen gröfser oder kleiner als 1 ist, für $x < a$ die Reihe convergirt.

9. Die Taylersche Reihe, No. 4 ist mit Hülfe der Mac Laurinschen entwickelt, das $(n+1)$te Glied derselben ist in Reihe No. 5

$$\left(\frac{\partial^n y z}{\partial^n z}\right)_0 \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

Es ist folglich der erste Factor dieses Gliedes, welcher in dieser Mac Laurinschen Reihe durch Umgestaltung das $(n+1)$te Glied zum Ergänzungsgliede macht, nämlich zu dem Gliede:

$$\left[\frac{\partial^n y z}{\partial^n z}\right]_{\lambda z} \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

Nun ist aber in der Taylerschen Reihe das $(n+1)$te Glied (Reihe 6)

$$\left(\frac{\partial^n fx}{\partial x^n}\right) \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

und der erste Factor dieses Gliedes ist dadurch entstanden, dafs bei dem vorhergedachten $(n+1)$ten Gliede der Mac Laurinschen Reihe in dem ersten Factor

$$\left(\frac{\partial^n y z}{\partial^n z}\right)$$

nach ausgeführter Differenzirung in Beziehung auf z, $z = 0$ gesetzt werden ist, und es bleibt mithin der Factor

$$\left(\frac{\partial^n fx}{\partial x^n}\right)$$

mit ungeändertem x stehen, oder es bleibt zunächst das $(n+1)$te Glied

$$\left[\frac{\partial^n fx}{\partial x^n}\right]_x \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

Um nun dieses $(n+1)$te Glied zum Ergänzungsgliede zu machen wird λz eingeführt und das Ergänzungsglied ist

$$\left[\frac{\partial^n fx}{\partial x^n}\right]_{x+\lambda z} \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

d. h. es wird von fx das $n$te Differenzial genommen, in dieses dann $x + \lambda z$ für x gesetzt und mit $\frac{z^n}{(n)}$ multiplicirt. Z. B. $(x+z)^m$

Das $n+1$te Glied der Reihe ist

$$m \cdot (m-1)(m-2) \ldots (m-n+1) x^{m-n} \frac{z^n}{(n)}$$

als Ergänzungsglied wird es

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)(x+\lambda z)^{m-n} \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

10. Die Reihe für $y + \Delta y$, No. 5, wenn $y = f(x, z)$ ist, besteht aus eben so vielen Reihen, als man Dimensionen von Δz nehmen will + noch einer. Diese Reihen sind sämmtlich Taylersche, und man hat in jeder das Ergänzungsglied, in welchem der erste Factor das $n$te Differenzial von y ist.

Für die erste Reihe

$$\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_{x+\lambda x} \frac{\Delta x^n}{(n)}$$

für die zweite Reihe

$$\frac{\Delta x}{1}\left[\frac{\partial^n y}{\partial x \cdot \partial^{n-1} z}\right]_{z+\lambda z} \cdot \frac{\Delta z^{n-1}}{(n-1)}$$

für die dritte Reihe

$$\frac{\Delta x^2}{(2)}\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^2 \cdot \partial^{n-2} z}\right]_{z+\lambda z} \cdot \frac{\Delta z^{n-2}}{(n-2)}$$

11. Bestimmung der Werthe von Functionen die für bestimmte Werthe der Urveränderlichen in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen und unbestimmt werden.

Wenn eine Function in der Form eines Quotient dargestellt ist, so gibt es Fälle, wo für bestimmte Werthe der Urveränderlichen Dividend und Divisor zugleich 0 werden. Z. B.

$$y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

wo y für $x = a$ den Werth $\frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0}$ erhält, der unbestimmt ist. Man mufs daher den Ausdruck erst dergestalt umformen, dafs Dividendus und Divisor be-

stimmte Werthe erhalten. Dafs in dem vorstehenden Beispiel mit dem Werthe a für x diese Unbestimmtheit eintritt, liegt darin, dafs der Ausdruck nicht in der einfachsten Gestalt gegeben ist, er enthält nämlich im Zähler und Nenner die gleichen Factoren $x - a$, denn es ist

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = x + a$$

wenn man nun $x = a$ setzt, so erhält man $y = 2a$.

Bei algebraischen Functionen ist eine solche Umformung jederzeit möglich; man hat nur nöthig, Zähler und Nenner durch einander zu dividiren und so zu verfahren wie bei der Aufsuchung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers zwischen 2 Zahlen, der dann auch in allen Fällen gefunden wird (vergl. No. 9). Bei transcendenten Functionen dagegen ist das Verfahren nicht anwendbar, z. B. die Function $\frac{x^x - x}{1 - x + \log n\, x}$ erhält für $x = 1$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ und man ist nur im Stande mit Hülfe der Differenzialrechnung den wirklichen Werth der Function für $x = 1$ aufzufinden.

Stellt man sich nämlich vor, der vorstehende transcendente Ausdruck als Function von x könne so umgeformt werden, dafs bei Einsetzung des Werthes 1 für x sein wirklicher Werth daraus entnommen werden kann, so ist der umgeformte Ausdruck ebenfalls eine Function von x, und für jeden Werth von x der gegebenen Function gleich. Da nun die umgeformte Function für den Werth von x, bei welchem die gegebene Function unbestimmt wird, einen bestimmten Werth annimmt, so ist dieser Werth der Grenzwerth der Function für den Fall, dafs die Urveränderliche x dem zum Einsetzen gegebenen Werthe sich beliebig nähert und man hat also nur nöthig, diesen Grenzwerth der gegebenen Function aufzusuchen um die erforderliche Umformung der Function zu erhalten.

In dem erstsn Beispiel ist $x + a$ der umgeformte Ausdruck für die Auffindung des Werths der gegebenen Function für $x = a$, und es ist wirklich $2a$ die Grenze von $x + a$ also auch von $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ wenn x dem Werthe a sich beliebig nähert.

2. Die verstehende Betrachtung führt also zu folgendem allgemeinen Verfahren:

Es sei $$y = \frac{fx}{\varphi x}$$

so ist $$y + \Delta y = \frac{fx + \Delta fx}{\varphi x + \Delta \varphi x}$$

Für den Fall nun, dafs für x ein Werth a gesetzt wird, werde $fx = 0$ und $\varphi x = 0$ so bleibt

$$y + \Delta y = \frac{\Delta fx}{\Delta \varphi x}$$

Zähler und Nenner durch Δx dividirt gibt

$$y + \Delta y = \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta fx}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta \varphi x}\right)}$$

Mit der beliebigen Abnahme von Δx nimmt auch Δy beliebig ab, und $y + \Delta y$ nähert sich seinem gesuchten Werthe y als Grenze. Folglich ist auch der rechts stehende Quotient bei beliebiger Abnahme von $\Delta x =$ dem Werthe y. Bei beliebiger Abnahme werden aber Zähler und Nenner als Differenzenquotienten die Differenziale und es ist

$$y = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial fx}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi x}\right)}$$

allerdings nur für den Werth a von x, für welchen fx und $\varphi x = 0$ werden, aber wie verlangt wird. Demnach ist der Werth der Function für $x = a$, bei welchem sie als $\frac{0}{0}$ erscheint = dem Differenzial des Zählers dividirt durch das D. des Nenners, und hiernach für x der Werth a gesetzt.

Bei dem ersten Beispiel $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ hat man
$\frac{\partial(x^2 - a^2)}{\partial(x - a)} = \frac{2x}{1} = 2x$, also für $x = a$ gesetzt $y = 2a$.

Hat man $y = \frac{x^4 - a^4}{x - a}$, so erhält man für $x = a$:

$$y = \frac{4x^3}{1}$$

und $x = a$ gesetzt $y = 4a^3$
dividirt man Zähler und Nenner von y durch $x - a$, so erhält man

$$y = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$$

ein Ausdruck, der für $x = a$ den Werth von y unmittelbar $= 4a^3$ angibt.

3. Wenn der Factor $(x - a)$, welcher für $x = a$, Null wird, in dem Zähler und dem Nenner mehrere Male vorkommt, so erhält man, nachdem differenzirt worden, mit Einsetzung von a für x wie-

derum $\frac{0}{0}$ für y, und man muſs, wenn $(x-a)^2$ der gemeinschaftliche Factor in Zähler und Nenner ist, noch einmal differenziren um den reellen Werth der Function für $x = a$ zu erfahren

Es sei $y = \frac{5x^3 - 11ax^2 + 7a^2x - a^3}{x^2 - 2ax + a^2}$

so erhält man den Quotient der Differenziale

$$= \frac{15x^2 - 22ax + 7a^2}{2x - 2a}$$

folglich für $x = a$ den Werth von y abermals $= \frac{0}{0}$.

Aber noch einmal differenzirt

$$\frac{30x - 22a}{2} = 15x - 11a$$

also für $x = a$; $y = 4a$.

Von der Richtigkeit überzeugt man sich elementar, wenn man Zähler und Nenner der gegebenen Function durch den Nenner dividirt, man erhält

$$\frac{5x^3 - 11ax^2 + 7a^2x - a^3}{x^2 - 2ax + a^2} = (5x - a)\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x^2 - 2ax + a^2} = (5x - a)\frac{(x-a)(x-a)}{(x-a)(x-a)}$$

Eine solche Eigenschaft hat die als zweites Beispiel (No. 1) aufgeführte Function, welche $\frac{0}{0}$ für $x = 1$ wird:

$$\frac{x^x - x}{1 - x + \log n\, x}$$

Den Quotient der Differenziale erhält man nach den Differenzialformeln 146 und 84:

$$\frac{x^x [1 + ln\, x] - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = -\frac{x^{x+1}(1 + ln\, x) - x}{x - 1}$$

und auch dieser Quotient wird für $x = 1$,

$$\frac{1^2(1+0) - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

Differenzirt man noch einmal, so erhält man

$$\frac{x^x \cdot \frac{1}{x} + (1 + ln\, x)^2 x^x}{-\frac{1}{x^2}} = -x^{x+1}[1 + (1 + ln\, x)^2 x]$$

Für $x = 1$ also ist

$$y = -1^2[1 + (1+0)^2 1] = -2$$

Dieses Resultat liegt nun offenbar darin, daſs wenn man in der gegebenen Function $\frac{x^x - x}{1 - x + ln\, x}$ Zähler und Nenner mit $x - 1$ dividiren könnte, den Werth $-\frac{x^{x+1}(1 + ln\, x) - x}{x - 1}$ erhalten würde, weil Zähler wie Nenner die Gröſse $(x - 1)$ als Factor enthält und daſs wiederum der Zähler des letzten Quotient = ist $(x - 1)\, x^{x+1}[1 + (1 + ln\, x)^2 x]$.

So kann in dem Zähler und in dem Nenner einer gegebenen Function der Null machende Factor $(x - a)$ $n$mal enthalten sein; alsdann erhält man erst mit den $n$ten Differenzialen des Zählers und des Nenners den reellen Grenzwerth der Function für $x = a$.

4. Befindet sich der Factor $(x - a)$, der die Function für den Werth von $x = a$ zu $\frac{0}{0}$ macht, in dem Zähler $n$mal, in dem Nenner $(n - m)$mal, wo $m < n$ ist, so erhält man nach $(m - n)$maligem Differenziren, wenn man dann $x = a$ setzt, einen reellen Nenner, der Zähler aber, welcher den Null machenden Factor noch ein- oder mehrmal enthält, bleibt Null. Mithin ist die gegebene Function = 0 für $x = a$.

Z. B. die Function $\frac{b(x-a)^3}{x(x-a)^2}$ hat für $x = a$ den Grenzwerth $\frac{b}{x}(x - a)$ und für $x = a$ ist derselbe = 0.

Befindet sich der Null machende Factor öfter in dem Nenner als in dem Zähler, so wird nach $(n - m)$maligem Differenziren der Zähler reell, der Nenner bleibt Null, der Quotient also unendlich; d. h. für $x = a$ existirt die Function nicht.

Z. B. $y = \frac{x^2 - a^2}{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}$

wird (für $x = a$) $= \frac{0}{0}$.

Man erhält den Quotient der Differenziale

$$\frac{2x}{3x^2 - 2ax - a^2}$$

für x den Werth a gesetzt entsteht

$\frac{2a}{0}$ mithin ist die gegebene Function für den Werth $x = a$ nicht vorhanden.

5. Der Ausdruck einer Function wird auch dadurch unbestimmt, dafs für einen bestimmten Werth a der Urveränderlichen x, Zähler und Nenner ∞ anstatt 0 werden, indem die Factoren $\frac{1}{x-a}$ statt $(x-a)$ in ihnen sich befinden. Dann mufs man den Ausdruck durch Transformation auf eine Form $\frac{0}{0}$ für $x = a$ zurückbringen. Z. B.

$$y = \frac{tg\,(\pi - x)}{tg\,x}$$

für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $y = \frac{\infty}{\infty}$. Schreibt man nun $\frac{sin}{cos}$ für tg so erhält man

$$y = \frac{sin\,(\pi - x) \cdot cos\,x}{cos\,(\pi - x) \cdot sin\,x}$$

und es entsteht für $x = \frac{\pi}{2}$ der Werth $\frac{1 \cdot 0}{0 \cdot 1} = \frac{0}{0}$.

Nun Zähler und Nenner differenzirt, gibt

$$\frac{-\,sin\,(\pi - x)\,sin\,x - cos\,x\,cos\,(\pi - x)}{cos\,(\pi - x)\,cos\,x + sin\,x\,sin\,(\pi - x)}$$

für $x = \frac{\pi}{2}$ hat man nun

$$y = \frac{-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = -1$$

6. Erscheint der Werth einer Function für $x = a$ in der Form $\frac{0}{\infty}$ oder $\frac{\infty}{0}$, so sind dies keine unbestimmten Werthe mehr: in dem ersten Fall ist die Function $= 0$, im zweiten Fall ist sie unmöglich. Z. B. $\frac{cot\,x}{tg\,(\pi - x)}$ für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $\frac{0}{\infty}$ und ist $= 0$. Transformirt man zur Probe den Ausdruck in $sin\,x$ und $cos\,x$, so erhält man ihn $= \frac{-\,cos^2 x}{sin^2 x} = -\,cot^2 x$, welches für $x = \frac{\pi}{2}$ den Werth $= 0$ gibt. So wird für $x = \frac{\pi}{2}$ der Werth des umgekehrten Bruchs $= -\,tg^2 x = -\,\infty$.

7. Auch ein Product als Function wird unbestimmt, indem der eine Factor 0, der andere ∞ wird. Es liegt dies wieder darin, dafs in dem ersten Factor der Factor $(x - a)$, in dem zweiten der Factor $\frac{1}{x-a}$ enthalten ist. Alsdann ist eine Transformation der Art erforderlich, dafs der zweite Factor in dem Quotient $\frac{1}{0}$ umgewandelt wird, so dafs die Function die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Z. B.

$$y = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times tg\,x$$

für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $y = 0 \times \infty$

ändert man nun $tg\,x$ in $\frac{1}{cot\,x}$ so hat man

$$y = \frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{cot\,x}$$

wo für $x = \frac{\pi}{2}$ die Function $y = \frac{0}{0}$ entsteht.

Nun differenzirt wird

$$y = \frac{-\,sec^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-\,cosec^2 x} = \frac{-1}{-1} = 1$$

8. Es gibt Fälle, in welchen man die vorgetragene Methode nicht anwenden kann, nämlich da wo die Differenziale des Zählers und des Nenners von jeder Ordnung $= 0$ oder ∞ werden.

Z. B. $(x - a)^x$ hat die Differenziale $(x - a)^x\,ln a$, $(x - x)^c\,ln^2 a$ u. s. w., welche sämmtlich für $x = a$ zu Null werden.

$\sqrt{x - a}$ hat die Differenziale

$$\frac{1}{2\sqrt{x-a}};\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-a)^3}}$$

u. s. w. die für $x = a$ sämmtlich unendlich werden.

Für solchen Fall setzt man in dem Ausdruck für y den Werth $x = a +$ einem Zuwachs $\triangle x$, entwickelt Zähler und Nenner in Reihen, die nach Potenzen des Zuwachses fortschreiten, und dividirt hierauf Zähler und Nenner durch die höchste Potenz des Zuwachses, die in allen Gliedern gemeinschaftlich ist, wo dann Glieder entstehen, die den Zuwachs nicht mehr enthalten. Setzt man hierauf $\triangle x = 0$, so erhält man den reellen Werth von y für $x = a$.

Z. B. $y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Für $x = a$ entsteht $y = \frac{0}{0}$ und die Quotienten der Differenziale werden sämmtlich $= \frac{\infty}{\infty}$.

Setzt man nun $x = a + \triangle x$, so hat man

$$y + \triangle y = \frac{(a + \triangle x)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + \triangle x^{\frac{1}{2}}}{(2a \triangle x + \triangle x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und nach dem Binomialsatz entwickelt

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \cdot \triangle x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{1 \cdot 2} a^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots - a^{\frac{1}{2}} + \triangle x^{\frac{1}{2}}}{\triangle x^{\frac{1}{2}} \left[(2a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} \triangle x - \frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots\right]}$$

und reducirt

$$= \frac{\triangle x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \triangle x - \frac{1}{8} a^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots}{\triangle x^{\frac{1}{2}} \left[(2a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} \triangle x - \frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots\right]}$$

Zähler und Nenner mit $\triangle x^{\frac{1}{2}}$ dividirt gibt

$$y + \triangle y = \frac{1 + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \triangle x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} a^{-\frac{3}{2}} \triangle x^{\frac{3}{2}} + \ldots}{(2a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} \triangle x - \frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots}$$

Mit der beliebigen Abnahme von $\triangle x$ nimmt auch $\triangle y$ beliebig ab, der Ausdruck links nähert sich beliebig seinem Grenzwerth y und der Quotient rechts nähert sich seiner Grenze $\frac{1}{(2a)^{\frac{1}{2}}}$ mithin ist für $x = a$ die Function $y = \frac{1}{(2a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2a}}{2a}$

9. Es ist No. 1 angegeben, dafs man in algebraischen Functionen der Beschaffenheit, dafs Zähler und Nenner für $x = a$ zu Null werden, die analystische Methode nicht anzuwenden nöthig habe, weil eine einfache Division des Zählers und des Nenners mit dem Null machenden Factor genüge. In dem Beispiel 8 ist dies natürlich auch der Fall. Es ist nämlich

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = (\sqrt{x} - \sqrt{a}) \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\sqrt{x - a} = \sqrt{x - a} \times \frac{\sqrt{x - a}}{\sqrt{x - a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x - a}}$$

folglich ist der Zähler dividirt durch $(x - a)$, oder

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{x - a}} = \frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

der Nenner $\sqrt{x^2 - a^2}$ ist durch $(x - a)$ dividirt $= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x - a} = \sqrt{\frac{x + a}{x - a}}$ der Quotient ist demnach nach ausgeführter Division

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})}\right)}{\sqrt{\frac{x + a}{x - a}}} = \frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x + a}}$$

und für $x = a$ gesetzt

$$y = \frac{0 + \sqrt{a} + \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{a})\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{2a}}{2a}$$

In complicirten algebraischen Ausdrücken möchte die analytische Methode vorzuziehen sein, besonders da man für jede Reihe nur die beiden ersten Glieder zu entwickeln hat.

III. Bestimmung der gröfsten und kleinsten Werthe von Functionen.

Wenn der Werth einer Function y für einen Werth X der Urveränderlichen x gröfser oder kleiner wird, als alle Werthe derselben, welche entstehen wenn man den Werth X bis zu bestimmten Grenzen hin vermehrt oder vermindert, so heifst jener Werth von y für X im ersten Fall ein gröfster Werth oder ein Maximum der Function, im zweiten Fall ein kleinster Werth oder ein Minimum der Function. Diese gröfsten und kleinsten Werthe der Function bedeuten absolute Zahlen, ohne dafs Vorzeichen dabei in Betracht kommen. In Beziehung auf die Vorzeichen nennt man subtractive Minima auch Maxima und subtractive Maxima, Minima. Die Werthe der Urveränderlichen, welche innerhalb der oben gedachten Grenzen liegen so wie die zugehörigen Werthe der Function, bis zu welchen die Maxima und Minima als solche gelten, heifsen benachbarte Werthe. Aufserhalb dieser benachbarten Werthe kann die Function Werthe annehmen, die gröfser sind als das zu

jenen benachbarten Werthen gehörende Maximum und kleiner als das zu demselben gehörende Minimum der Function.

Betrachtet man diejenigen gröfsten und kleinsten Werthe, die gröfser und kleiner sind als alle übrigen nur möglichen Werthe, welche die Function annehmen kann, so heifsen diese gröfsten und kleinsten Werthe absolute Maxima und Minima, jene nur bis zu bestimmten Grenzwerthen sich erstreckenden heifsen dann in Beziehung auf diese, relative Maxima und Minima.

2. Es sei $y=fx$ eine Function von x für den Werth X von x werde y ein Maximum Y; läfst man dann X um $\triangle x$ zunehmen und abnehmen, d. h. substituirt man für X die Werthe $X+\triangle x$ und $X-\triangle x$, so sind die zu diesen Werthen gehörigen Werthe von y beide kleiner als Y, so klein man $\triangle x$ auch nehmen mag, d. h.

$$Y+\triangle y < Y \text{ oder } f(X+\triangle x) < Y$$

und $Y-\triangle y < Y$ oder $f(X+\triangle x) < Y$

Nach dem Taylorschen Satz hat man

$$Y+\triangle y = f(X+\triangle x) = Y + \frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\triangle x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \quad (1)$$

und wenn man $-\triangle x$ für $\triangle x$ setzt

$$Y-\triangle y = f(X-\triangle x) = Y - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\triangle x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\triangle x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \quad (2)$$

Hat nun für den bestimmten Werth X das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ von y ebenfalls einen bestimmten additiven oder subtractiven Werth, so kann man dessen Factor, den Zuwachs $\triangle x$ so klein nehmen, dafs das zweite Glied $\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\triangle x}{1}$ in jeder der beiden Reihen gröfser wird als die Summe aller von dem 3ten Gliede $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2}$ ab nachfolgenden Glieder, oder wenn man diese Summen als den zu den vollständigen Ausdrücken für $y\pm\triangle y$ gehörenden Reste mit R und R' bezeichnet, man kann $\triangle x$ so klein nehmen, dafs R und R' gegen $\frac{\partial y}{\partial x}\triangle x$ beliebig klein werden. Es mögen also R und R' additiv oder subtractiv sein so bleiben $\frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + R$ und $\frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + R'$ mit dem zweiten Gliede $\frac{\partial y}{\partial x}\triangle x$ übereinstimmend additiv oder subtractiv.

Nun ist $Y+\triangle y = Y + \frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + R$ (3)

und $Y-\triangle y = Y - \frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + R'$ (4)

Ist daher $\frac{\partial y}{\partial x}$ additiv, so hat man

$$Y+\triangle y > Y$$

und $Y - y < Y$

Von den beiden benachbarten Werthen ist also der eine gröfser und der andere kleiner als Y, folglich ist Y kein Maximum von y.

Ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ subtractiv, so hat man

$$Y+\triangle y < Y$$

und $Y-\triangle y > Y$

es ist also wiederum Y kein Maximum von y, weil die benachbarten Werthe nicht beide kleiner als Y sind.

Es kann also kein Maximum Y für die Function y entstehen, wenn für diesen Werth Y und den dazu gehörigen Werth X der Urveränderlichen das erste Differenzial von y einen bestimmten additiven oder subtractiven Werth annimmt. Es mufs also für ein Maximum Y der Function der Werth des ersten Differenzials entweder $=0$ oder $=\infty$ sein.

3. Für den ersten Fall, dafs für die zusammengehörigen Werthe Y und X das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ wird, hat man die beiden Reihen

$$Y+\triangle y = Y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\triangle x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots \quad (5)$$

$$Y-\triangle y = Y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\triangle x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots \quad (6)$$

Nun kann man wiederum $\triangle x$ so klein nehmen, dafs die Summe aller dem zweiten Gliede $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x}{1\cdot 2}$ nachfolgenden Glie-

der kleiner wird als das zweite Glied selbst, oder wenn man diese Summen in den beiden Reihen mit R und R' bezeichnet, dafs

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} > R$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} > R' \text{ ist.}$$

Nun hat man

$$Y + \Delta y = Y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + R$$

und $$Y - \Delta y = Y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + R'$$

In beiden Ausdrücken ist nun das zweite Glied additiv. Nimmt also das zweite Differenzial für den Werth X der Urvariablen, für welchen das erste Differenzial = 0 geworden ist, einen bestimmten additiven oder subtractiven Werth an, so sind beide zweiten Glieder entweder zugleich additiv oder zugleich subtractiv.

Für den ersten Fall ist

$$Y + \Delta y > Y$$

und $$Y - \Delta y > Y$$

Für den zweiten Fall ist

$$Y + \Delta y < Y$$

und $$Y - \Delta y < Y$$

In dem ersten Fall ist also Y ein **Minimum**, in dem zweiten Fall ein **Maximum** der Function.

4. Wird für denselben Werth X der Urveränderlichen, für welchen das erste Differenzial der Function = 0 geworden ist, auch das zweite Differenzial = 0, so ändern sich die Reihen in die folgenden

$$Y + \Delta y = Y + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\cdot\frac{\Delta x^4}{(4)} + \ldots\ldots$$

$$Y - \Delta y = Y - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\cdot\frac{\Delta x^4}{(4)} - \ldots.$$

Diese Reihen sind also der Form nach dieselben wie die ersten beiden, und folglich existirt kein Maximum und kein Minimum der Function, wenn das dritte Differenzial einen bestimmten positiven oder negativen Werth annimmt; wird dagegen dieses dritte Differenzial = 0, so erhält man die Reihen

$$Y + \Delta y = Y + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\cdot\frac{\Delta x^4}{(4)} + \frac{\partial^5 y}{\partial x^5}\cdot\frac{\Delta x^5}{(5)} + \ldots.$$

und $$Y - \Delta y = Y + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\cdot\frac{\Delta x^4}{(4)} - \frac{\partial^5 y}{\partial x^5}\cdot\frac{\Delta x^5}{(5)} + \ldots..$$

und man erhält wie vorhin für y' ein Maximum Y bei dem Werth X der Urveränderlichen, wenn $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ einen bestimmten subtractiven Werth und ein Minimum Y, wenn $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ einen bestimmten additiven Werth annimmt.

Setzt man diese Schlüsse weiter fort, so ersieht man aus den bisherigen Untersuchungen;

Erstens, dafs von der Function y nur ein Maximum und ein Minimum existiren kann für **denjenigen** Werth X der Urvariablen X, für welchen das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Function = 0 wird.

Zweitens: Setzt man diesen Werth X in die höheren Differenziale und dasjenige Differenzial, welches zuerst einen bestimmten Werth annimmt, ist ein D. gerader Ordnung, so ist der Werth der Function für den Werth X der Urveränderlichen ein Maximum, wenn das höhere D. subtractiv ist, ein Minimum, wenn das höhere D. additiv ist.

Drittens: Ist dasjenige höhere D., welches zuerst einen bestimmten Werth annimmt, von ungrader Ordnung, so existirt für die Function y weder ein Maximum noch ein Minimum, weder für $x = X$ noch für irgend einen anderen Werth der Urvariabeln.

5. Aus der Entwickelung der Regeln zur Erkennung der Maxima und Minima ersieht man, dafs immer nur die **absoluten** Werthe entscheiden, dafs also jede Gröfse, die auf ein Maximum oder Minimum zu untersuchen ist, als positive Gröfse gedacht werden mufs. Ist aber eine solche Gröfse der Lage nach negativ oder der Zahl nach subtractiv, so mufs ihr, damit sie an sich gröfser werde, etwas Negatives oder Subtractives zugesetzt werden; eben so mufs von ihr etwas

Negatives oder Subtractives fortgenommen werden, wenn sie an sich kleiner werden soll.

Drückt man nun das Negative, welches einer Gröfse y anhaftet algebraisch aus, so entstehen in den obigen für Y entwickelten Reihen die entgegengesetzten Vorzeichen, und es finden also bei dem negativen Maximum und dem negativen Minimum die entgegengesetzten Kennzeichen statt. Aus diesem Grunde nennt man auch die negativen Maxima, **Minima** und die negativen Minima, **Maxima**.

6. Für den Werth X der Urveränderlichen x, welcher entsteht, wenn man $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ setzt, kann nach No. 2 ebenfalls ein Maximum oder Minimum entstehen. In solchem Fall mufs man direct untersuchen, ob ein solches und welches von beiden stattfindet, indem man in die Function $(\infty + k)$ und $(\infty - k)$ für x hintereinander einsetzt, entwickelt und erfährt, ob diese benachbarten Werthe beliebig klein genommen, beide gröfser oder beide kleiner werden als Y für $x = \infty$.

Für die richtige Auffassung der vorgetragenen Begriffe und Verfahrungsarten eignen sich ganz besonders die trigonometrischen Functionen, und es sollen daher an diesen die nothwendigen Erläuterungen angeknüpft werden.

7. **Beispiele.**

1. $\sin x$ wird für $x = \frac{\pi}{2}$ zu dem Maximum 1, denn $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ ist < 1; ferner für $x = \frac{3}{2}\pi$ ein negatives Maximum $= -1$; denn $\sin(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha)$ ist negativ und absolut kleiner als 1. $\sin(x = 0) = 0$ ist kein Minimum, denn $\sin(0 + x) = +\sin\alpha$ ist > 1 und $\sin(0 - \alpha) = -\sin\alpha$ ist < 1. Desgleichen ist $\sin\pi = 0$ aus demselben Grunde kein Minimum. Gesetzt man wüfste dies nicht, und wollte die Function $y = \sin x$ auf Maxima und Minima analytisch untersuchen, so hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\sin x$$
$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\cos x$$

. . . . . .

Es kann nun $\sin x$ für dasjenige X, mit welchem $\cos x = 0$ wird, ein Max. oder ein Min. werden. Dies ist aber $x = \frac{\pi}{2}$, und da zugleich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\sin\frac{\pi}{2}$, also ein subtractiver Werth wird, so ist $\sin\frac{\pi}{2}$ ein Max. Aber auch für $x = \frac{3\pi}{2}$ wird $\cos x = 0$, also kann auch $\sin\frac{3\pi}{2}$ ein Max. oder ein Min. sein. Nun liegt aber $\sin\frac{3\pi}{2}$ zwischen dem 3ten und 4ten Quadrant, ist negativ und $-\sin\frac{3\pi}{2}$ ist eine positive Gröfse; folglich ist $\sin\frac{3\pi}{2}$ entweder ein Minimum oder ein negatives Maximum, und letzteres ganz bestimmt, weil dessen benachbarte Werthe negativ sind.

Auch für dasjenige x, für welches $\cos x = \infty$ wird, kann $\sin x$ ein Max. oder ein Min. werden, ein solches x existirt aber nicht. Mithin sind nur die obigen 2 Maxima für $\sin x$ möglich und ein Minimum existirt nicht.

2. $y = \cos x$

Es ist
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\sin x$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\cos x$$

Für $x = 0$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = -\sin x = 0$, und da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\cos x$ subtractiv ist, so ist $\cos(x = 0)$ ein Maximum; es ist auch $\cos(0 \pm \alpha) = +\cos\alpha$, so dafs beide benachbarten Werthe $< \cos 0 = 1$ sind. Für $x = \pi$ wird $-\sin x$ ebenfalls $= 0$; da aber $\cos\pi$ zwischem dem zweiten und dritten Quadrant liegt, so ist $\cos\pi$ negativ, folglich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\cos x$ eine positive Gröfse und $\cos\pi$ entweder ein Minimum oder ein negatives Maximum, und ausschliefslich letzteres, weil die benachbarten Werthe von $\cos\pi$ negativ sind. Für $\cos x = \infty$ gibt es kein x. Ein Minimum entsteht nicht: bei $x = \frac{\pi}{2}$ nämlich wird $\cos x = 0$, allein $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ist negativ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ist positiv mithin der erste Werth kleiner, der zweite gröfser als $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

3. $y = tg\,x$

Es ist
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sec^2 x$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\,tg\,x \cdot \sec^2 x$$

. . . .

Für $sec^2 x = 0$ gibt es kein x, weil der kleinste Werth von $sec\, x = 1$ ist. Es mufs also $sec^2 x = \infty$ versucht werden, und dafür ist $x = \frac{\pi}{2}$. Nun ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ für $x = \frac{\pi}{2}$ ebenfalls $= \infty$ und man ersieht, dafs alle noch höheren Differenziale von y ebenfalls für $\frac{\pi}{2} = \infty$ werden. Demnach ist eine directe Untersuchung erforderlich. Man hat die Reihe

$$tg\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{2}{3\cdot 5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 + \ldots\ldots$$

Hieraus entstehen also

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)^3 + \ldots.$$

und

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^5 + \ldots\ldots$$

Die vorstehenden Reihen eignen sich nicht zur Untersuchung ob für $x = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum oder ein Minimum entsteht; geht man daher zu der trigonometrischen Formel über

$$tg\,(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

so hat man, für α den Werth $\frac{\pi}{2}$ gesetzt

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm \beta\right) = \frac{tg\frac{\pi}{2} \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\frac{\pi}{2} \cdot tg\,\beta}$$

und Zähler und Nenner durch $tg\frac{\pi}{2}$ dividirt

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm \beta\right) = \frac{1 \pm \frac{tg\,\beta}{tg\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{tg\frac{\pi}{2}} \mp tg\,\beta}$$

Nun ist $tg\frac{\pi}{2} = \infty$ daher ist

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm \beta\right) = \frac{1 \mp 0}{0 \mp tg\,\beta}$$

folglich $$tg\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \frac{1}{-tg\,\beta} = -\cot\beta$$

und $$tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{tg\,\beta} = +\cot\beta$$

Die gleich weit von $tg\frac{\pi}{2}$ entfernten benachbarten Werthe sind also beide gleich grofs aber einander entgegengesetzt. Nun ist zwar $tg\frac{\pi}{2} = \infty$ und als solche ein Max. für jeden endlichen Werth, also $> (+\cot\beta)$ und $> (-\cot\beta)$. Allein $-\cot\beta$ gehört einer Reihe von Werthen an, denen ein anderes Max. zukommt, nämlich das für $x = \frac{3}{2}\pi$.

$tg\frac{\pi}{2}$ ist das absolute Maximum der Tangenten für Bogen von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ und von $x = \pi$ bis $x = \frac{3}{2}\pi$. Ein Minimum hat $tg\,x$ ebenfalls nicht, weil zwar $tg\,(x = 0) = 0$ ist, aber $tg\,(+\alpha)$ positiv und > 0, $tg\,(-\alpha)$ negativ und < 0 ist.

4. $y = \cot x$ gibt dasselbe Resultat in Beziehung auf Maxima und Minima: Es existiren nur 2 absolute Maxima und kein Minimum für $\cot x$.

5. $y = sec\, x$

Es ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,x \cdot sec\,x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = sec\,x\,(tg^2 x + sec^2 x)$$

Für $x = 0$ ist $\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,x \cdot sec\,x = 0 \times 1 = 0$

für $x = 0$ wird $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1\,(0 + 1) = +1$

Es wird also, da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ eine bestimmte positive Gröfse ist, $sec\,x$ für $x = 0$ ein Minimum $= 1$; und es ist auch $sec\,(0 \pm \alpha) + sec\,\alpha$ so dafs beide benachbarte Secanten positiv und gröfser als 1 sind.

Für $x = \pi$ wird ebenfalls

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,x \cdot sec\,x = 0$$

Nun ist $sec\,\pi$ zwischen dem zweiten und dritten Quadrant belegen, also negativ $= -1$, und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -1\,[0 + (-1)^2] = -1$$

mithin wird $sec\,x$ für $x = \pi$ entweder ein Maximum oder ein negatives Minimum, und letzteres findet statt, weil $sec\,\pi$ zwischen benachbarten negativen Secanten liegt.

Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$

Es kann also $sec\frac{\pi}{2}$ ein Maximum und ein Minimum sein. Aber $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist für $x = \frac{\pi}{2}$ ebenfalls ∞, und wenn man mit Hülfe der trigonometrischen Formel für

$sec\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)}$ die weitere Untersuchung anstellt, so ergiebt sich, dafs $sec\frac{\pi}{2}$ ein absolutes Maximum ist, wie auch $sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ positiv und $sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ negativ ist.

6. $y = cosec\, x$

Es ist $\frac{\partial y}{\partial x} = - cot\, x \cdot cosec\, x$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = + cosec\, x\,(cot^2 x + cosec^2 x)$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = - 0 \times 1 = 0$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1\,(0 + 1^2) = + 1$$

folglich entsteht für $x = \frac{\pi}{2}$ wie bei der Secante ein Minimum = 1, und es ist auch $cosec\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = + cosec\, \alpha$. Das Maximum für $x = 0$ ist ein absolutes Maximum.

8. Man kann für die Beurtheilung, ob eine Function y mit dem Nullwerth des ersten Differenzials für x und y, ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden wird, die höheren Differenziale ganz ignoriren.

Wächst nämlich eine Function y mit dem Wachsthum ihrer Urveränderlichen x und nimmt mit ihr ab, so wachsen auch die Zuwachse $\triangle y$ und $\triangle x$ mit einander und nehmen mit einander ab. Zu einem positiven $\triangle x$ gehört also immer ein positives $\triangle y$ und zu einem negativen $\triangle x$ immer ein negatives $\triangle y$, es ist mithin jederzeit der Zuwachsquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ positiv und somit auch das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv.

Wächst hingegen die Function y mit der Abnahme der Urveränderlichen x und nimmt ab mit der Zunahme von x, so findet beides auch zwischen deren Zuwachsen $\triangle y$ und $\triangle x$ statt. Es ist also jederzeit absolut genommen $y + \triangle y$ mit $x - \triangle x$ oder $y - \triangle y$ mit $x + \triangle x$ verbunden, der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ und mit demselben das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist jederzeit negativ. Ist gegenseitig das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ für irgend zusammengehörige Werthe y, x positiv, so wächst y von hier ab mit dem Wachsthum von x und nimmt ab mit der Abnahme von x. Ist dagegen jenes Differenzial negativ, so wächst y von hier ab mit der Abnahme von x und nimmt ab mit der Zunahme von x.

Ist nun für irgend einen Werth X von x das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ und es wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ für den Werth $X + \triangle x$ positiv, so wachsen die Werthe der Function y von Y ab nach der positiv benachbarten Seite hin; wird ferner auch $\frac{\partial y}{\partial x}$ für den Werth $X - \triangle x$ positiv, so nehmen die Werthe der Function y von Y für X nach der negativ benachbarten Seite hin ab und es ist also Y für $x = X$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Wird das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X + \triangle x$ negativ, so werden die Werthe der Function von y ab nach der positiven Seite hin kleiner; wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X - \triangle x$ eben falls negativ, so werden die Werthe der Function von Y ab nach der negativen Seite hin gröfser und Y ist wiederum weder ein Maximum noch ein Minimum.

Wird dagegen $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X + \triangle x$ positiv und $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X - \triangle x$ negativ, so wachsen die Werthe der Function y von Y ab nach der positiven Seite hin, und wachsen mit der Abnahme von X und $\triangle x$ auch nach der negativen Seite hin. Beide benachbarten Werthe von y rechts und links von Y $\left(\text{für } x = X \text{ oder für } \frac{\partial y}{\partial x} = 0\right)$ werden gröfser als Y und folglich ist Y ein Minimum.

Wird endlich $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X + \triangle x$ negativ und $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X - \triangle x$ positiv, so nehmen die Werthe der Function ab, welche auf der positiven Seite liegen und die Werthe der Function auf der negativen Seite nehmen ebenfalls ab. Beide benachbarten Werthe zur Linken und zur Rechten von Y werden kleiner als Y, und Y ist ein Maximum.

Um also den Werth von x zu finden, für welches y ein Maximum und ein Minimum werden kann setze $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ und

entwickele x so ist X der verlangte Werth. Um nun aber beurtheilen zu können, ob für X die Function y ein Maximum oder ein Minimum oder keins von beiden wird, setze in dasselbe Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ für X nach einander die Werthe $X + \triangle x$ und $X - \triangle x$ (oder $X + \alpha$ und $X - \alpha$).

Wird dann $\frac{\partial y}{\partial (X+\triangle x)}$ positiv, $\frac{\partial y}{\partial (X-\triangle x)}$ negativ, so ist Y ein Minimum.

Wird $\frac{\partial y}{\partial (X+\triangle x)}$ negativ, $\frac{\partial y}{\partial (X-\triangle x)}$ positiv, so ist Y ein Maximum.

Wird $\frac{\partial y}{\partial (X+\triangle x)}$ und zugleich $\frac{\partial y}{\partial (X-\triangle x)}$ positiv oder negativ, so ist Y weder ein Maximum noch ein Minimum.

9. Beispiele.

1. Eine gegebene Zahl in 2 Theile zu zerlegen, dafs das Product bestimmter Potenzen dieser Theile ein Maximum oder Minimum werde.

Ist a die gegebene Zahl, x der eine Theil, also $(a - x)$ der andere, so soll $x^m (a - x)^n = M$ sein.

Nun ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \partial x^m (a-x)^n = x^m \cdot n (a-x)^{n-1} (-1) + (a-x)^n \cdot m x^{m-1}$$
$$= x^{m-1} \cdot (a-x)^{n-1} [m(a-x) - nx]$$
$$= x^{m-1} \cdot (a-x)^{n-1} [ma - (m+n)x]$$

$\frac{\partial y}{\partial x}$ kann nun $= 0$ werden für den ersten Factor $x^{m-1} = 0$, d. h. für $x = 0$, welcher Werth für ein M nicht möglich ist; für den zweiten Factor $(a - x)^{n-1}$, also für $(a - x) = 0$, welcher Werth ebenfalls der Aufgabe widerspricht; daher kann nur der dritte Factor $= 0$ gesetzt werden, also

$$ma - (m+n)x = 0$$

woraus
$$x = \frac{ma}{m+n}$$

Da nun das 2te Differenzial substractiv wird, so entsteht für $x = \frac{ma}{m+n}$ ein Maximum, und die beiden Theile von a sind $\frac{ma}{m+n}$ und $\left(a - \frac{ma}{m+n}\right)$, das Product der Potenzen, das Maximum

$$= \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \times \left(\frac{na}{m+n}\right)^n = \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}} \times a^{m+n}$$

Für $m = n$ sind beide Theile der Zahl einander gleich und jede $\frac{1}{2}a$.

Die Zahl 10 in 2 Theile zerlegt, dafs $x^3 \times (10 - x)^2$ ein Maximum wird, gibt 6 und 4 und das Maximum $= 6^3 \times 4^2 = 3456$.

2. Von einem Cylinder ist der Inhalt A^3 gegeben, seine Abmessungen so zu bestimmen, dafs seine gesammte Oberfläche ein Minimum werde.

Bezeichnet man mit x den Durchmesser der Grundebene, mit y die Höhe des Cylinders, so ist
der Inhalt des Cylinders $= \frac{1}{4}\pi x^2 y = A^3$
der Inhalt jeder Endfläche $= \frac{1}{4}\pi x^2$
der Flächeninhalt des Mantels $= \pi x y$.

Die Gröfse, welche ein Minimum werden soll ist also

$$\pi x y + 2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi x^2 = M$$

Nun ist aus der ersten Gleichung

$$y = \frac{4A^3}{\pi x^2} \qquad (1)$$

also
$$\frac{4A^3}{x} + \tfrac{1}{2}\pi x^2 = M \qquad (2)$$

Nun ist

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{4A^3}{x^2} + \pi x = \frac{-4A^3 + \pi x^3}{x^2} = 0$$

woraus
$$x = A \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \qquad (3)$$

Das zweite D. von M wird positiv, mithin entsteht für diesen Werth von x ein Minimum.

Man erhält nun (aus 1 und 3)

$$y = \frac{4A^3}{\pi} \cdot \frac{1}{A^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{16}} = A \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Es mufs also für das Minimum der gesammten Oberfläche die Höhe des Cylinders = dem Durchmesser der Grundfläche genommen werden.

Je kleiner man die Höhe nimmt, desto gröfser werden die beiden Endflächen und man kann mit beliebiger Abnahme der Höhe den Inhalt beider Endflächen beliebig grofs erhalten, so dafs mit diesen auch die gesammte Oberfläche beliebig grofs wird und somit ein Maximum unmöglich ist. Gegenseitig wird durch Vergröfserung der Höhe die Grundfläche immer kleiner, der Mantel wird immerfort gröfser und mit diesem kann die gesammte Oberfläche des Cylinders jede beliebige Gröfse erhalten. Beides drücken auch die Formeln für den Mantel und die Grundflächen aus, nämlich $\frac{4A^3}{x}$ und $\frac{1}{2}\pi x^2$. Es ist daher auch die Aufgabe

unmöglich, den Cylinder von dem Inhalt A^3 so zu bestimmen, dafs der Mantel allein, oder eine oder beide Grundflächen allein Maxima oder Minima werden.

Soll eine Grundfläche vom Minimo ausgeschlossen werden, so hat man

$$M = \frac{4A^3}{x} + \tfrac{1}{4}\pi x^2$$

und $$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{4A^3}{x^2} + \tfrac{1}{2}\pi x = 0$$

woraus $$x = \frac{2A}{\sqrt[3]{\pi}}$$

und $$y = \frac{4A^3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{\pi}}{4A^2} = \frac{A}{\sqrt[3]{\pi}}$$

so dafs der Durchmesser der Grundfläche doppelt so grofs als die Höhe sein mufs.

3. Aus der vorigen Aufgabe erhellt, dafs unter allen Cylindern von gleich grofser Gesammtoberfläche derjenige den gröfsten körperlichen Inhalt hat, bei welchem Durchmesser der Grundebene und Höhe = grofs sind. Dies soll hier direct untersucht werden.

Bei derselben Bezeichnung soll der Inhalt

$$A^3 = \tfrac{1}{4}\pi x^2 y = \text{Max. werden.}$$

Die gegebene Gesammtoberfläche ist

$$F = \pi x y + \tfrac{1}{2}\pi x^2$$

hieraus $$y = \frac{F - \frac{1}{2}\pi x^2}{\pi x} = \frac{F}{\pi x} - \tfrac{1}{2}x$$

Also $$M = \tfrac{1}{4}\pi x^2\left(\frac{F}{\pi x} - \tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{1}{4}Fx - \tfrac{1}{8}\pi x^3$$

daher $$\frac{\partial M}{\partial x} = \tfrac{1}{4}F - \tfrac{3}{8}\pi x^2$$

und $$x = \sqrt{\frac{2F}{3\pi}}$$

Nun ist

$$y = \frac{F - \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{2F}{3\pi}}{\pi\sqrt{\frac{2F}{3\pi}}} = \frac{2F}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{3\pi}{2F}} = \sqrt{\frac{2F}{3\pi}}$$

Dafs der vorstehende Ausdruck für x ein Maximum ist, ersieht man natürlich daraus, dafs $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$ einen negativen Werth erhält.

4. In einem ebenen Viereck sind die 4 Seiten a, b, c, d gegeben; das Viereck so zu bestimmen, dafs der Inhalt desselben ein Maximum werde.

Wenn man in dem nebenstehenden Viereck $ABCD$ die Seiten BC und CD sich unverrückbar denkt, so kann man die Seiten $BA = c$ und $DA = d$ auch in die Lage BED bringen, endlich kann man durch Verminderung des $\angle BCD$ das Viereck $ABCD$ auf jeden noch so

Fig. 559.



kleinen Inhalt bringen und man sieht, dafs die Aufgabe kein Minimum zuläfst.

Als Maximum ferner kann das Viereck keinen ausspringenden Winkel E haben

Zieht man die Diagonale BD, setzt die $\angle A$ und $E = \varphi$ und ψ, so ist

$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2}c \cdot d \cdot \sin\varphi$$
$$\triangle CBD = \tfrac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\psi$$

mithin der Inhalt des Vierecks

$$M = \tfrac{1}{2}(ab\sin\psi + cd\sin\varphi) \qquad (1)$$

Das Differenzial vom M soll $= 0$ gesetzt werden; es sind 2 Veränderliche ψ und φ, nimmt man φ als unveränderlich und differenzirt, so erhält man

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = ab\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + cd\cos\varphi = 0 \qquad (2)$$

Setzt man die Diagonale $BD = x$, so hat man für die beiden Veränderlichen die Gleichung

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\psi = c^2 + d^2 - 2cd\cos\varphi$$

woraus

$$\cos\psi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab} + \frac{cd}{ab}\cos\varphi \qquad (3)$$

und $$\frac{\partial\cos\psi}{\partial\varphi} = \frac{cd}{ab}\partial\cos\varphi$$

oder $$-\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\frac{cd}{ab}\sin\varphi$$

woraus $$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{cd}{ab} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

Diesen Werth in das Differenzial (2) von M gesetzt, gibt

$$\frac{\partial M}{\partial\varphi} = ab\cos\psi \cdot \frac{cd}{ab} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} + cd\cos\varphi = 0$$

oder

$$\frac{\partial M}{\partial\varphi} = cd\,\frac{\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi}{\sin\psi} = 0$$

oder $$\sin(\varphi + \psi) = 0 \qquad (3)$$

Es ist mithin

entweder $\varphi + \psi = 0$

oder $\varphi + \psi = 180^\circ = \pi$

Der erste Werth ist nicht möglich, folglich gilt nur der zweite Werth $\varphi + \psi = \pi$.

Das verlangte Viereck ist also dasjenige, dessen gegenüberliegende Winkel

= zweien Rechten sind, d. h. das in einen Kreis beschriebene Viereck, und das Maximum selbst, wenn man $a+b+c+d=s$ setzt ist

$$M=\tfrac{1}{4}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Dafs M ein Maximum und kein Minimum ist geht auch aus den Formeln hervor. Denn Gleichung 2 zeigt, dafs $\cos\psi$ mit $\cos\varphi$, also auch dafs ψ mit φ zunimmt und abnimmt. Setzt man also $\varphi=\varphi-\alpha$, so wird auch $\psi=\psi-\beta$, $\varphi+\psi-(\alpha+\beta)$ sind kleiner als 180° und $\sin[\varphi+\psi-(\alpha+\beta)]$ wird positiv. Für $\varphi+\alpha$ wird ψ zu $\psi+\beta$ und $\varphi+\psi+(\alpha+\beta)>180°$ folglich $\sin(\varphi+\psi+\alpha+\beta)$ wird negativ (vergl. No. 8).

5. Es ist eine grade Linie AB und außer ihr aber in derselben Ebene sind 2 Punkte C und D gegeben. Man soll den Punkt E in der geraden Linie finden, so dafs die von C und D nach E gezogenen graden Linien zusammengenommen die kleinste Länge haben.

Fällt man die Lothe CF und DG auf AB, so mufs der Punkt E zwischen F und G liegen. Denn gesetzt E' wäre mit

Fig. 560.

E gleichweit von G entfernt, so wäre $DE'=DE$, aber $CE'>CE$ also kann nur $DE+CE$ ein Minimum werden.

Da E' unendlich weit von G genommen werden kann, so läfst die Aufgabe kein Maximum zu.

Bezeichnet man FG mit c, FE mit x, CF mit a, DG mit b, so hat man

$$M=CE+DE=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

Nun ist $$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=\frac{x\sqrt{b^2+(c-x)^2}-(c-x)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}\times\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=0$$

oder $x\sqrt{b^2+(c-x)^2}=(c-x)\sqrt{a^2+x^2}$

woraus $x^2-\frac{2a^2cx}{a^2-b^2}+\frac{a^2c^2}{a^2-b^2}=0$

und $x=\pm\frac{ac}{a\pm b}$

Also $x=\frac{ac}{a+b}$ oder $\frac{ac}{b-a}$

Für die erste Formel verlängere FC bis H, so dafs $FH=a+b$, ziehe HG und aus C die mit HG parallele CE so ist E der gesuchte Punkt. Denn es ist

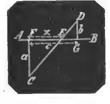
$$FH:FC=FG:FE$$

oder $a+b:a=c:x$

also $x=\frac{ac}{a+b}$

Die zweite Formel gilt für den Fall, dafs beide Punkte C und D auf entgegengesetzten Seiten von AB liegen.

Fig. 561.



Es versteht sich, dafs die grade Linie zwischen C und D die kleinste Summe beider Linien gibt, und dafs also deren Durchschnittspunkt mit AB der verlangte Punkt ist, und dies drückt auch die Formel aus. Denn es ist Fig. 561:

$$CF:DG=EF:EG$$

oder $a:b=x:c-x$

woraus $x=\frac{ac}{b-a}$

Aus der Function ersieht man, dafs das 2te Differenzial positiv werden mufs, denn das D. des ersten Gliedes $\sqrt{a^2+x^2}$ bleibt in allen Ordnungen positiv, die Differenziale des zweiten Gliedes $\sqrt{b^2+(c-x)^2}$ werden wegen des $(-x)$ und der daraus erfolgenden $(-\partial x)$ abwechselnd negativ und positiv und somit wird das D. von $-\frac{2(c-x)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$ positiv. Der Werth $x=\pm\frac{ac}{a\pm b}$ ist also ein Minimum.

6. In einen geraden Kegel einen Cylinder zu zeichnen, der den gröfsten Cubikinhalt hat.

Wenn man die Höhe des Cylinders sehr klein nimmt, so nähert sich die

Grundfläche desselben der des Kegels und kann mit Verminderung der Höhe derselben immer näher gebracht werden, aber der Inhalt des Cylinders wird immer kleiner und sein Grenzwerth ist = 0.

Fig. 562.



Eben so wird der Inhalt des Cylinders immerfort kleiner und verschwindet endlich in eine gerade Linie wenn man die obere Endfläche der Spitze des Kegels immer näher bringt, deshalb eignet sich die Aufgabe nicht zur Auffindung eines Minimums.

Setzt man den Halbmesser des Kegels $= r$, desen Höhe $= h$, den Halbmesser des Cylinders $= y$, dessen Höhe $= x$, so ist das gesuchte Maximum

$$M = \pi y^2 x$$

Nun ist $\quad h : r = h - x : y$

hieraus $\quad y = \frac{r}{h}(h - x)$

also $\quad M = \pi \frac{r^2}{h^2}(h - x)^2 x$

oder die constanten Factoren fortgelassen

$$M = (h - x)^2 x = h^2 x - 2hx^2 + x^3$$

also $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = h^2 - 4hx + 3x^2 = 0$

oder $\quad h(h - x) - 3x(h - x) = 0$

oder $\quad (h - x)(h - 3x) = 0$

Nun ist für $h - x = 0$; $x = h$, der Cylinder wird $= 0$ und folglich mufs $h - 3x = 0$ sein.

Man hat demnach für das Maximum des Kubikinhalts

$$x = \tfrac{1}{3}h$$

und der Inhalt des Cylinders selbst

$$= \frac{4}{27}\pi h r^2$$

der Kegel hat den Inhalt

$$\tfrac{1}{3}\pi h r^2 = \frac{9}{27}\pi h r^2$$

folglich verhalten sich beide Körper, der Cylinder und der Kegel wie 4 : 9

7. In einem graden Kegel einen Cylinder zu zeichnen, der den gröfsten Mantel hat.

Mit der beliebigen Abnahme der Höhe des Cylinders nähert sich der Mantel immer mehr dem Grenzwerthe = 0, dasselbe geschieht mit der Zunahme der Höhe des Cylinders bis zu deren Grenze h, wo der Mantel ebenfalls = 0 wird. Es mufs also einen Cylinder geben, dessen Mantel den gröfsten Werth erhält. Bei der vorigen Bezeichnung hat man das Maximum

$$M = 2\pi y \cdot x = 2\pi \cdot \frac{r}{h}(h - x)x$$

und die constanten Factoren fortgelassen

$$M = (h - x)x = hx - x^2$$

also $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = h - 2x = 0$

woraus $\quad x = \tfrac{1}{2}h$

der Mantel ist also

$$2\pi \cdot \frac{r}{h} \cdot \tfrac{1}{2}h \cdot \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}\pi r h$$

8. In einen graden Kegel einen Cylinder zu zeichnen, der den gröfsten Gesammtumfang hat.

Mit der Zunahme der Höhe des Cylinders bis zur Höhe h des Kegels nimmt die Gesammt-Oberfläche des Cylinders immerfort ab, und wird mit der Höhe $h = 0$. Mit der Abnahme der Höhe nähert sich die Gesammtoberfläche immerfort der doppelten Kegelgrundfläche. Ist nun diese doppelte Grundfläche ein absolutes Maximum für die Gesammtoberflächen aller in den Kegel eingezeichneten Cylinder, so gibt es für dieselben kein Maximum. Mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung ist das verlangte Maximum

$$M = 2\pi y \cdot x + 2\pi y^2 = 2\pi \frac{r}{h}(h - x)x + 2\pi \frac{r^2}{h^2}(h - x)^2 = 2\pi \frac{r}{h}\left[(h - x)x + \frac{r}{h}(h - x)^2\right]$$

$$= 2\pi \frac{r}{h^2}[(r - h)x^2 - h(2r - h)x + rh^2] \qquad (1)$$

folglich $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = 2\pi \frac{r}{h^2}[2(r - h)x - h(2r - h)] = 0$

woraus $\quad x = \frac{h(2r - h)}{2(r - h)}$

Nun ist

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 2\pi \frac{r}{h^2} \times 2(r - h) = 4\pi \frac{r}{h^2}(r - h)$$

Ist $r > h$ so wird dies zweite D. posi-

tiv und M ein Minimum. Da aber nach dem Obigen ein Minimum nicht möglich ist, so mufs $h > r$ sein, und dies ist die Bedingung, dafs ein Maximum entstehe, weil dann diese gesammte Oberfläche des Cylinders gröfser ist als die doppelte Kegelgrundebene. Dieses Resultat aber geht auch ohne Analysis aus der Formel 1 für M hervor. Denn da die doppelte Kegelgrundfläche = ist $2\pi r^2$ so hat man zur Bedingung

$$2\pi r^2 < 2\pi \frac{r}{h^2} [(r-h)x^2 - h(2r-h)x + rh^2]$$

woraus die Klammern aufgelöst und die Nenner fortgeschafft und reducirt, die Bedingung hervorgeht

$$(r-h)x - h(2r-h) > 0$$

oder $$(r-h)x > h(2r-h)$$

Da nun x immer kleiner ist als h, so mufs $(r-h) > (2r-h)$ sein, d. h. es müssen $(r-h)$ und $(2r-h)$ subtractiv sein.

Es ist demnach

$$x = \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{h-2r}{h-r}$$

hieraus $$y = \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{r}{h-r}$$

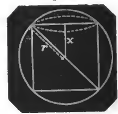
und der hierzu gehörige Cylinder der verlangte.

8. In einer Kugel den gröfsten Cylinder zu zeichnen.

Bezeichnet man nach Figur 563 mit r den Halbmesser der Kugel, mit x die halbe Höhe des Cylinders, d. i. die Entfernung des Mittelpunkts der Kugel von jedem Grundkreise des Cylinders, so ist der Inhalt des Cylinders

$$M = \pi \cdot (r^2 - x^2) \cdot 2x = 2\pi(r^2 x - x^3)$$

Fig. 563.



$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2\pi r^2 - 6\pi x^2 = 0$$

woraus $$x = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

daher die Höhe des Cylinders $= \tfrac{2}{3}r\sqrt{3}$ und der Durchmesser seiner Grundebene

$$= 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}r\sqrt{6}$$

die Höhe verhält sich zum Durchmesser wie $\sqrt{3} : \sqrt{6} = 1 : \sqrt{2}$

d. h. wie die Seite eines Quadrats zu dessen Diagonale, und der Inhalt des Cylinders ist $= \tfrac{4}{9}\pi r^3 \sqrt{3}$

9. In einer Kugel den Cylinder zu zeichnen, der die gröfste Gesammtoberfläche hat.

Bei derselben Bezeichnung hat man das verlangte Maximum

$$M = 2\pi(r^2 - x^2) + 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$$

wo das erste Glied die Summe beider Grundebenen und das zweite Glied den Mantel vorstellt. Dies M hat mit beliebiger Abnahme von x den Grenzwerth $2\pi r^2$ nämlich die doppelte Fläche des gröfsten Kreises der Kugel.

Nun ist

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 4\pi \left[-x - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \sqrt{r^2 - x^2}\right] = 4\pi \left[-x + \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right] = 0$$

Da x nur mit dem subtractiven Vorzeichen in der Formel sich befindet, so ersieht man sofort, dafs mit der Vergröfserung von x der Ausdruck kleiner als Null also subtractiv und mit der Verminderung von x der Ausdruck gröfser als Null also additiv wird und dafs somit das Differenzial ein Maximum enthält.

Nun hat man entwickelt

$$-x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$$

woraus $$x^2 = \tfrac{1}{2}r^2 (1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{5}})$$

und $$x = \pm r\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}}$$

das subtractive Vorzeichen ist unmöglich, mithin ist

$$x = r\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}}$$

Da nun in dem obigen Differenzial

$$-x + \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

r immer $> x$, also $\sqrt{r^2 - x^2}$ positiv ist, das zweite Glied aber wegen des subtractiven ersten Gliedes additiv sein mufs, so ist auch der Zähler $(r^2 - 2x^2)$ additiv, folglich $r^2 > 2x^2$.

Aus diesem Grunde kann in dem Ausdruck für x nur $-\sqrt{\tfrac{1}{5}}$ gelten, weil für

$$x = r\sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}}$$

$$x^2 = r^2 [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}}]$$

also $2x^2 > r^2$ werden würde, nnd man hat den Werth für das Maximnm

$$x = r \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}} = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

10. Den Werth von x zu finden für welches x^x ein Minimnm wird.

Es ist nach Fermel 146

$$\frac{\partial x^x}{\partial x} = x^x [1 + logn\, x] = 0$$

Und es kann nur für den Factor

$$1 + logn\, x = 0$$

x^x znm Minimum werden, wenn x nicht $= 0$ sein sell.

Es ist mithin $ln\, x = -1$

nnd $$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Wenn man in dem ersten Differenzial x vermehrt, se wird x^x gröfser nnd $ln\, x$ wird gröfser, also > 0; wenn man aber darin x vermindert, se wird x^x kleiner und $ln\, x$ wird kleiner, alse < 0 und felglich gibt $x = \frac{1}{e}$ ein Minimum von

$$x^x = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} = \frac{1}{\sqrt[2,71828\ldots]{2,71828\ldots}} = \frac{1}{1,41466}$$

Man überzeugt sich ven der Richtigkeit des Resultats, nämlich dafs $\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$ ein Minimnm aller x^x ist (ein ächter Brnch kann x nur sein) wenn man nach einander wie z. B. felgende Legarithmen anfsncht:

$log\ \sqrt[2,718\ldots]{2,718\ldots}$	$= 0,159768$
$log\ \sqrt[1]{1}$	$= 0,0000000$
$log\ \sqrt[2]{2}$	$= 0,1505150$
$log\ \sqrt[3]{3}$	$= 0,1597071$
$log\ \sqrt[4]{4}$	$= 0,1505150$
$log\ \sqrt[10]{10}$	$= 0,1000000$
$log\ \sqrt[100]{100}$	$= 0,0200000$

Für einen Bruch, dessen Zähler = 1 ist, gibt also nnter allen Wnrzeln ven der Ferm $\sqrt[x]{x}$ die Zahl $\sqrt[e]{e}$ den gröfsten Nenner, den Bruch selbst also als die kleinste Zahl.

10. **Eine implicite Fnnctien ist gegeben, die Maxima nnd Minima derselben zn hestimmen.**

Ist $\quad u = f(y, x) = 0 \qquad (1)$

eine Gleichnng zwischen den Veränderlichen x nnd y (s. Differenzialgleichnng I, Fermel 3), se hat man (nach demselben Art. No. 3)

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

oder $$\frac{\partial f(y,x)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f(y,x)}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

Soll nun y ein Maximnm oder ein Minimnm werden, so mnfs x einen solchen Werth X erhalten, für welchen $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ wird. Mithin reducirt sich Gleichung 2 auf die Gleichnng

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Es können alse nnr diejenigen Werthe ven x Maxima oder Minima der Functien erzeugen, für welche $\frac{\partial y}{\partial x}$ nnd $\frac{\partial u}{\partial x}$ einzeln $= 0$ sind. Oder was dasselbe sagt, für welche das D. der Gleichnng, x als alleinige Variable angesehen, $= 0$ wird. Die beiden Bedingnngsgleichungen für ein M sind daher

$$u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

und ans diesen können die beiden zusammengehörigen Werthe ven x nnd y entwickelt werden.

Z. B. $\quad u = y^3 - axy + x^3 = 0 \qquad (4)$

so ist nech

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ay + 3x^2 = 0 \qquad (5)$$

Diese zweite Gleichung ergibt

$$y = \frac{3x^2}{a} \qquad (6)$$

nnd dieser Werth in die Gleichung für u substituirt

$$\left(\frac{3x^2}{a}\right)^3 - ax\frac{3x^2}{a} + x^3 = 0$$

ergibt $$x^3\left(\frac{27}{a^3}x^3 - 2\right) = 0$$

oder $$x^3\left(x^3 - \frac{2a^3}{27}\right) = 0$$

Es ist mithin

entweder $x = 0$ oder $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$

für diese Werthe ven x erhält man ans Gleichnng 6

entweder $y = 0$ oder $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$

11. Um nun zn erfahren, ob für die

erhaltenen Werthe von x nnd y die Fnnction zn einem Maximum oder zu einem Minimum oder zu keinem von beiden geworden ist, bildet man das zweite D. Dies hat man ans Gleichung 2:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\cdot\partial x}\right]+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Setzt man nun nach Vorschrift den Werth $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ in diese Gleichung so reducirt sich dieselbe auf

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

woraus $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

Ist nnn dieses zweite D. subtractiv, so entsteht ein Maximnm; ist es additiv, ein Minimnm. Ist das zweite D. $=0$, so mufs das 3te nnd 4te D. gebildet und verfahren werden wie oben vorgeschrieben worden.

12. Die Regel für die Auffiudnng der Maxima und Minima einer implicite gegebenen Fnnctiou ist daher folgende:

Man nehme das Differenzial der Gleichnngsformel in Beziehung auf die Urveränderliche (x), als wenn diese allein variabel nnd die Function (y) also constant wäre; setze dies $D=0$ und entwickele x nnd y aus beiden Gleichungen, so dafs beide dnrch constant gegebene Gröfsen ausgedrückt werden. Alsdann nehme man das zweite D. der Gleichnngsformel, wiederum x allein veränderlich angesehen, dividire dies zweite D. durch das erste D. der Gleichungsformel, bei welchem y als die alleinige Veränderliche betrachtet wird, gebe diesem Qnotient das entgegengesetzte Vorzeichen nnd setze in den so erhalteuen Ausdruck die zuerst gefundenen Werthe von x und y. Ein Minimnm für y findet statt, wenn der zuletzt gefundene Ansdruck additiv wird, ein Maximum wonn er subtractiv wird.

1. Beispiel. Die obige Gleichnng

$$u=y^3-axy+x^3=0$$

Es ist ermittelt für $u=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-ay+3x^2=0$$

$$y=\frac{3x^2}{a}$$

x entweder $=0$ oder $=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$

also y entweder $=0$ oder $=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$

Man erhält $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-ax$$

also für die beiden ersten zusammengehörigen Werthe $x=0$ und $y=0$ erhält man $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}:\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{6x}{3y^2-ax}=\frac{0}{0}$$

Es ist also der Prüfungscoefficient nicht $=0$ sondern eine bestimmte Gröfse, die hier in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint nnd man findet den Werth nach Capitel II, pag. 294, wenn das Differenzial des Zählers durch das Differenzial des Nenners dividirt, und zwar den Werth des Quotient ausschliefslich für die Werthe $x=0$ nnd $y=0$.

Setzt man nun nur eine Veränderliche zu erhalten für y den durch x bestimmten Werth $=\frac{3x^2}{a}$, so erhält man den Qnotient

$$=\frac{6x}{3\left(\frac{3x^2}{a}\right)^2-ax}=\frac{2a^2}{9x^3-a^3}$$

nnd $x=0$ gesetzt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}:\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2}{a}$$

folglich den entgegengesetzten Quotient $+\frac{2}{a}$, also eine additive Gröfse, nnd folglich ist für $x=0$, die Function $y=0$ ein Minimum.

Setzt man in den Qnotient $\frac{6x}{3y^2-ax}$ die beiden anderen zusammengehörigen Werthe $x=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ nnd $y=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ so erhält man ihn

$$=\frac{2a\sqrt[3]{2}}{\frac{1}{3}a^2\sqrt[3]{16}-\frac{1}{3}a^2\sqrt[3]{2}}=+\frac{6}{a}$$

der entgegengesetzte Qnotient $=-\frac{6}{a}$, eine subtractive Gröfse und $y=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ ist folglich ein Maximum.

2. Beispiel.

$$u = y^4 - 4a^2xy + x^4 = 0$$

Es ist $\frac{\partial u}{\partial x} = -4a^2y + 4x^3 = 0$

woraus $y = \frac{x^3}{a^2}$

Diesen Werth in die Gleichung für u gesetzt, ergibt

$$\frac{x^{12}}{a^8} - 4x^4 + x^4 = 0$$

also reducirt $x^4(x^8 - 3a^8) = 0$
woraus

x entweder $= 0$ oder $= \pm a\sqrt[8]{3}$

Die hierzu gehörigen Werthe von y sind

y entweder $= 0$ oder $= \pm a\sqrt[8]{27}$

Um die Prüfungsformel zu erhalten hat man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +12x^2$$

und $$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 4a^2x$$

hieraus der Prüfungsquotient

$$\frac{12x^2}{4y^3 - 4a^2x} = \frac{3x^2}{y^3 - a^2x}$$

für $x = 0$ und $y = 0$ wird der Quotient $= \frac{0}{0}$

Also wie bei dem ersten Beispiel den Quotient der Differenziale genommen, zuvor um nur eine Veränderliche zu haben, den Werth von $y = \frac{x^3}{a^2}$ eingesetzt, gibt den Prüfungsquotient

$$= \frac{3x^2}{\left(\frac{x^3}{a^2}\right)^3 - a^2x} = \frac{3a^6x}{x^8 - a^8}$$

also $$\frac{\partial(3a^6x)}{\partial(x^8 - a^8)} = \frac{3a^6}{8x^7}$$

und für $x = 0$ wird derselbe ∞. Es existirt also für $x = 0$ und $y = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimum für y.

Setzt man in den Prüfungsquotient die zweiten zusammengehörigen Werthe von $x = \pm a\sqrt[8]{3}$ und von $y = \pm a\sqrt[8]{27}$ und zwar zuerst die Werthe mit den oberen Vorzeichen so erhält man

$$\frac{3a^2\sqrt[4]{3}}{+a^3\sqrt[8]{27^3} - a^3\sqrt[8]{3}} = \frac{3\sqrt[8]{3^2}}{3a\sqrt[8]{3} - a\sqrt[8]{3}} = \frac{+3\sqrt[8]{3}}{2a}$$

Der entgegengesetzte Prüfungsquotient ist also eine subtractive bestimmte Gröfse und y wird für $x = +a\sqrt[8]{3}$ ein Maximum.

Für die Werthe mit den unteren Vorzeichen erhält man

$$\frac{+3\sqrt[8]{3^2}}{-3a\sqrt[8]{3} + a\sqrt[8]{3}} = -\frac{3\sqrt[8]{3}}{2a}$$

Der entgegengesetzte Quotient ist eine additive bestimmte Gröfse und y wird für $x = -a\sqrt[8]{3}$ ein Minimum.

13. Eine Function von 2 Urveränderlichen ist gegeben, man soll die Maxima und Minima derselben bestimmen.

Es sei $y = f(x, z)$
so ist nach Kapitel I, No. 5 (pag. 291)

$$\begin{aligned} y + \Delta y = y &+ \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{(3)} + \ldots \\ &+ \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x\cdot\partial z}\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z}{1\cdot 1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x\cdot\partial z^2}\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z^2}{1\cdot(2)} + \ldots \\ &+ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\cdot\frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^2\cdot\partial z}\cdot\frac{\Delta x^2\cdot\Delta z}{2\cdot 1} + \ldots \\ &+ \frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\cdot\frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

bezeichnet man die Summe aller Glieder von höheren Abmessungen der Zuwachse mit R so ist

$$y + \Delta y = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{1} + R$$

und man kann mit beliebiger Abnahme von Δx und von Δz den Rest R kleiner machen als $\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\Delta x$ und kleiner als $\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\Delta z$.

Denn setzt man $\Delta x = 0$, so kann R kleiner werden als $\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\Delta z$ und setzt man $\Delta z = 0$ so kann R kleiner werden als $\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\Delta x$

Haben nun die Differenziale $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial y}{\partial z}$ reelle Werthe, so wächst y, wenn Δx

und Δz additiv sind und y nimmt ab, wenn man Δx und Δz subtractiv nimmt. Es entsteht also in diesem Fall für y weder ein Maximum noch ein Minimum, weil die benachbarten Werthe auf der einen Seite gröfser, auf der anderen Seite kleiner werden. Folglich dürfen $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial y}{\partial z}$ keine reellen Werthe haben, sie müssen wie bei den Functionen mit nur einer Urveränderlichen entweder 0 oder ∞ sein. Die ersten Bedingungen für das Vorhandensein eines Maximums oder eines Minimums ist daher

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ oder } = \infty$$

und $$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 \text{ oder } = \infty$$

Für die Beurtheilung, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden entsteht, ist wie bisher geschehen auf das D. der nächstfolgenden Dimension zu achten.

Dies ist aus der obigen Zusammenstellung der Reihen für $y + \Delta y$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} \cdot \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{2}$$

und es kann der noch fehlende Rest R' zur Vervollständigung von $y + \Delta y$ kleiner werden als jedes einzelne der 3 zweiten Differenziale.

Wird daher die Summe der 3 Glieder, wenn man Δx und Δz beliebig klein nimmt für $+\Delta x$ und $+\Delta z$ gröfser oder kleiner und wenn man $-\Delta x$ und $-\Delta z$ setzt, kleiner oder gröfser, so ist die Function weder ein Maximum noch ein Minimum, weil die benachbarten Werthe von y einerseits gröfser und andrerseits kleiner sind. Werden dagegen die 3 Glieder in Summa für additive und für subtractive Δx und Δy beiderseits gröfser oder beiderseits kleiner, so entsteht im ersten Fall für y ein Minimum, im zweiten Fall ein Maximum.

Um das Verhältnifs der hierzu gehörigen Gröfsen für diese Bedingung ermitteln zu können, setze der leichteren Uebersicht wegen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \beta \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \gamma$$

so hat man die obigen 3 Glieder

$$\alpha \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \beta \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \gamma \frac{\Delta z^2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha \Delta x^2 + 2\beta \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \gamma \Delta z^2)$$

Von den 3 Gliedern ist nur das mittelste, welches bei Aenderung der Vorzeichen von Δx und von Δy das Vorzeichen wechselt; das erste und das letzte Glied bleiben, weil sie Quadrate sind immer positiv. Es kommt also darauf an, dafs das mittlere Glied auf das Vorzeichen der ganzen dreigliedrigen Gröfse keine Aenderung ausüben kann, und dies geschieht dann nicht wenn

$$\alpha \Delta x^2 + \gamma \Delta z^2 > 2\beta \Delta x \cdot \Delta z$$

oder wenn

$$\alpha \cdot \Delta x^2 + \gamma \Delta z^2 - 2\beta \Delta x \cdot \Delta z > 0$$

oder wenn

$$\Delta x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \Delta z^2 - \frac{2\beta}{\alpha} \Delta x \cdot \Delta z > 0$$

Nun ist $-\frac{2\beta}{\alpha} \Delta x \cdot \Delta z$ das doppelte Product des Quadrats von $\Delta x - \frac{\beta}{\alpha} \Delta z$.

Man hat demnach die Bedingung

$$\left(\Delta x - \frac{\beta}{\alpha} \Delta z\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \Delta z^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \Delta z^2 > 0$$

oder

$$\left(\Delta x - \frac{\beta}{\alpha} \Delta z\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \Delta z^2 > 0$$

Nun ist, welche Gröfsen auch Δx, Δz, β und α sein mögen $\left(\Delta x - \frac{\beta}{\alpha} \Delta z\right)^2$ und Δz^2 immer positiv. Folglich bleibt die Bedingung $\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} > 0$

oder $$\gamma\alpha - \beta^2 > 0$$

oder $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z}\right)^2 > 0 \qquad (I)$$

als die Bedingung für die Möglichkeit eines Maximums oder eines Minimums.

Die Bedingung für das Maximum ist nun:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0 \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0 \qquad (II)$$

die Bedingung für das Minimum:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0 \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0 \qquad (III)$$

Beispiel. Die Function

$$u = xy^2 + a(x + y)^2 - b(x + y) \qquad (1)$$

soll auf Maximum und Minimum untersucht werden.

Man hat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 + 2a(x + y) - b = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 2a(x + y) - b = 0 \qquad (3)$$

die untere von der oberen abgezogen gibt

$$y^2 - 2xy = 0$$

hieraus hat man für ein mögliches M

entweder $y = 0$

oder $y = 2x$

Für $y = 0$ erhält man aus 2 oder 3

$$2ax - b = 0$$

also für $y = 0$ ist $x = \frac{b}{2a}$ (4)

für $y = 2x$ hat man aus 2 oder 3

$$4x^2 + 6ax - b = 0$$

woraus

$$(\text{für } y = 2x)\ x = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 4b}}{4} \qquad (5)$$

Man hat also in den Gleichungen 4 und 5 für x drei verschiedene Werthe gefunden, für welche mit den beiden zugehörigen Y ein M aus der Function hervorgehen kann.

Nimmt man nun die zweiten Differenziale aus 2 und 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +2a \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = +2a + 2x \qquad (7)$$

so geht aus diesen hervor, dafs wegen der Uebereinstimmung beider zweiten D. in den Vorzeichen ein M entsteht, und zwar, weil die Vorzeichen additiv sind, ein Minimum, wenn die Prüfungsformel I. ein M zuläfst.

Um diese zu bilden hat man aus 2 oder 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x} = 2y + 2a \qquad (8)$$

und es soll nun als Bedingung für ein M sein

$$2a \times (2a + 2x) - (2y + 2a)^2 > 0$$

oder reducirt

$$a(x + a) > (y + a)^2 \qquad (9)$$

Für den ersten Werth $y = 0$ wird (nach Gl. 4) $x = \frac{b}{2a}$

man hat demnach aus 9 die Vergleichung

$$a \cdot \frac{b}{2a} + a^2 > a^2$$

oder $\frac{b}{2} > 0$

welche ein M zuläfst ,wenn b nicht subtractiv ist.

Für den zweiten Werth $y = 2x$ ist (nach Gl. 5)

$$x = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 4b}}{4}$$

Läfst man diesen Ausdruck für x vorläufig aufser Betracht, so hat man, in Formel 9 den Werth $y = 2x$ gesetzt

$$ax + a^2 > (2x + a)^2$$

woraus reducirt

$$3a > 4x$$

mithin ist die Bedingung für ein M für den zweiten Werth $y = 2x$

$$x < \tfrac{3}{4}a$$

hieraus geht hervor, dafs in dem Ausdruck (5) für x das Minuszeichen vor der $\sqrt{\ }$ gilt; dafs aber auch das + Zeichen gestattet ist, wenn

$$\sqrt{9a^2 + 4b} < 2 \cdot 3a$$

oder $9a^2 + 4b < 36a^2$

also wenn $b < \frac{27}{4} a^2$ (10)

1. Zu dem M in den betreffenden drei Fällen übergehend, setze in die Function u (1) für y den ersten möglichen Werth $= 0$ so entsteht

$$u = ax^2 - bx \qquad (11)$$

Man sieht, dafs durch Vergröfserung von x, wenn x positiv genommen wird, u ebenfalls immerfort wächst und dafs also für $x = \infty$ ein absolutes Maximum entsteht, welches niemals zu einer Aufgabe gehören kann.

Für x den Werth aus 4 für $y = 0$ gesetzt, nämlich $x = \frac{b}{2a}$ entsteht:

$$u = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{b^2}{4a} \qquad (12)$$

Setzt man zur Probe, ob wirklich dieser Werth von x für u ein Minimum gibt; $a = 1$; $b = 3$

so ist $u = x^2 - 3x$

x für das Minimum $= -\frac{3}{2} = -1{,}5$

u für das Minimum $= -2{,}25$

für $x = -1{,}6$ wird $u = -2{,}24$

für $x = -1{,}4$ wird $u = -2{,}24$

Beide benachbarten Werthe von u sind also gröfser und $u = -2{,}25$ ist ein Minimum.

2. Setze nun den zweiten möglichen Werth von $y = 2x$ in die Function u (1) so erhält man

$$u = 4x^3 + 9ax^2 - 3 \cdot bx \qquad (13)$$

und es wird u nach (5) ein Minimum für

$$x = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 4b}}{4} \qquad (14)$$

Nun ist oben gezeigt, dafs beide Vorzeichen der $\sqrt{\ }$ gelten können wenn nur $b < \frac{27}{4} a^2$ ist.

Man setze z. B. $a = 1$; $b = 4$ so ist

$$u = 4x^3 + 9x^2 - 12x \qquad (15)$$

Aus (14) hat man

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4} = \text{entweder } +\tfrac{1}{2}$$
$$\text{oder } -2$$

Für $x = \frac{1}{2}$ hat man $u = -3\frac{1}{4}$

für $x = -2$ hat man $u = +28$

Setzt man zur Probe $x = \frac{1}{3}$

so entsteht $u = -2\frac{23}{27}$

und setzt man $x = \frac{2}{3}$

so entsteht $u = -2\frac{22}{27}$

Es erscheint also für $x = \frac{1}{2}$, u als ein Minimum weil $-2\frac{23}{27} > -3\frac{1}{4} < -2\frac{22}{27}$.

Um den zweiten Werth $x = -2$ zu probiren, setze die benachbarten Werthe $-1\frac{3}{4}$ und $-2\frac{1}{4}$, so erhält man

für $x = -1\frac{3}{4}$
$u = +27\frac{1}{8}$

für $x = -2\frac{1}{4}$
$u = +27$

3. Es erscheint also hier u als ein Maximum, welches der allgemeinen Untersuchung nach nicht möglich sein sollte.

Dafs aber u für $x = +\frac{1}{2}$ wirklich ein Minimum und für $x = -2$ wirklich ein Maximum wird, davon überzeugt man sich wenn man an die aus der Bestimmung $y = 2x$ hervorgegangene Gleichung 13, und für $a = 1$ und $b = 4$ als angenommene Werthe an Gleichung 14 sich unmittelbar wendet.

Denn da (15) $u = 4x^3 + 9x^2 - 12x$

so ist $$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^2 + 18x - 12 = 0$$

woraus $$x = \frac{-3 \pm 5}{4} = \text{entweder } +\tfrac{1}{2} \quad \text{oder } -2$$

Nun ist $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 24x + 18$$

folglich gibt der positive Werth $x = \frac{1}{2}$ ein Minimum; und es kann auch ein Maximum für u entstehen, wenn $24x + 18$ subtractiv wird, d. h. wenn x subtractiv wird und $(-x) < (-\frac{3}{4})$.

Da nun $-2 <$ ist als $-\frac{3}{4}$ so ist u für $x = -2$ ein Maximum.

Es scheint also, als wenn die aus der allgemeinen Untersuchung zu gewinnenden Bestimmungen nicht stichhaltig wären. Man bemerke dagegen, dafs wenn man in Gleichung 7 den Werth $x = -2$ setzt,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = +2a - 4a = -2a$$

entsteht.

Da nun $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +2a$ ist

so haben beide zweiten Differenziale ungleichnamige Vorzeichen und es existirt weder Maximum noch Minimum. Es ist mithin der specielle Werth $x = -2$ nicht dahingehörig.

Um dergleichen Inconsequenzen zu vermeiden, thut man gut, nur die Werthe von y in x ausgedrückt, aus den Gleichungen 2 und 3 zu entwickeln und diese (hier $y = 0$ und $y = 2x$) in die Gleichung (1) für u einzusetzen, wonach man mit einer Function von nur einer Veränderlichen zu thun hat.

4. Eine Inconsequenz gegen die Resultate der allgemeinen Untersuchung entsteht, wenn man gegen die Bestimmung (10) $b > \frac{27}{4} a^2$ in die Function nimmt.

Es bleibe in dem Beispiel $a = 1$, so soll (nach 10) $b < 6\frac{3}{4}$ sein, wenn das subtractive Zeichen vor der $\sqrt{}$ Geltung hat. Man setze $b = 10$ so ist

$$u = 4x^3 + 9x^2 - 30x$$
$$x = \frac{-3 + 7}{4} = \text{entweder } -2{,}5 \quad \text{oder } +1$$

Für $x = +1$ wird u ein Minimum, der Werth dafür ist $= -17$; alle benachbarten Werthe werden $-(17 - \Delta u)$.

Für $x = -2{,}5$ wird aber u ein Maximum $= +68{,}75$ und alle benachbarten Werthe werden $+(68{,}75 - \Delta u)$.

Man überzeugt sich davon, wenn man die vorstehende Formel für u differenzirt

$$u = 4x^3 + 9x^2 - 30x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^2 + 18x - 30 = 0$$

woraus $$x = \frac{-3 \pm 7}{4} \text{ entweder} = -2{,}5 \quad \text{oder} = +1$$

Nun ist $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 24x - 18$$

folglich gibt $x = +1$ ein Minimum, und es entsteht ein Maximum, wenn x subtractiv genommen wird und zwar $(-x) < (-\frac{3}{4})$; folglich gibt $-2{,}5$ für x ein Maximum für u.

Differenzio-Differenzialrechnung ist die Lehre von der Bildung der höheren Differenziale. Sie wird in der Differenzialrechnung mit vorgetragen und befindet sich hier in dem Art. „Differenzial" No. 46 bis No. 57.

Dignität ist ein Product von mehreren gleichen Factoren, und wird gewöhnlich Potenz genannt.

Digression s. v. w. Ausweichung s. d. Bd. 1.

Dimension s. v. w. Abmessung s. d. Bd. 1.

Dioktaeder (δις zweimal) Zweimalachtflächner, Vierundvierkantner, ein Krystall von 16 Flächen, 24 Kanten und 10 Ecken in der Form des Didodekaeders, Fig. 558, wenn man für die 12eckige gemeinschaftliche mittlere Basis der beiden Pyramiden ein symmetrisches Achteck sich denkt. Auch bei diesem sind die Flächen ungleichseitige

Dreiecke, daher auch die Kanten und Ecken dreierlei.

Von den Kanten sind 8 längere meist schärfere, 8 kürzere meist stumpfere Scheitelkanten A, B und in der Basis liegende 8 Seitenkanten D. Von den Ecken sind 2 symmetrische 8flächige Scheitelecken C, 8 vierflächige Ecken, von denen je 4 und 4 symmetrisch sind.

Die Hauptaxe verbindet die beiden Ecken C, die beiden Nebenaxen verbinden je 2 Paar gegenüberliegende Ecken, in welchen die längeren Kanten A zusammentreffen. Die Ebenen, welche durch 2 Paar einander gegenüberliegende Endkanten gelegt werden sind Rhomben.

Diophantische Gleichungen, diophantische Aufgaben, (von Diophantus, einem Mathematiker einige Jahrhunderte vor Chr. Geburt, der diese Aufgaben erfunden, oder sie zuerst gelöst haben soll) auch unter dem Namen Unbestimmte Analysis oder unbestimmte Analytik bekannt, sind Gleichungen oder Aufgaben, welche mehrere Resultate zulassen, indem die unbekannten Gröfsen mit den bekannten nicht in so vielen Beziehungen gegeben sind als zu deren Bestimmung erforderlich ist, so dafs eine oder mehrere unbekannte willkührlich angenommen werden können. Einen Theil dieser Disciplin der Algebra macht die Blindrechnung, Regel coeci aus (s. d. Bd. 1, pag. 376.) Die Aufgaben bestehen darin, dafs eine oder mehrere Gleichungen weniger gegeben sind als Unbekannte gefunden werden sollen.

$$x + y = 10$$

ist eine Aufgabe, die für x und y eine unendliche Menge Auflösungen zuläfst. Nimmt man $x = 1$ so ist $y = 9$; für $x = 2, 3, 4 \ldots$ entsteht $y = 8, 7, 6 \ldots$; für $x = -1$ wird $y = +11$ u. s. w. Es sind hier 2 Unbekannte und nur eine Gleichung ist gegeben.

Eine Gleichung vom 2ten Grade läfst 2 Auflösungen zu, die beiden Unbekannten sind aber ganz bestimmte der Natur der Gleichung zukommende Gröfsen, daher ist solche Gleichung keine diophantische Aufgabe; desgleichen nicht eine Gleichung vom $n$ten Grade, welche n Unbekannte liefert, von denen aber keine willkührlich angenommen werden kann weil dieselben alle aus der Auflösung als ganz bestimmte Gröfsen hervorgehen.

Die in dem Art. Blindrechnung aufgeführten Beispiele gehören hierher. Es sollen nun noch einige andere hinzugefügt werden.

1. Es werden 2 Zahlen gesucht, deren Quadrate, wenn sie addirt werden, wieder eine Quadratzahl geben (Meyer Hirsch, pag. 262, No. 34).

Die Aufgabe ist $a^2 + b^2 = c^2$
oder auch $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$

Nun kann man a^2 ebenfalls als ein Product von 2 ungleichen Factoren betrachten, z. B. $p^2 \times q^2$ und man kann den einen Factor $c + b = p^2$ und den anderen $c - b = q^2$ setzen. Dann hat man:

$$c + b = p^2$$
$$c - b = q^2$$

hieraus $2b = p^2 - q^2$

also $b = \frac{p^2 - q^2}{2}$

nun ist $a^2 = p^2q^2$

also $a = pq$

Die beiden gesuchten Zahlen haben demnach die Form $\frac{p^2 - q^2}{2}$ und pq oder $p^2 - q^2$ und $2pq$.

Für $p = 5$, $q = 1$ ist $a = 24$; $b = 10$;
$$a^2 + b^2 = 24^2 + 10^2 = 26^2$$

2. Es mögen a und c ein paar Rationalzahlen bezeichnen: welche Rationalzahlen können für x und y angenommen werden, wenn die Formel $a^2x^2 + cy^2$ ein vollkommenes Quadrat werden soll (Meyer Hirsch, pag. 263, No. 35).

Setzt man
$$a^2x^2 + cy^2 = z^2$$
schreibt $cy^2 = z^2 - a^2x^2 = (z + ax)(z - ax)$
setzt ferner $y^2 = m^2 \cdot n^2$
nimmt $cm^2 = z + ax$
$$n^2 = z - ax$$
so erhält man $cm^2 - n^2 = 2ax$

oder $\frac{cm^2 - n^2}{2a} = x$

hierzu $mn = y$

und die allgemeine Form der Zahlen x und y ergibt sich wenn man beide Ausdrücke noch mit $2a$ multiplicirt,

$$x = cm^2 - n^2$$
$$y = 2amn$$

Man kann diese von Mayer Hirsch angegebenen Formen vereinfachen wenn man beide mit m^2 dividirt. Man erhält

$$x = c - \left(\frac{n}{m}\right)^2$$
$$y = 2a\left(\frac{n}{m}\right)$$

für $\frac{n}{m}$ die ganze Zahl n geschrieben

$$x = c - n^2; \; y = 2an$$

und es ist
$$a^2x^2 + cy^2 = a^2(c - n^2)^2 + c(2an)^2 = a^2(c + n)^2$$

3. Man soll 2 Zahlen von einer solchen Beschaffenheit finden, dafs die Differenz

dieser Zahlen der Differenz ihrer Cuben gleich sei (Mayer Hirsch, pag. 266, No. 45). (Die allgemeine Form der beiden Zahlen hat M. H. nicht angegeben.)

Bedenten x und y die verlangten Zahlen, so ist

$$y - x = y^3 - x^3$$
$$= (y - x)(y^2 + xy + x^2)$$

daraus $y^2 + xy + x^2 = 1$

oder $y^2 + xy + x^2 - 1 = 0$

woraus $y = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - x^2 + 1}$

$$= \frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2} \qquad (1)$$

Es mufs also $4 - 3x^2$ ein vollkommenes Quadrat sein, und um die Form von x dafür zu finden setze, damit x positiv wird

$$\sqrt{4 - 3x^2} = x\sqrt{\frac{4}{x^2} - 3} = x\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 3}$$

also $y = \frac{-1 + \sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 3}}{2} \cdot x$

Da $\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 3$ ein vollkommenes Quadrat sein soll, so kann man

$$\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 3 = \left(\frac{2}{x} - a\right)^2$$

setzen, und wenn man die Klammer auflöst und reducirt, so erhält man

$$\frac{4a}{x} - a^2 - 3 = 0$$

woraus $x = \frac{4a}{a^2 + 3} \qquad (2)$

und $y = \frac{2a}{a^2+3}\left[-1 + \sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2 - 3}\right] = \frac{2a}{a^2+3}\left[-1 + \frac{a^2+3}{2a} - a\right]$

oder $y = \pm\frac{-a^2 + 2a + 3}{a^2 + 3} \qquad (3)$

Aus Gleichung 1 für y geht zunächst hervor, dafs x nicht > 1 sein kann, für $x = 1$ wird aber $y = 0$, welches unmöglich ist, folglich mufs $x < 1$ sein. Es ist also

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{4 - 3x^2}}{2}$$

des zweiten Gliedes wegen ebenfalls < 1. Nun wird in dem Ausdruck 3 für y, für $a = 1$ und kleiner als 1 der Zähler gröfser als der Nenner, folglich mufs a eine ganze Zahl sein, und dann kann, wenn y positiv sein soll nur das negative Vorzeichen gelten. Man hat demnach

$$y = \frac{a^2 - 2a - 3}{a^2 + 3} \qquad (4)$$

Zugleich wird in dem Ausdruck 2 für x der Zähler nur dann kleiner als der Nennar, wenn

$$a^2 - 4a + 2 > 0$$

wenn also $a > 2 + \sqrt{2}$

Für $a = 4$ erhält man $x = \frac{16}{19}; y = \frac{5}{19}$

Es ist $\frac{16}{19} - \frac{5}{19} = \frac{11}{19}$

$$\left(\frac{16}{19}\right)^3 - \left(\frac{5}{19}\right)^3 = \frac{3971}{6859} = \frac{11}{19} \cdot \frac{361}{361} = \frac{11}{19}$$

Diopter, ein französisches Wort, sind bei den Mefsinstrumenten, welche ohne Fernrohr eingerichtet sind, die zum Visiren bestimmten Durchsehöffnungen. Sie sind in dem Art. B o u s s o l e Bd. 1, pag. 398 mit Fig. 233 abgebildet. Die O c u l a r d i o p t e r, unmittelbar vor dem Auge, besteht in einer senkrecht geradlinigen sehr engen Spalte; die dieser gegenüberstehende D., die O b j e c t i v d i o p t e r, hat eine breitere Spalte, in deren Mitte ein senkrechter Faden gespannt ist, welcher mit der ersten D. und der Axe des Instruments in einerlei senkrechten Ebene liegt (vergl. auch Alhidade); man findet also die Richtung des in der Ferne befindlichen Punkts, wenn die Diopter so gerichtet werden, dafs dieser Punkt von dem Faden gegen das Auge gedeckt wird.

Dioptrik ist die Lehre von den Erscheinungen, welche mit der Brechung der Lichtstrahlen zusammenhangen. Zu derselben gehören die Art. Ablenkung des Lichtstrahls, achromatisch, astronomisches Fernrohr, astr. Refraction, Brechende Kraft eines Mediums, Brechung der Lichtstrahlen, Brennglas, Brille u. s. w.

Discrete Gröfse s. u. c o l l e c t i v e G r ö f s e.

Distanzpunkt s. u. A u g e n p u n k t.

Divergenz s. u. C o n v e r g e n z.

Dividend ist eine Zahl, welche dividirt werden soll.

Dividiren heifst eine Zahl in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zerlegen. Die Zahl, welche getheilt wird heifst der D i v i d e n d, die vorgeschriebene Anzahl der gleichen Theile der D i v i s o r und die

Gröfse eines jeden dieser gleichen Theile der **Quotient.**

Division ist die vierte einfache Rechnungsart, die letzte der sogenannten 4 Species, wenn man das Wurzelausziehen zu denselben nicht mitzählen will. Sie begreift die Aufgabe: Zwei nach irgend einem System geschriebene Zahlen durch einander zu theilen und die daraus hervorgehende dritte Zahl nach demselben System darzustellen. Z. B. die nach dem dekadischen System geschriebenen Zahlen 8424 und 26 sollen durch einander getheilt werden. Das Exempel gestaltet sich:

```
     | 26
8424 | 324
78
 62
 52
 104
 104
```

Die dritte Zahl 324 der **Quotient** ist entstanden, indem man die Zahl 8424 durch 26 getheilt hat. Man hat sich in der Entstehung dieses Quotienten die Rechnung folgender Art vorzustellen.

```
     | 26
8424 | 300 + 20 + 4
7800
 624
 520
 104
 104
```

Man zerlegt nämlich in Gedanken den Dividend in 8400 + 24. Sagt 26 in 8400 geht 300mal; nun sind $26 \times 300 = 7800$ wegzunehmen, es bleibt von der Zahl noch 624, welche durch 26 noch zu theilen ist, diese wird zerlegt in 620 + 4. Man sagt wieder 26 in 620 geht 20mal; nun sind $26 \times 20 = 520$ von 620 fortzunehmen, bleibt 100, hierzu die noch zum Dividend gehörende 4 hinzugenommen gibt 104 und diese wiederum durch 26 getheilt gibt 4, so dafs die Zahl 26 nach und nach die Zahlen 7800, 520 und 104 also deren gegebene Summe 8424 getheilt hat.

Man nennt daher die einzelnen Dividenden 84 (8400), 62 (620) und 104 die **Partialdividenden**, so wie die Zahlen 3 (300), 2 (20) und 4 die **Partialquotienten.**

2. Die Division kann betrachtet werden als eine wiederholte Subtraction mit einem und demselben Subtrahendus; denn zu dem Quotient $24 : 4 = 6$ gelangt man auch, wenn man die Zahl 4 von der Zahl 24 abzieht, von dem Rest 20 wieder 4 und so fort abzieht bis kein Rest mehr bleibt, und wo sich dann ergiht, dafs das Subtrahiren 6mal geschehen kann und geschehen ist.

Diese Uebereinstimmung der D. mit der Subtraction veranlafst mehrere Rechnenlehrer, die D. von den Species auszuschliefsen wie die Multiplication, welche als eine wiederholte Addition betrachtet werden kann; sie könnte übrigens noch eher deshalb zu den zusammengesetzten Rechnungsarten gezählt werden, weil sie zur Darstellung des Quotienten aus der Reihe von Partialdivisionen der Subtraction sich bedient.

3. Quotient und Divisor haben einerlei Beziehung zum Dividendus: der Quotient ist in dem Dividend so oft enthalten als der Divisor Einheiten enthält und der Divisor ist in dem Dividend so oft enthalten als der Quotient Einheiten enthält. Vertauscht man Divisor mit Quotient so erhält man bei demselben Dividend den einen aus dem anderen.

4. Eine vorzunehmende D. wird angezeigt entweder durch die Bruchform als $\frac{8424}{26}$, wo der Zähler den Dividend, der Nenner den Divisor anzeigt; oder durch ein zwischen beide Zahlen gesetztes Kolon 8424 : 26.

5. Das Exempel $\frac{4335}{25}$ oder 4335 : 25 läfst einen Rest = 10, die Division geht nicht auf.

```
     | 25
4335 | 173
25
183
175
  85
  75
  10
```

Es läfst sich also die Zahl in ihren Einheiten nicht angeben, um wie viel mal die Zahl 4335 gröfser ist als die Zahl 25. Denn jene ist gröfser als 173×25 und kleiner als 174×25.

Mithin bleibt der Quotient $\frac{4335}{25}$ ein **Zahlbegriff** und wird geschrieben $173\frac{10}{25}$. D. h. der Quotient ist = der Zahl 173 + derjenigen Zahl, welche entstehen würde, wenn man den Rest 10 noch durch 25 theilen könnte. Dies würde aber offenbar geschehen können, wenn man sich die Einheit 1 aus 25 gleich grofsen Theilen bestehend denkt, denn alsdann hätte

man unter $\frac{10}{25}$ sich 10 solcher Einheiten zu denken. Und dies geschieht auch: $\frac{1}{25}$ ist die Darstellung einer Einheit, die 25 mal kleiner ist als die Einheit 1. In dieser Beziehung nennt man die Eins (1) die absolute Einheit auch ursprüngliche Einheit, primitive Einheit; die Zahlbegriffe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. relative Einheiten, Brucheinheiten.

5. Dieser Umstand, dafs die D. nicht aufgeht, veranlafst die D. in Decimalstellen fortzusetzen: Man schreibt hinter die Zahl 173 ein Komma und hinter den Rest 10 eine Null, so dafs die Zahl 10 in die Zahl $\frac{100}{10}$ geändert wird, in welcher die Zahl 25 noch $\frac{4}{10}$mal enthalten ist. Der nach dekadischem System geschriebene vollständige Quotient ist nun = 173,4.

Die Praxis der Ausführung einer D. in Decimalstellen und mit Decimalbrüchen in Decimalbrüche, s. den Art. „Decimalbruch“ No. 3; die D. von gemeinen Brüchen durch einander, s. d. Art. „Bruch, No. 7; die D. von Buchstabengröfsen durch einander in dem Art. „Buchstabenrechnung“ D. pag. 438. Vergl. auch den kurzen Art. „Aufheben der Brüche.

Divisionszeichen s. u. Division No. 4.

Divisor s. u. dividiren.

Dodekadik, dodekadisches Zahlensystem, ein zwölftheiliges System, in welches also noch einzelne Ziffern für die Zahlen 10 und 11 gehören, in welchem unsere Zahl 12 die kleinste zweiziffrige Zahl ist und mit 10 bezeichnet wird; 20 würde unsre Zahl 24 sein, 29 unsere Zahl 33; 100 unsre 144, 1000 unsre 1728. Die dodekadische geschriebene Zahl

1249 ist dekadisch

$$= 12^3 + 2 \times 12^2 + 4 \times 12 + 9 = 2073$$

das System ist natürlich nicht gebräuchlich.

Dodekaeder ist einer der 5 vieleckigen regulären Körper oder Polyeder, welche zur Untersuchung ihrer Eigenschaften einen Artikel in diesem Wörterbuch erhalten werden. Das D. wird von 12 regelmäfsigen Fünfecken eingeschlossen, es hat 30 gleich grofse Kanten, 20 dreiflächige Ecken mit 60 ebenen Winkeln zu 108°.

Bezeichnet man in einem regelmäfsigen Polyeder mit

m die Anzahl der Ebenen die zu jeder Ecke gehören,

n die Anzahl der zu jeder Grenzfläche gehörenden Kanten,

N die Anzahl der Grenzflächen des Körpers,

so ist hier $m = 3$; $n = 5$; $N = 12$.

Bezeichnet man nun den Neigungswinkel je zweier zusammen treffenden Grenzebenen mit α, so ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

und $\alpha = 116^\circ\, 33'\, 54''$

Bezeichnet man die Länge einer Kante mit k, so ist der Halbmesser der um das D. zu beschreibenden Kugel

$$R = \tfrac{1}{2}k \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{180^\circ}{m} = \tfrac{1}{4}k\sqrt{3(6+2\sqrt{5})} = 1{,}401\ 2585 \times k$$

Bezeichnet r den Halbmesser der in dem D. zu beschreibenden Kugel, so ist

$$r = \tfrac{1}{2}k \cdot tg\frac{\alpha}{2}\, cot\frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{4}k \cdot \sqrt{\tfrac{1}{5}(50+22\sqrt{5})} = 1{,}114\ 6381 \times k$$

$$R = r \cdot \frac{tg\frac{180^\circ}{m}}{cot\frac{180^\circ}{n}} = r\sqrt{3(5-2\sqrt{5})} \qquad = 1{,}258\ 4086 \times r$$

$$r = R \cdot \frac{cot\frac{180^\circ}{n}}{tg\frac{180^\circ}{m}} = \tfrac{1}{3}R\sqrt{\tfrac{3}{5}(5+2\sqrt{5})} \qquad = 0{,}794\ 6544 \times R$$

$$k = 2R \cdot cot\frac{\alpha}{2} \cdot cot\frac{180^\circ}{m} = \tfrac{1}{3}R\sqrt{6(3-\sqrt{5})} \qquad = 0{,}713\ 6441 \times R$$

$$k = 2r \cdot cot\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{180^\circ}{n} = r\sqrt{50-22\sqrt{5}} \qquad = 0{,}778\ 7840 \times r$$

Bezeichnet J^2 den Inhalt einer Begrenzungsebene, so ist

$$J^2 = \tfrac{1}{4} nk^2 \cdot cot\,\frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{4} k^2 \sqrt{5\,(5+2\sqrt{2})} \qquad = 1{,}720\,4773 \times k^2$$

$$J^2 = nR^2 \cdot cot^2\,\frac{\alpha}{2} \cdot cot\,\frac{180^\circ}{n} \cdot cot^2\,\frac{180^\circ}{m} = \tfrac{1}{6} R^2 \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} \qquad = 0{,}876\,218 \times R^2$$

$$J^2 = nr^2 \cdot cot^2\,\tfrac{1}{2} \cdot tg\,\frac{180^\circ}{n} = \tfrac{5}{2}\, r^2 \sqrt{2\,(65-29\sqrt{5})} \qquad = 1{,}245\,1340 \times r^2$$

Bezeichnet J^3 den Inhalt des Polyeders, so ist

$$J^3 = \tfrac{1}{12} nNk^3 \cdot tg\,\frac{\alpha}{2} \cdot cot^3\,\frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{4} k^3 (15 + 7\sqrt{5}) \qquad = 7{,}663\,1189 \times k^3$$

$$J^3 = \tfrac{1}{3} nNR^3 \cdot cot^3\,\frac{\alpha}{2} \cdot cot^3\,\frac{180^\circ}{n} \cdot cot^3\,\frac{180^\circ}{m} = \tfrac{2}{9} R^3 \sqrt{30\,(3+\sqrt{5})} \qquad = 2{,}785\,164 \times R^3$$

$$J^3 = \tfrac{1}{3} nNr^3 \cdot cot^2\,\frac{\alpha}{2} \cdot tg\,\frac{180^\circ}{n} = 10\, r^3 \sqrt{2\,(65-29\sqrt{5})} \qquad = 4{,}980\,5360 \times r^3$$

Dodekaeder (Krystallographie), Zwölfflächner, ist ein Körper mit 12 Flächen, die aber nicht wie das D. in der Stereometrie aus regulären Fünfecken bestehen, sondern aus 12 Rhomben. Daher heifst es auch Rhombendodekaeder, auch Granateeder.

Die einschliefsenden Rhomben haben 24 gleiche Kanten und 14 Ecken, deren Umfangswinkel sind 109° 28′ und 70° 32′. Das D. stellt sich auf wie der Würfel: Ist *EFGH* die Grundfläche, so ist die derselben ∦ gegenüber liegende Fläche die Raute *ABCD*; rechtwinklig mit beiden Flächen stehen die beiden ∦ mit einander befindlichen Flächen *ALEM* und *DKGJ*, so dafs auch diese beiden als

Fig. 564.

Grundflächen angenommen werden können, wo dann jene dieselbe Lage zu diesen, wie diese zu jenen beiden Flächen haben.

Es ist also deren Lage mit der der Würfelflächen ganz dieselbe, nur ist der Unterschied, dafs beim Würfel die Flächen mit den Kanten sich ansetzen, wogegen beim D. die Ecken der Flächen gemeinschaftlich sind, nämlich die 4 Ecken *D*, *G*, *A* und *E*.

Zwischen diesen 4 Rauten gruppiren sich die 8 übrigen Rauten der Art symmetrisch, dafs deren Kanten unter einander gemeinschaftlich sind und dafs je 4 der Flächen in einer gemeinschaftlichen Ecke zusammen treffen, also beide Paare in den beiden Ecken *O* und *N*. Die genannten 6 Ecken sind vierflächig und werden durch die längeren Diagonalen der Rhomben mit einander verbunden; die übrigen 8 Ecken sind dreiflächig.

Wenn man den Krystall mit der Ecke *G* sich aufgestellt denkt, so dafs *GA* die lothrechte Hauptaxe ist, so bildet die Ebene, in welcher die 4 Diagonalen *DO*, *OE*, *EN*, *ND* die Basis des Krystalls, die 4 Diagonalen liegen wie 4 Seiten des Octaeders und die 4 Ecken *D*, *O*, *E*, *N* nebst den beiden *G* und *A* liegen wie die 6 Ecken des Octaeders; daher heifsen auch die 6 vierflächigen Ecken des D. dessen Octaederecken.

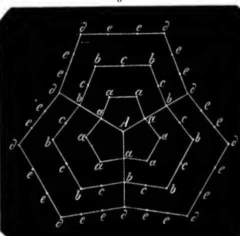
Bleibt man bei derselben Aufstellung des Krystalls, verbindet die 4 dreiflächige Ecken *B*, *C*, *L*, *M* und die anderen 4 derselben *J*, *K*, *H*, *F* durch die kürzeren Diagonalen, so liegen jede 4 dieser Diagonalen in zwei Ebenen die einander ∦ und mit der Axe *AG* rechtwinklig sind; und da nun diese 8 Diagonalen zwei Quadrate bilden, so liegen die 8 Ecken wie die 8 Ecken in dem Hexaeder; deshalb nennt man die 8 dreiflächigen Ecken des D. dessen Hexaederecken.

Dodekaedralzahl ist diejenige der 5 Polyedralzahlen, deren zu Grunde liegendes Polyeder das Dodekaeder ist. Die Zahlen sind nämlich die Anzahl der Punkte, welche die Ecken und in gleichbleibenden Entfernungen von einander die Kanten aufnehmen, wenn man die Kanten

des Körpers 1, 2, 3 ... *n* mal vergröfsert und zu diesen Kanten jeder Gröfse die zugehörigen Dodekaeder construirt.

Es sei *A* eine der 20 Ecken mit den in ihr zusammentreffenden 3 fünfeckigen Begrenzungsebenen; *Aa*, *Aa*, *Aa* seien die 3 Kanten von der Länge = 1, die zu diesen gehörenden Fünfecke sind mit *AaaaaA* bezeichnet. Da nun das Dodekaeder 20 Ecken hat, so befinden sich auf dessen Oberfläche 20 Punkte und 20 ist die Grundzahl der Dodekaedralzahlen. Da zugleich mit beliebiger Abnahme der Kanten *Aa* von *A* aus das Dodekaeder in dem Punkt *A* verschwindet, *A* nur einen Punkt gibt, so ist 1 die erste und 20 die zweite D.

Fig. 565.



Verlängert man nun die drei Kanten *Aa* um ihre eigene Länge *Aa* zu den 3 Kanten *Ab*, *Ab*, *Ab*, so entstehen die zugehörigen 3 Fünfecke, welche mit *AbbbbA* bezeichnet sind. Von den bis jetzt gezeichneten 6 Fünfecken liegen immer je 2 und 2 in einer Ebene; construirt man aber die zu *Aa* und die zu *Ab* gehörenden beiden Polyeder, so haben dieselben nur die einzige Ecke *A* gemein, und die beiden Körper nehmen eine Lage zu einander an, wie Fig. 556 die beiden Zehnecke *Aa..aA* und *Ab...bA*: der eine Körper steckt in dem andern und beide sind an den 3 kleinen Oberflächen *AbbbbA* mit einander verbunden.

Es kommt nun darauf an zu ermitteln, wie viele Punkte hinzugekommen sind.

Aufser der Ecke *A* sind 19 neue Ecken gebildet worden, mithin sind hinzugekommen 19 Eckpunkte; für die gleich grofs bleibende gegenseitige Entfernung der Punkte müssen alle Kanten wie die 3 Kanten *Ab* noch einen Punkt in der Mitte erhalten, und da das Dodekaeder 30 Kanten hat, so sind noch 27 Kantenpunkte hinzugekommen. Nun müssen aber sämmtliche Begrenzungsflächen 2 Punkte *a* in deren Mitte erhalten, bei 3 Flächen findet dies schon statt. Das Dodekaeder hat 12 Begrenzungsflächen, folglich kommen hinzu $9 \times 2 = 18$ Flächenpunkte. In Summa kommen hinzu $19 + 27 + 18 = 64$ Punkte und die dritte D. ist $= 20 + 64 = 84$.

Verlängert man wiederum die 3 Kanten *Ab* um die Länge $Aa = 1$ zu den 3 Kanten *Ad*, *Ad*, *Ad*, so entstehen die 3 zugehörigen Fünfecke, welche mit *AddddA* bezeichnet sind. Von den bis jetzt gezeichneten 9 Fünfecken liegen immer je 3 und 3 in derselben Ebene, die zugehörigen Polyeder haben die Lage wie Fig. 556 die 3 Zehnecke zu einander, ein Körper steckt in dem andern und alle 3 haben ihren einzigen Zusammenhang mit den 3 Fünfecksflächen *AddddA*. Für die mit dem dritten Dodekaeder hinzugekommenen Punkte hat man Folgendes.

Es sind 19 neue Ecken mit 19 Punkten hinzugekommen; die neuen Kanten erhalten wie *Ad* zwei Punkte in der Mitte, folglich zusammen $27 \times 2 = 54$ Kantenpunkte; die neuen Flächen erhalten wie die 3 gezeichneten Flächen, 2 Punkte *a*, 2 Punkte *b* und 3 Punkte *c*, zusammen 7 Punkte, also überhaupt $9 \times 7 = 63$ Punkte. Die Anzahl der hinzugekommenen Punkte ist demnach $19 + 54 + 63 = 136$ und die 4te D. ist $= 84 + 136 = 220$.

Das Gesetz für die Bildung der D. ergibt sich also aus folgender Reihe der immer neu hinzukommenden Zahlen, d. h. der Differenzen je zweier auf einander folgenden Dodekaedralzahlen:

1. Differenz $= 1$
2. " " $= 19$
3. " " $= 19 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 = 64$
4. " " $= 19 + 2 \cdot 27 + 7 \cdot 9 = 136$
5. Differenz $= 19 + 3 \cdot 27 + 15 \cdot 9 = 235$
6. " " $= 19 + 4 \cdot 27 + 26 \cdot 9 = 361$

. . . .

$$n.\ \text{Differenz} = 19 + (n-2)\,27 + \frac{n-2}{2}(3n-5)\,9 = \frac{9n}{2}(3n-5) + 10$$

Diese Reihe ist eine Reihe der drittan Ordnung, die Dodekaedralzahlen bilden also eine Reihe der 4ten Ordnung und man hat die Darstellung

3. Differenzenreiha	"	"	"	27	27....
2. " "	"	"	45	72	99....
1. " "	"	19	64	136	235....
Dodekaedralzahl	1	20	84	210	455....

$$\text{dia } n\text{te D. ist} = 1 + \frac{n-1}{1} \cdot 19 + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} 45 + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 27$$

$$= \frac{n}{2}(9n^2 - 9n + 2)$$

Dodekagonalzahl ist diejenige Polygonalzahl, deren zu Grunde liegendes Polygon das Zwölfeck ist. Es verhält sich mit diesen Zahlen wie mit den Dekagonalzahlen, und ihre Entstehung ist wie Fig. 556 wenn man Zwölfecke statt der Zehnecke construirt.

Die 1. D. ist $= 1$
" 2. " " $= 1 + 11 = 12$
die 3. D. ist $= 12 + 11 + 1 \cdot 10 = 33$
" 4. " " $= 33 + 11 + 2 \cdot 10 = 64$
" 5. " " $= 64 + 11 + 3 \cdot 10 = 105$

. . . .

Die D. zahlen bilden eine Reihe der zweiten Ordnung; das erste Glied der ersten Differenzenreihe ist $= 1$, die constante Differenz deren Glieder ist 10. Man hat also die Darstellung

Differenzen	10	10	10	10	10....	10
1. Differenzenreihe	1	11	21	31	41	$(10n - 9)$
Dodekagonalzahlen	1	12	33	64	105	$n(5n - 4)$

Die Summe der ersten n D. zahlen ist $\frac{1}{2}n(n+1)(10n-7)$

Doppelbruch ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner aus Brüchen bestehen, s. Bruch No. 2.

Doppelpunkt ist ein Punkt, in welchem eine Curve einen Knoten oder eine Spitze bildet, den ersten Fall zeigt Fig. 523 die untere Konchoide, den zweiten Fall Fig. 521 die Cissoide. Der Punkt K Fig. 545 und 546 ist kein Doppelpunkt, weil derselbe von den beiden verkürzten Cycloiden also von zweien Curven gebildet wird.

Doppelsterne. Hierunter versteht man 2 Fixsterne, von welchen der eine um den andern sich herumbewegt wie ein Planet um unsere Sonne oder wie ein Trabant um einen Planet, z. B. der Mond um unsre Erde, indem beide Fixsterne wie diese in unmittelbaren attractorischen Verhältnissen mit einander sich befinden. Da bei der so sehr grofsen Entfernung dieser Sterne von unsrem Sonnensystem es ganz undenkbar ist, dafs auch nur einer derselben, wenn er nicht selbstständig leuchtete von uns gesehen werden könnte, so sind beide Sterne Sonnen und die D. bilden also ein Doppelsonnensystem, die fest stehende Sonne ist die Centralsonne, der Centralstern, die herumkreisende Sonne der Fixterntrabant, der Begleitstern.

Die Anzahl dieser Doppelsonnensysteme ist nicht gering, Herschel allein hat etwa 450 derselben entdeckt, und man kennt gegenwärtig über 2800 Doppelsterne, von denen aber auch viele wegen ihrer grofsen scheinbaren Nähe an einander für Doppelsterne gehalten werden mögen, ohne dafs sie es wirklich sind, was zu entscheiden noch Jahrhunderte langen Beobachtungen vorbehalten bleibt, weil die Bewegung der Begleitsterne oft erst innerhalb sehr langer Zeit wahrnehmbar wird. Auch mehrfache als Doppelsysteme, selbst siebenfache sind entdeckt worden, so dafs bei diesen statt dar an sich dunklen Planeten unsres Sonnensystems, Sonnen es sind, die um eine gröfsere Centralsonne kreisen, und von denen jede

einzelne Begleitsonne wiederum ein Sonnensystem ähnlich dem unsrigen bildet (vergl. die hypothetische Bemerkungen Bd. 1, pag. 32, links, pag. 168 No. 7).

Von mehreren dieser D. hat man bereits die Bewegungsgesetze und deren Bahnen erforscht. Am vollständigsten von dem Doppelstern ϱ des grofsen Bären, in welchem eine schwache bläuliche Sonne, die als Stern 5ter Gröfse erscheint, um eine weifse Centralsonne, ein Stern 4ter Gröfse, sich bewegt und zwar mit einer Schnelligkeit, dafs sie ihren Lauf in 58 Jahren vollendet.

Doppelt gerade ganze Zahl eine nicht mehr gebräuchliche Bezeichnung für ein ganzes Vielfaches der Zahl 4.

Doppelverhältnifs ist das Produkt zweier gleichen Verhältnisse. Ist das einfache Verhältnifs $a : b$ so ist das D. $= a^2 : b^2$

Drachenkopf ein alter Name für den aufsteigenden Knoten des Mondes, so wie der absteigende Knoten desselben Drachenschwanz genannt wird. Die Namen rühren daher, dafs wegen der Finsternisse, welche während und in der Nähe des Durchgangs des Mondes durch die Ekliptik eintreten, im Alterthum der Glaube war, dafs der Mond hier mit einem Drachen in Kampf sich befinde.

Drachenmonat ist die Zeit, in welcher der Mond von seinem aufsteigenden oder absteigenden Knoten zum zweitenmal in denselben Knoten wieder eintritt. Dieser Monat ist von allen astronomischen Monaten der kürzeste, weil die Knoten mit einer Schnelligkeit von 19° 19' in einem Jahre, also von etwa $1\frac{1}{2}°$ in einem Monat den Zeichen entgegen einen Rückgang machen. Der D beträgt 27 Tage 5 Stunden 6 Minuten und 56 Secunden (vergl. den vor. Art.).

Drachenschwanz s. u. Drachenkopf.

Dreieck ist eine Fläche, welche von 3 Linien, Seiten genannt, eingeschlossen ist. Man betrachtet nur D., welche auf Ebenen oder auf Kugeloberflächen verzeichnet sind; erstere sind die ebenen D., letztere die sphärischen oder Kugeldreiecke. Unter den ebenen D. betrachtet man wieder nur die geradlinigen D., krummlinige D. kommen nicht vor, die gemischtlinigen D, welche aus zwei Radien und einem Kreisbogen gebildet werden, heifsen Kreisausschnitte oder Sectoren.

Dreiecke, ebene. Die Lehre von den Dreiecken bildet die Grundlage zu allen Erkenntnissen der Geometrie. Es liegt dies darin, dafs erstens das Dreleck die Figur ist, welche die geringst mögliche Anzahl von Seiten hat, dafs also jede Figur von mehreren Seiten in Dreiecke zerlegt werden kann; dann aber weil das D eine nicht zu ändernde Gestalt annimmt, wenn die Seiten dieselben bleiben, in welcher Ordnung dieselben auch an einander gesetzt werden, während schon Vierecke verschoben und in unzählige andere Gestalten abgeändert werden können, wenn auch ihre Seiten in derselben Ordnung verbleiben.

Von der Unverrückbarkeit der D. überzeugt man sich, wenn man in einem Kreise aus den Endpunkten eines Durchmessers nach einem beliebigen Punkt der Peripherie, der ungleich weit von beiden Endpunkten entfernt ist, zwei gerade Linien zieht, und somit ein D. bildet. Man kann nun durch Verlegung beider Bogen vier Dreiecke zeichnen, die alle einander vollkommen gleich sind und so aufeinander gelegt werden können, dafs sie sich decken.

Es ist also das erste Erfordernifs, die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen Dreiecke sich einander decken können, ohne dafs die Gleichheit aller einzelnen Stücke, die der 3 Seiten und der 3 Winkel nachgewiesen werden mufs, und diese Bedingungen ergeben die 4 Sätze von der Congruenz der Dreiecke (s. d. pag. 41 bis 44 mit Fig. 309 bis 314).

2. Man kann die Peripherie eines Kreises in 3 gleiche Theile theilen, verbindet man diese Theilpunkte durch gerade Linien mit einander, so erhält man ein D. von 3 gleichen Seiten, was sich durch den ersten Satz von der Congruenz der D. (2 Seiten und der eingeschlossene $\angle =$) erweisen läfst, wenn man von dem Mittelpunkt des Kreises nach den Endpunkten des D. gerade Linien zieht, womit 3 congruente D. entstehen. Ein D. kann also 3 gleiche Seiten haben und es heifst ein solches ein gleichseitiges Dreieck. Nimmt man in der Peripherie nur zwei Bogen einander gleich, so entsteht ein D. mit zwei gleichen Seiten und ein solches heifst ein gleichschenkliges Dreieck; die beiden gleichen Seiten heifsen die Schenkel, die dritte heifst die Grundlinie des D., der Scheitelpunkt zwischen beiden Schenkeln heifst die Spitze, der Winkel daselbst der Winkel an der Spitze, die beiden anderen Winkel die Winkel an der Grundlinie. Dreiecke, in welchen keine

Seite einer anderen gleich ist heifsen ungleichseitige Dreiecke.

3. Verlängert man eine Seite *BD* eines D. so entsteht aufserhalb des D. ein $\angle ADE$. Dieser heifst Aufsenwinkel des D.

Fig. 566.



Der $\angle ADB$ heifst sein innerer anliegender Winkel, die beiden $\angle ABD$ und *BAD* heifsen seine inneren ihm gegenüberliegende Winkel.

4. Unter *AB* kann man sich eine unzählige Menge von Linien vorstellen, die auf einander liegen; nimmt man eine derselben und bewegt sie mit gleichbleibender Lage nach dem Punkt *D*, und ist diese Linie *DF*, so haben beide Linien *AB* und *DF* einerlei Lage gegen die Linie *BE* behalten, d. h. $\angle ABD$ ist $= \angle FDE$. Beide Linien haben aber auch einerlei Lage gegen die Linie *AD* behalten.

D. h. $\angle BAD = \angle GDH$
welcher entsteht, wenn man die Linien *AD* und *FD* verlängert.

Da nun $\angle GDH = ADF$ (als Scheitelwinkel), so ist

$\angle ABD + \angle BAD = \angle FDE + \angle ADF = \angle ADE$
Der Aufsenwinkel ist also gleich seinen beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkeln.

5. Der Aufsenwinkel *ADE* ist der Nebenwinkel des ihm anliegenden inneren Winkels *ADB*, beide zusammen sind also zweien rechten Winkeln gleich, folglich ist auch die Summe der drei inneren Winkel eines Dreiecks gleich zweien rechten Winkeln.

6. Ein D. kann also nicht mehr als einen rechten Winkel erhalten, und ein D. mit einem rechten Winkel heifst rechtwinkliges Dreieck; die beiden den rechten Winkel einschliefsenden Seiten heifsen die Katheten (*κάθετος* das Bleiloth), die ihm gegenüberliegende Seite heifst die Hypotenuse (*ὑποτείνω*, darunter spannen).

Ein D. kann nur einen stumpfen Winkel haben und ein D. mit einem stumpfen Winkel heifst stumpfwinkliges Dreieck.

7. Legt man das bei *F* rechtwinklige Dreieck *ABF* um *AF* bis es wieder in dieselbe Ebene fällt, so ist das daraus entstandene zweite $\triangle AFE \cong \triangle AFB$
da nun $\angle AFB = \angle AFE = R$
so ist *BFE* eine gerade Linie, weil 2

Fig. 567.



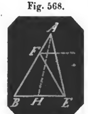
rechte $\angle$ mit gemeinschaftlichem Scheitelpunkt und einem gemeinschaftlichen Schenkel 2 Nebenwinkel bilden; folglich ist *ABE* ein $\triangle$, und da $AB = AE$ ist, ein gleichschenkliges $\triangle$. Da nun $\angle B = \angle E$, so sind in einem gleichschenkligen D. die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Hieraus folgt unmittelbar, dafs in einem gleichschenkligen D. ein Loth aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt. Ferner dafs in jedem gleichseitigen $\triangle$ sämmtliche 3 Winkel einander gleich sind.

8. In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite auch der gröfsere Winkel gegenüber. Denn ist $AB > BE$, so nimm $BF = BE$, ziehe *EF* so ist $\triangle BFE$ ein gleichschenkliges $\triangle$;

daher ist $\angle BFE = \angle BEF$ nach No. 7
$\angle BFE > \angle BAE$ nach No. 4
also auch $\angle BEF > \angle BAE$
folglich $\angle BEA > \angle BAE$

Fig. 568.



Indirect wird nun erwiesen, dafs wenn $\angle AEB > \angle BAE$, auch $AB > BE$. Oder in jedem D. liegt dem gröfseren Winkel auch die gröfsere Seite gegenüber.

9. **In jedem D. sind zwei Seiten zusammengenommen gröfser als die dritte.** Denn ist das $\triangle AFE$ gegeben, sind AF und EF die beiden kleineren Seiten, so verlängere AF bis B, dafs $FB = FE$, ziehe BE

so ist $\angle FEB = \angle FBE$ nach No. 7
also $\angle AEB > \angle ABE$
folglich $AB > AE$ nach No. 8
oder $AF + EF > AE$

10. Fällt man aus dem Eckpunkt eines D. ein Loth AH auf die gegenüberliegende Seite, so heifst das Loth AH die **Höhe des Dreiecks** in Beziehung auf die Seite BE, welche dann die **Grundlinie des Dreiecks** genannt wird.

11. Da jedes Parallelogramm von einer Diagonale in 2 congruente D. getheilt wird und Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen einander gleich sind, so ist der Flächeninhalt eines D. gleich dem halben Flächeninhalt eines ⧣ wenn beide einerlei oder gleiche Grundlinien und Höhen haben, und folglich sind auch Dreiecke von einerlei oder gleichen Grundlinien und Höhen einander gleich.

Hieraus ergeben sich noch folgende Sätze:

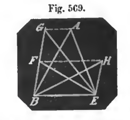
A. Jedes Dreieck wird durch eine gerade Linie aus einer Ecke nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite gehälftet.

B. Theilt man eine Seite eines D. in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und zieht aus der gegenüberliegenden Ecke nach den Theilpunkten grade Linien, so wird auch das D. in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt.

C. Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien. Denn es sei das Verhältnifs der Grundlinien $= n : m$, so kann man die eine Grundlinie in n, die andere in m gleiche Theile theilen und aus den gegenüberliegenden Ecken nach den Theilpunkten grade Linien ziehen. In dem einen D. hat man dann n, in dem anderen m Dreiecke, die alle einander gleich sind.

D. Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. Denn wenn man beide Dreiecke mit ihren gleichen Grundlinien auf einander legt, dann hat man, wie Fig. 569 die Dreiecke ABE und HBE, deren gemeinschaftliche Grundlinie BE. Errichtet man nun in B auf BE eine Normale BG, zieht $AG \parallel BE$ und die Linie GE so ist $\triangle ABE = \triangle GBE$, weil beide Dreiecke einerlei Grundlinie und Höhe haben. Fällt nun die Spitze H des zweiten Dreiecks innerhalb der mit BE parallelen Linie FH, so ist dieses zweite D. gleich grofs mit $\triangle BEF$. Nun kann man die auf BG normale BE als die beiden Dreiecken gemeinschaftliche Höhe und deren Seiten BG und BF als deren Grundlinien betrachten, wo dann die beiden D. wie diese Grundlinien also wie ihre ursprünglichen Höhen sich verhalten.

Fig. 569.



E. Das $\triangle A$ habe die Grundlinie a, die Höhe h; das $\triangle B$ die Grundlinie a; die Höhe h'; das $\triangle C$ die Grundlinie a' die Höhe h', so ist:

$$\triangle A : \triangle B = h : h'$$
$$\triangle B : \triangle C = a : a'$$

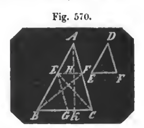
folglich $\triangle A : \triangle C = ah : a'h'$

d. h. Zwei Dreiecke verhalten sich wie die Producte aus Grundlinie in Höhe.

12. Dreiecke, die in solche Lage gebracht werden können, dafs jede der Seiten des einen D. einer Seite des anderen ∥ läuft, heifsen **ähnliche Dreiecke**. Diese Dreiecke können mit einer Ecke so aufeinander gelegt werden, dafs zwei Schenkel in einander fallen, und die dritten Seiten mit einander ∥ laufen, denn die parallelen Seiten gegenüberliegenden Winkel sind einander gleich. Die als parallel zusammengehörigen Seiten, oder die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen, heifsen **homologe Seiten**.

Es sei das $\triangle DEF$ so auf $\triangle ABC$ gelegt, dafs $EF \parallel BC$ ist. Zieht man die Linien CE und BF, so hat man

Fig. 570.



$$\triangle CEF = \triangle BEF$$

hierzu $\triangle AEF = \triangle AEF$

gibt $\triangle ACE = \triangle ABF$

Nun ist $\triangle ACE : \triangle AFE = AC : AF$

$$\triangle ABF : \triangle AEF = AB : AE$$

hieraus $AC : AF = AB : AE$ (1)

also auch $AF : AC - AF = AE : AB - AE$

oder $AF : CF = AE : BE$ (2)

desgleichen $AC : CF = AE : BE$ (3)

Zieht man $EG \mp AC$, so ist eben so:

$$AE : AB = CG : BC$$

oder $AE : AB = EF : BC$ (4)

auch $AF : AC = EF : BC$ (5)

oder in einem Satz ausgedrückt

$$AE : AF : EF = AB : AC : BC$$

d. h. **In ähnlichen Dreiecken stehen die homologen Seiten mit einander in Proportion.**

13. Denkt man sich eine Höhe von der gemeinschaftlichen Spitze auf die Grundlinie BC gefällt, so theilt diese beide Dreiecke wieder in zwei ähnliche Dreiecke, die Höhen werden zu Seiten und man hat dieselben Proportionen als:

$$AE : AB = AH : AK \quad (6)$$
$$EF : BC = AH : AK$$

u. s. w.

Nun ist nach No. 11:

$\triangle AEF : \triangle ABC = EF \cdot AH : BC \cdot AK$

hierzu die letzte Proportion gibt

$\triangle AEF : \triangle ABC = EF^2 : BC^2 = AH^2 : AK^2$

d. h. **Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder wie die Quadrate homologer Höhen.**

14. Wie die Sätze von der Congruenz der Dreiecke, so lassen sich auch aus dem Vorigen folgende Sätze für die Aehnlichkeit der Dreiecke und zwar sehr leicht ableiten.

1. Dreiecke sind $\sim$, wenn sie 2 gleiche Winkel haben.

2. Wenn sie einen gleichen Winkel haben und die diesen Winkel einschließenden Seiten in Proportion stehen.

3. Wenn sie alle 3 Seiten proportional haben.

4. Wenn 2 Paar Seiten in Proportion stehen, von den diesen Seiten anliegenden Winkeln ein Paar gleich ist und das andre Paar zu 2 Rechten sich nicht ergänzt.

Dieser 4te Satz ist analog mit dem 4ten Satz von der Congruenz der D. pag. 44. Es seien dort die beiden Dreiecke ACB und DEF einander $\sim$ deshalb weil:

$$AC : AB = DF : DE$$
$$\angle ABC = \angle DEF$$

und weil 2 rechte Winkel entweder kleiner oder größer sind als

$$\angle ACB + \angle DFE$$

so ist diese letzte Bedingung deshalb wesentlich, weil, wenn man $AG = AC$ macht, ein $\triangle AGB$ entsteht, in welchem nun

$$AG : AB = DF : DE$$
$$\angle ABG = \angle DEF$$

Allein da $\angle AGC = \angle ACB = \angle DFE$

und $\angle AGC + \angle AGB = 2R$

so ist $\angle AGB + \angle DFE = 2R$

die beiden Dreiecke AGB und DFE sind also nicht $\sim$, ungeachtet die ersten beiden Bedingungen des Satzes erfüllt werden.

Nach No. 8 liegt der kleineren Seite immer der kleinere Winkel gegenüber; man kann daher aus dem 4ten Satz auch folgenden ableiten:

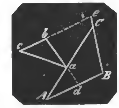
Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten proportional und die den größeren von beiden gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.

Denn alsdann liegen die Winkel, welche nach dem Satz zu 2 Rechten sich nicht ergänzen sollen, den kleineren Seiten in den Dreiecken gegenüber, sind also beide spitz und ergänzen sich nicht zu 2 Rechten. Liegt aber der gleiche Winkel der kleineren Seite gegenüber, so kann von den beiden den größeren Seiten gegenüberliegenden Winkeln der eine stumpf der andere spitz sein und beide können sich zu 2 rechten Winkeln ergänzen.

Dieser Satz stimmt nun ganz mit Satz 4 von der Congruenz der Dreiecke, er ist aber nicht so allgemein als Satz 4 von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

15. Aus dem ersten Satz über die Aehnlichkeit der Dreiecke oder überhaupt aus deren Eigenschaft, daſs ihre 3 Winkel gegenseitig einander gleich sind, entspringt noch ein Satz über dieselbe, der häufig Anwendung findet, nämlich:

Fig. 571.



Dreiecke sind ähnlich, wenn sich die Seiten derselben oder ihre Verlängerungen gegenseitig unter gleichen Winkeln

schneiden, die nach einerlei Richtung gemessen werden

Die beiden Dreiecke abc nnd ABC sind also dann einander ∞, wenn $\angle caA = \angle bdA = \angle ceB$.

Denn es ist

$$\angle Cab + \angle bac + \angle caA = \angle Aad + \angle aAd + \angle adA = 2R$$

Nnn ist

$$\begin{aligned} Cab &= Aad \\ \angle caA &= \angle adA \\ \hline \text{folglich} \quad \angle bac &= \angle aAd \end{aligned}$$

Eben so wird die Gleichheit der $\angle b$ nnd B, c und C bewiesen.

16. Zwei Dreiecke, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Prodncte der diesen Winkel einschliefsenden Seiten.

Denn zieht man in Fig. 572 die Hülfslinie CD so hat man

Fig. 572.

$$\triangle ADC : \triangle ABC = AD : AB$$
$$\triangle ADE : \triangle ADC = AE : AC$$

daher $\triangle ADE : \triangle ABC = AD \cdot AE : AB \cdot AC$

17. Wenn $\angle ADC = \angle EDC$ so hat man nach No. 16

$$\triangle DAC : \triangle DEC = AD \cdot CD : ED \cdot CD$$
$$= AD : ED$$

aber auch

$$\triangle DAC : \triangle DEC = AC : EC$$

daher $AD : ED = AC : EC$

d. h. Wenn ein Winkel eines Dreiecks halbirt wird, so schneidet die Halbirungslinie auf der gegenüberliegenden Seite zwei Stücke ab, die sich verhalten wie die diesen Stücken anliegenden Seiten.

18. Zieht man dnrch einen innerhalb eines Dreiecks beliebig liegenden Punkt C von den Endpunkten nach den gegenüberliegenden Seiten gerade Linien, so sind die Producte der drei von den Seiten abgeachnittenen links liegenden Stücke a, b, c gleich dem Product der drei rechts liegenden Stücke α, β, γ.

Fig. 573.

Denn es ist $\triangle BAD : \triangle GAD = a : \alpha$
$\triangle BCD : \triangle GCD = a : \alpha$

folglich

$\triangle BAD - \triangle BCD : \triangle GAD - \triangle GCD = a : \alpha$

oder $\triangle ACB : \triangle ACG = a : \alpha$

ebenso $\triangle BCG : \triangle BCA = b : \beta$

und $\triangle ACG : \triangle BCG = c : \gamma$

folglich $1 : 1 = a \cdot b \cdot c : \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

oder $a \cdot b \cdot c = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

19. Indirect läfst sich nun beweisen, dafs wenn auf den Seiten eines Dreiecks Abschnitte a, α; b, β; c, γ genommen werden, so dafs $a \cdot b \cdot c = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, die graden Verbindnngslinien der Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpnnkten in einem Punkt sich schneiden.

Es folgt hieraus unmittelbar, dafs die graden Verbindnngslinien zwischen den Eckpnnkten und den Mitten der gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks in einem Punkt sich schneiden.

20. Die Halbirnngslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden aich in einem Pnnkt. Denn sind Fig. 573 AD, BE, GF diese Halbirungslinien, so hat man nach No. 17

$$AB : AG = a : \alpha$$
$$BG : AB = b : \beta$$
$$AG : BG = c : \gamma$$

folglich $1 : 1 = a \cdot b \cdot c : \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

Man erhält noch folgendo Gesetze:

Es ist $\triangle ABD = \triangle AGD$

auch $\triangle CBD = \triangle CGD$

hieraus $\triangle ACB = \triangle ACG$

folglich auch

$$\triangle ACB = \triangle ACG$$
$$= \triangle BCG = \tfrac{1}{3} \triangle ABG$$

Da nun

$$\triangle ABG : \triangle CBG = AD : CD$$

so ist $CD = \frac{1}{3} AD$

eben so $CE = \frac{1}{3} BE$

und $CF = \frac{1}{3} GF$

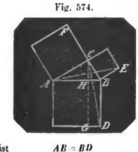
21. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Denn stellen Fig. 573 die Linien AD, BE, GF die

drei Höhen ver, so haben die beiden Dreiecke *ABD* und *GBF* den $\angle B$ gemeinschaftlich und die Winkel bei *D* und *F* sind rechte, folglich sind beide *D* einander ∽.

Daher $AB:BG = \alpha:\gamma$
aus demselben Grunde
$BG:AG = b:\alpha$
und $AG:AB = c:\beta$
daher $1 : 1 = a\cdot b\cdot c : \alpha\cdot\beta\cdot\gamma$

22. Es sei $\triangle ABC$ bei *C* rechtwinklig; zeichnet man über den 3 Seiten die Quadrate *AD*, *AF*, *CE*, fällt aus dem Scheitelpunkt *C* des rechten Winkels das Loth *CG*, zieht die Linien *AE* und *CD*

Fig. 574.

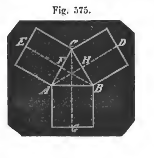


so ist $AB = BD$
$BE = BC$
$\angle ABE = \angle CBD$
folglich $\triangle ABE \cong \triangle BDC$
also auch $\frac{1}{2}\square CE = \frac{1}{2}$ Rectangel *BG*
oder $\square CE =$ Rectangel *BG*
eben so ist $\square AF =$ Rectangel *AG*
folglich $\square CE + \square AF = \square AD$

d. h. In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse = den beiden Quadraten der Katheten zusammengenommen. Dieser Satz wird von seinem muthmaſslichen Erfinder der **pythagorische Lehrsatz** genannt.

23. In jedem Dreieck ist das Quadrat der einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite = der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten weniger den beiden Rechtecken, welche jede dieser Seiten mit der Projection der anderen auf ihr bildet. Also

Fig. 575.



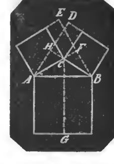
$\square AB = \square AC + \square BC - CB \times CH - AC \times CF$

Denn zeichnet man die Quadrate über den drei Seiten und fällt aus den Winkelspitzen die 3 Lothe *AD*, *BE*, *CG*, so ist
$\square CD = DH \times CH = CB \times CH$
und $\square CE = EF \times CF = AC \times CF$

Nun ist wie im vorigen Satz, wenn man dieselbe Construction macht:
$\square BG = \square BD = \square BC - \square CD$
und $\square AG = \square AE = \square AC - \square CE$
folglich
$\square AB = \square AC + \square BC - CB \times CH - AC \times CF$

24. Ist der der Seite *AB* gegenüberliegende Winkel stumpf so ist

Fig. 576.



$\square AB = \square AC + \square BC + CB \times CH + AC \times CF$
wie aus Figur 576 und mit Hülfe von No. 23 hervorgeht.

25. Die beiden Rectangel $CB \times CH$ und $AC \times CF$ in beiden Dreiecken, dem spitzwinkligen und dem stumpfwinkligen sind einander gleich.

Denn die Dreiecke *ACH* und *BCF* haben in Fig. 575 den $\angle ACB$ gemeinschaftlich, in Fig. 576 sind die $\angle ACH$ und *BCF* Scheitelwinkel; auſserdem sind die Dreiecke rechtwinklig, folglich einander ∽ und es ist
$AC : CH = BC : CF$
woraus $AC \times CF = BC \times CH$

26. Indirect läſst sich nun beweisen;

A. Wenn in einem $\triangle$ das Quadrat der einen Seite = der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten ist, so liegt der Seite des gröſseren Quadrats ein rechter Winkel gegenüber.

B. Ist das Quadrat einer Seite > als die Snmme der Quadrate der beiden anderen Seiten so liegt der ersten Seite ein stnmpfer Winkel gegenüber.

C. Ist das Qnadrat einer Seite kleiner als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, so liegt der ersten Seite ein spitzer Winkel gegenüber.

27. In dem rechtwinkligen $\triangle ACB$ (Fig. 574) ist CH ein Loth auf die Diagonale, daher ist

$$\triangle ACB \infty \triangle AHC \infty \triangle CHB$$

hieraus folgt

$$AB:BC = BC:BH \qquad (1)$$

$$AB:AC = AC:AH \qquad (2)$$

$$AH:CH = CH:BH \qquad (3)$$

und aus diesen 3 Proportionen

$$BC^2 = AB \times BH \qquad (4)$$

$$AC^2 = AB \times AH \qquad (5)$$

$$CH^2 = AH \times BH \qquad (6)$$

Es ist $AH:BH = AH:BH$

$$= AB \cdot AH : AB \cdot BH$$

folglich ans 5 nnd 6

$$AH:BH = AC^2:BC^2 \qquad (7)$$

vergleiche Chorde No. 10.

Ist in Fig. 578 AD die Halbirnngslinie der Seite BG, so hat man nach No. 23 nnd 24:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2AD \times DJ$$

und $\quad AG^2 = DG^2 + AD^2 - 2DG \times DJ$

darans

$$AB^2 + AG^2 = 2AD^2 + 2BD^2 = 2AD^2 + 2GD^2$$

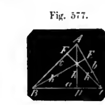
28. Zwischen 3 in einer Ebene liegenden Pnnkten läfst sich ein vierter Pnnkt finden, der von jedem der drei Pnnkte gleich weit entfernt ist. Da dies also anch zwischen den drei Pnnkten A, B, C (Fig. 577) geschehen kann, so läfst sich nm jedes Dreieck ein Kreis beschreiben; nnd da dies anch zwischen den 3 Standpnnkten D, E, F der Höhen geschehen kann, so läfst sich in jedem Dreieck ein Kreis beschreiben.

29. Der Inhalt eines Parallelogramms ist = dem Product aus Grnndlinie und Höhe, es ist also nach No. 11 der Inhalt eines Dreiecks = dem halben Product aus Grundlinie und Höhe. Bezeichnet man die Grundlinie mit a, die Höhe mit h, so ist der Inhalt des $\triangle$

$$J = \tfrac{1}{2}a \cdot h \qquad (1)$$

30. Bezeichnet man die Projection der Seite b auf die Seite a mit x, die Höhe auf a mit h so ist, je nachdem $\angle C$ stumpf oder spitz ist

Fig. 577.



$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ax$$

$$h^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \left[\frac{c^2 - a^2 - b^2}{\pm 2a}\right]^2$$

$$= \frac{2a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

mithin $\quad h = \frac{1}{2a}\sqrt{2a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2} \qquad (2)$

Um mit Logarithmen rechnen zu können verwandelt man die Klammergröfse in ein Prodnct nnd erhält

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \qquad (3$$

Es ist hiermit der Inhalt des $\triangle$ wenn die 3 Seiten gegeben sind $(\tfrac{1}{2}ah) =$

$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \qquad (4)$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, $b = c$, so ist die Höhe h auf der Grundlinie a

$$h = \tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} \qquad (5)$$

die Höhe auf einen Schenkel b

$$h' = \frac{a}{2h}\sqrt{4b^2 - a^2} \qquad (6)$$

Der Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks bei der Grnndlinie a

$$J = \tfrac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2} \qquad (7)$$

Ist das $\triangle$ gleichseitig so ist

$$h = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} \qquad (8)$$

$$J = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

31. Sind die 3 Höhen h, h', h'' gegeben, so hat man

$$\frac{ah}{2} = \frac{bh'}{2} = \frac{ch''}{2}$$

woraus $\quad b = a\frac{h}{h'}$ und $c = a\frac{h}{h''}$

Setzt man diese Werthe in Formel 3 so wird

$$a + b + c = a + a\frac{h}{h'} + a\frac{h}{h''}$$

$$= \frac{a}{h'h''}[hh' + hh'' + h'h'']$$

und in derselben Weise erhält man die anderen 3 Factoren der Wurzelgröße $(hh' + hh'' - h'h'')$; $(hh' + h'h'' - hh'')$; $(hh'' + h'h'' - hh')$. Demnach ist wenn die in Klammern stehenden 3 Glieder der 4 Factoren mit A, B, C, D bezeichnet:

$$\frac{ah}{2} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{(h'h'')^2} \sqrt{A \cdot B \cdot C \cdot D}$$

woraus
$$a = \frac{2h\,(h'h'')^2}{\sqrt{(hh' + hh'' + h'h'')(hh' + hh'' - h'h'')(hh' + h'h'' - hh'')(hh'' + h'h'' - hh')}} \qquad (10)$$

und der Inhalt
$$J = \frac{(hh'h'')2}{\sqrt{(hh' + hh'' + h'h'')(hh' + hh'' - h'h'')(hh' + h'h'' - hh'')(hh'' + h'h'' - hh')}} \qquad (11)$$

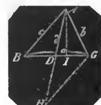
32. Ist $AD = d$ die Halbirunglinie der Seite $BG = a$, so hat man nach No. 27

$$b^2 + c^2 = 2d^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

woraus $\quad a = \sqrt{2(b^2 + c^2 - 2d^2)}$

Verlängert man AD um $DH = d$, zieht GH, so ist $\triangle GDH \cong \triangle BDA$ und GH ist $= c$. Es ist folglich $\triangle ABG = AHG$, der Inhalt des letzteren also auch des ersteren oder

Fig. 578.



$$J = \frac{1}{4}\sqrt{(b + c + 2d)(b + c - 2d)(b + 2d - c)(2d + c - b)} \qquad (12)$$

33. Sind sämmtliche 3 Halbirungslinien d, e, f der 3 Seiten gegeben, so hat man

1) $\quad b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2d^2$

2) $\quad a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} = 2e^2$

3) $\quad a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = 2f^2$

hieraus $\quad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(d^2 + e^2 + f^2)$

Subtrahirt man hiervon Gl. 1, reducirt und radicirt, so erhält man

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2e^2 + 2f^2 - d^2} \qquad (13)$$

eben so wenn man die 2te und die 3te Gleichung von der 4ten abzieht

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2d^2 + 2f^2 - e^2} \qquad (14)$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2d^2 + 2e^2 - f^2} \qquad (15)$$

Die Inhaltsbestimmung des $\triangle$ geschieht nach No. 32 und No. 20. Denn es ist (Fig. 573) in $\triangle BCG = \frac{1}{3}ABG = \frac{1}{3}J$

$$BC = \tfrac{2}{3}e,\ GC = \tfrac{2}{3}f \text{ und } CD = \tfrac{1}{3}d$$

folglich nach Formel 11

$$\tfrac{1}{3}J = \tfrac{1}{4}\sqrt{(\tfrac{2}{3}d + \tfrac{2}{3}e + \tfrac{2}{3}f)(\tfrac{2}{3}d + \tfrac{2}{3}e - \tfrac{2}{3}f)(\tfrac{2}{3}d + \tfrac{2}{3}f - \tfrac{2}{3}e)(\tfrac{2}{3}e + \tfrac{2}{3}f - \tfrac{2}{3}d)}$$
$$J = \tfrac{1}{3}\sqrt{(d + e + f)(d + e - f)(d + f - e)(e + f - d)} \qquad (16)$$

34. Ist $AE = d$ der Durchmesser des um das $\triangle ABD$ beschriebenen Kreises, BF die Höhe h auf $AD = a$, so hat man wenn man noch BE zieht

Fig. 579.



$\angle ABE = \angle BFD = R\angle$

$\angle AEB = \angle ADB$ (auf einerlei Bogen AB)

daher $\triangle ABE \sim \triangle BFD$

also $\quad d : b = c : h$

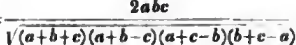
woraus $\quad h = \frac{b \cdot c}{d}$

folglich $\quad J = \triangle ABD = \frac{1}{2}ah = \frac{abc}{2d}$

Nun ist

$J = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$

folglich



$$d = \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}} \quad (17)$$

35. Ist C der Mittelpnnkt des in dem $\triangle ABD$ beschriebenen Kreises, so sind die Lothe von C auf den Seiten die Halbmesser $r = \frac{1}{2}d$ desselben; zieht man nun die 3 Linien CA, CB, CD so hat man

Fig. 580.



die 3 Dreiecke ACB, ACD, $BCD =$

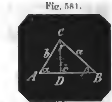
$$J = \tfrac{1}{2}r\,(a + b + c) \quad (18)$$

und

$$d = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{a+b+c} \quad (19)$$

36. Wenn von einem Dreieck 3 Seiten gegeben sind, so findet man die Winkel folgendermaafsen.

Fig. 581.



Nach No. 23 hat man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

hieraus $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (20)

Ist A ein stnmpfer Winkel, so wird das Prodnct $2cAB$ positiv, $\cos\alpha$ wird negativ, die Formel ist also allgemein gültig.

Für Rechnung mit Logarithmen eignet sich die Formel nicht.

Ist A ein rechter Winkel, so ist $\cos\alpha = 0$ nnd es entsteht

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Bezeichnet man CD mit h, so ist

$$h = b\sin\alpha$$

demnach hat man mit Hülfe von Formel 3

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2bc} \quad (21)$$

Es ist $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$

Schreibt man diesen Werth in Formel 20, so erhält man

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}$$

hieraus $$\sin\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}} \quad (22)$$

Es ist $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$

Diesen Werth in Formel 20 gesetzt gibt

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}$$

hieraus $$\cos\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}} \quad (23,$$

37. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten nnd der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, so erhält man

$$BD = c - b\cos\alpha$$

da nnn

$$BD\,tg\,\beta = b\sin\alpha$$

so ist

$$tg\,\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha} \text{ auch} = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma} \quad (24)$$

eben so

$$tg\,\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma} = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta} \quad (25)$$

Diese Formeln sind für Rechnnng mit Logarithmen unbrauchbar mindestens unbequem. Man hat aber folgende Formeln ans der Trigonometrie

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Dividirt man die erste Formel durch die zweite, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (26)$$

und dividirt man die dritte durch die zweite

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (27)$$

hieraus

$$tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta$$

Nun ist

$$a\sin\beta = b\sin\alpha$$

oder $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

woraus

$$a+b : a-b = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta$$

folglich

$$a+b : a-b = tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und $tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} : tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}$ (28)

Sind nun die Seiten a, b und der $\angle\gamma$ gegeben, so ist $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$

folglich $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$

und $tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}$

Man hat also die Formel

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2} \qquad (29)$$

welche sich ohne Unterbrechung mit Logarithmen berechnen läſst. Hat man $\frac{\alpha-\beta}{2}$ also auch $\alpha-\beta = \varphi$ gefunden, so erhält man, da $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ ist,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(180^\circ + \varphi - \gamma)$$

und $\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - \varphi - \gamma)$

Eben so ist

$$tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{a-c}{a+c}\cdot\cot\frac{\beta}{2} \qquad (30)$$

$$tg\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\cot\frac{\alpha}{2} \qquad (31)$$

ferner hat man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \qquad (32)$$

Setzt man $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ in diese Formel, so erhält man

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= (b+c)^2 - \left(2\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

folglich

$$a = \sqrt{\left(b+c+2\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(b+c-2\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (33)$$

den Inhalt des $\triangle$ hat man unmittelbar

$$J = \tfrac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = \tfrac{1}{2}ac\cdot\sin\beta = \tfrac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha \quad (34)$$

38. Wenn eine Seite und die 3 Winkel gegeben sind, so ist

$$b = a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (35)$$

$$CD = h = a\sin\beta = b\sin\alpha \qquad (36)$$

Nun ist $a\sin\gamma = c\sin\alpha$

oder $a = c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

Diesen Werth in Formel 36 gesetzt gibt

$$h = c\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (37)$$

Nun ist $J = \frac{c\cdot h}{2} = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$ (38)

39. Wenn 2 Seiten a, b und der gröſsere $\angle\alpha$ der beiden anliegenden Winkel gegeben sind, dann ist

$$\sin\beta = \frac{c}{a}\sin\alpha \qquad (39)$$

$$c = AD + BD = AD + \sqrt{BC^2 - CD^2}$$

also $c = b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$ (40)

und

$$J = \tfrac{1}{2}hc = \tfrac{1}{2}b\sin\alpha\left[b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}\right] \qquad (41)$$

Dreimalachtflächner, der deutsche Name des Pyramidenoktaeders oder Triakisoktaeders, eines Krystalls von 24 Flächen in gleichschenkligen Dreiecken, 16 Kanten und 14 Ecken von der Form eines Octaeders, auf dessen 8 Flächen dreiseitige Pyramiden aufgesetzt sind.

Dreiunddreikantner, der deutsche Name des Hemididodekaeders oder Skalenoeders, eines Krystalls von 12 Flächen in ungleichseitigen Dreiecken, 18 Kanten und 8 Ecken; er hat das Ansehn zweier sechsflächigen Pyramiden mit gemeinschaftlicher mittlerer sechseckiger

Basis, deren 6 Ecken aber nicht in einer Ebene sondern in einem Zickzack liegen.

Dreiundeinaxiges Krystallisationssystem, s. u. Axensystem pag. 261, No. 3.

Druck ist bei unmittelbarer Berührung zweier Körper die Einwirkung des einen auf den anderen, welche diesen hindert eine beabsichtigte Bewegung zu beginnen oder in der diesem Körper inwohnenden Kraft entsprechenden Geschwindigkeit anzunehmen. Im Gegensatz zu Stofs, die mit unmittelbarer Berührung zweier Körper eintretende Wirkung des Hindernisses, das der eine Körper dem anderen entgegengesetzt, eine bereits begonnene Bewegung mit derselben Geschwindigkeit fortzusetzen oder dessen gänzlichen Stillstand veranlafst.

Druck im Gegensatz zu Zug ist die Einwirkung eines Körpers auf einen andern mit dem Bestreben dessen Volumen zu vermindern, während Zug das Bestreben äufsert das Volum zu vergröfsern. Oder Druck wirkt auf die Verdichtung der materiellen Theile eines Körpers, Zug auf deren Trennung. Im Uebrigen sind Druck und Zug bei einerlei Kraftäufserung von einerlei Wirkung.

Allgemeiner sagt man: Druck ist die Einwirkung einer Kraft in ihrem Angriffspunkt auf einen Körper mit dem Bestreben ihn fortzubewegen; und wenn man den Begriff Zug als Gegensatz hinzufügen will, so kann man von dem Druck sagen, dafs er das Bestreben äufsere, den Körper durch Bewegung zu entfernen, der Zug hat dann das Bestreben den Körper zu nähern. Man hat auch Druck und Zug in der Ferne; jener heifst Abstofsung, dieser Anziehung.

Jeder auf unserer Erdoberfläche befindliche Körper empfängt die Wirkung eines Zuges, welchen die Schwerkraft des Erdkörpers auf ihn übt und ihm, also durch Anziehung das Bestreben mittheilt, dem Sitz der Kraft, dem Mittelpunkt der Erde sich zu nähern. Liegt ein solcher Körper A auf einem festen Körper B, so äufsert A dieses Bestreben auf B, also mit einer Kraft, welche den Körper B durch Fortbewegung entfernen will, während B dem Körper A mit einer gleich grofsen Kraft ein Hindernifs setzt, die seinem Bestreben gemäfse Bewegung zu beginnen. Beide Körper A und B äufsern also gleich grofse Druckwirkungen auf einander; ein Körper, der einen andern drückt wird wieder gedrückt, es ist überall Druck und Gegendruck in gleichen Gröfsen.

Da jede Einwirkung die Folge einer Kraft ist, so nennt man den Druck auch eine todte Kraft im Gegensatz zu lebendiger Kraft, die eine in Bewegung befindliche Masse mit ihrem Bewegungsvermögen entwickelt und eine andere Masse in Bewegung bringt. Ein Beispiel wie eine blofs drückende Masse zu lebendiger Kraft wird giebt das oberschlächtige Wasserrad, welches bei bestimmter Wassermenge per Secunde und bestimmtem Gefälle (senkrecht gemessene Entfernung des Oberwasserspiegels vom Unterwasserspiegel) am wirksamsten ist, wenn das Wasser mit der Geschwindigkeit der Radperipherie in die Schaufeln fällt, so dafs die im Radkranz befindliche Wassermasse einzig und allein auf Druck wirkt, während beim unterschlächtigen Rade das Wasser durch Stofs allein die Bewegung hervorbringt.

Druck ist also das Ergebnifs einer auf einen Körper wirkenden Kraft, wirkt selbst als Kraft und zwar als eine Kraft, die das Bestreben äufsert Bewegung hervorzubringen. Gleicher Druck und Gegendruck oder Druck und Zug in gleichen Gröfsen und in gerader Linie wirkend heben einander auf, es ist Gleichgewicht; die wissenschaftliche Untersuchung der Druckwirkungen gehört mit den Kräften in die Statik.

Der Ort auf den Oberflächen zweier sich berührenden Körper wo Druck erfolgt, ist der Angriffspunkt des Drucks, die gerade Linie nach welcher Bewegung statt finden würde ist die Richtung des Drucks. Die gerade oder krumme Verbindungslinie der Angriffspunkte mehrerer auf einander drückender Körper ist die Mittellinie des Drucks. Der Druck wird wie die Kraft gemessen und seine Gröfse wie diese in einer geraden Linie symbolisch dargestellt. Oder vielmehr es wird die Gröfse jeder Kraft mit einem Druck verglichen und nach einer Druckeinheit gemessen. Denn die oben gedachte Anziehungskraft der Erde auf jedes Massenelement in gleichem Maafse gibt in der Anzahl der materiellen Theile eines Körpers auch die Anzahl jener gleich grofsen Anziehungswirkungen und diese spricht sich als Gewicht aus; die Gröfse eines Drucks und mit diesem die Gröfse einer Kraft wird also durch ein Gewicht gemessen und deren Gröfse ist gleich diesem Gewicht.

Druck, hydrostatischer, der Druck, den eine Flüssigkeitsmasse gegen die Gefäfswandungen und auf eingesenkte Körper ausübt, ist unabhängig von der Form des

Gefäfses und dessen Wandungen und in gleicher Tiefe vom Wasserspiegel ab gleich grofs. Es geht dies daraus hervor, dafs eine Wassermasse in einem stillstehenden Gefäfs ebenfalls in Ruhe ist, dafs also alle horizontalen Wasserschichten in Gleichgewicht sich befinden, weil sonst eine ununterbrochene Wiederherstellung des gestörten Gleichgewichts durch fortdauernde Strudel und Wirbel sich kenntlich machen würde.

Die oberste Schicht Wasser lagert ruhig auf der nächst unteren, diese wieder auf der folgenden und so fort bis zur tiefsten Schicht. Wenngleich nun das Wasser incompressibel, also unten so specifisch schwer als oben ist, so veranlafst die Belastung von Schicht auf Schicht, dafs mit der Tiefe auch der Druck gröfser wird, und zwar unabhängig von der Flächenausdehnung der Schicht.

Daher halten Wassersäulen von sehr verschieden grofsen Querschnitten bei einerlei Höhe, also von sehr verschiedenen Gewichten einander das Gleichgewicht, und wenn man auf die Oberfläche des in einer dünnen Röhre befindlichen Wassers einen Druck *p* ausübt, der dem Gewicht von *h* Fufs Wassersäule = ist, so hält dieser einer mit der Röhre communicirenden Wassersäule von *m* fachen Querschnitt und der Höhe *h*, also einem Druck = *mp* das Gleichgewicht, eine Eigenschaft, die das Princip der hydraulischen Presse ausmacht.

Eine Wassersäule von 32 Fufs Höhe übt den Druck der Atmosphäre aus, etwa 14 Zollpfund auf den □Zoll; in 64 Fufs Tiefe unter dem Wasserspiegel würde der Druck des Wassers schon 2 Atmosphären = 28 Pfund auf den □Zoll betragen.

Da die atmosphärische Luft an der Erdoberfläche 770 mal leichter als Wasser ist, so gehören 770 Atmosphären Druck dazu um der Luft die Dichtigkeit des Wassers zu geben, wenn das Mariottesche Gesetz bis so weit noch gilt; also in 32×770 Fufs = 24640 Fufs oder in einer Meile Tiefe im Weltmeer würde Luft in einer unten offenen Taucherglocke herabgelassen bis zur Dichte des Wassers zusammengedrückt werden.

2. Jeder Körper verliert, wenn er in Wasser gesenkt wird, so viel an Gewicht, als das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers beträgt, weil das um den Körper befindliche Wasser mit dem verdrängten Wasser also mit dessen Gewicht im Gleichgewicht sich befunden hat und dasselbe Gewicht auch jetzt noch zu tragen übernimmt. Wiegt ein Körper in der freien Luft 10 Pfund und sind nur 8 Pfund auf der Waagschale erforderlich um ihm das Gleichgewicht zu halten wenn er an einem Faden in Wasser ganz eingesenkt ist, so hat er 2 Pfund an Gewicht verloren, das Wasser von dem Volum des Körpers wiegt also 2 Pfund; $10 : 2 = 5 : 1$ ist das Verhältnifs seines absoluten Gewichts zu dem des Wassers, d. h der Stoff aus dem der Körper besteht, hat das specifische Gewicht = 5.

3. Ein Körper schwimmt, wenn er so viel Wasser verdrängt als er selbst schwer ist, weil dann erst das umliegende Wasser mit dem Körper Gleichgewicht hat.

Jeder in Wasser gesenkte Körper vermehrt den Druck auf den Boden des Gefäfses um sein absolutes Gewicht. Ein Stab ins Wasser gestellt ohne dafs er den Boden berührt, drückt auf den Boden um das Gewicht das von ihm verdrängten Wassers, welches um so viel in die Höhe steigt, dafs der Raum des vom Stabe verdrängten Wassers wieder ersetzt wird.

4. Die Ausflufsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit bei bestimmter Höhe *h* des Spiegels über der Ausflufsöffnung ist unabhängig von dem specifischen Gewicht der Flüssigkeit (s. Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten No. 4).

Duodecimal zeigt die Beziehung zur Zahl 12 an. Vergl. Decimal, Dodekadik.

Duodecimalmaafs ist ein Maafs, dessen Einheit in 12 gleiche Theile getheilt ist, wonach diese Theile als Einheiten wieder in 12 gleiche Theile getheilt werden, wie in Preufsen und in anderen Ländern das Längenmaafs als Werkmaafs. 1 Ruthe hat 12 Fufs, 1 Fufs hat 12 Zoll, 1 Zoll 12 Linien. Dieser Eintheilung entsprechend 1 □Ruthe = 144 □Fufs u. s. w. 1 Kubikruthe = 1728 Kubikfufs u. s. w. vergleiche Decimalmaafs.

Durchgang eines Gestirns durch den Meridian s. u. Culmination.

Durchmesser ist zunächst eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt einer geschlossenen Curve bis zu den entgegengesetzt liegenden Punkten des Umfangs gezogen wird, also zunächst in dem Kreise und der Ellipse jede durch den Mittelpunkt gezogene Sehne.

Die Begriffe von Mittelpunkt und Durchmesser sind wechselseitig. Mittelpunkt einer Curve ist der Punkt der alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt, und Durch-

messer sind Sehnen die alle in einem Punkt sich schneiden durch welchen sie halbirt werden.

Der Kreis und die Ellipse haben also unzählig viele Durchmesser. Jeder derselben hat die Eigenschaft, dafs er sowohl die Curve als auch die von derselben eingeschlossene Ebene halbirt; oder vielmehr die Curve hat einen Mittelpunkt, wenn jede durch ihn gezogene Sehne die Curve selbst und die von ihr eingeschlossene Ebene halbirt und diese gleichen Theile sind ≅, weil unter den vorgedachten Bedingungen die Punkte der Curve zu beiden Seiten eines Durchmessers symmetrisch angeordnet sein müssen. Hieraus folgt, dafs wenn durch gleichweit vom Mittelpunkt auf einem Durchmesser genommene Punkte parallele Chorden gezogen werden, diese 4 Bogen und Flächenstücke abschneiden von denen je zwei und zwei einander ≅ sind.

Fig. 582.

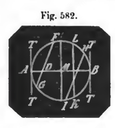


Fig. 583.

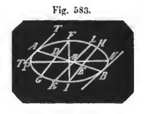


Fig. 582 ist ein Kreis, Fig. 583 eine Ellipse, *M* sind die Mittelpunkte, *AB* Durchmesser; ist *MD* = *ME*, sind *FG* durch *D* und *HJ* durch *E* parallele Sehnen, so ist

Bogen und Abschnitt *FAG* ≅ *JBH*

Ferner Bogen *AF* ≅ Bogen *BJ*

und Bogen *AG* ≅ *BH*

Ausschnitt *ADF* ≅ *JBE*

und Ausschnitt *ADG* ≅ *BEH*

Die Sehnen *FG* und *HJ* werden von den Durchmessern *AB* nicht halbirt, dagegen gibt es Sehnen, welche von den *D* unter bestimmten Winkeln mit denselben halbirt werden. Da diese Sehnen gegen die Endpunkte des *D* hin immerfort kleiner werden und in den Endpunkten selbst zu Null verschwinden müssen, so ist klar, dafs nur diejenigen Sehnen es sein können, welche wie *KL* mit den in den Endpunkten *A*, *B* der Durchmesser an der Curve gezogenen Tangenten *TT* parallel laufen.

Die einfachste Beziehung paralleler Ordinaten mit ihrem Durchmesser ist offenbar die, wenn sie normal auf einander stehen, und es stimmt mit dem allgemeinen Begriff Axe (s. d.) wenn man denjenigen Durchmesser, welcher normal zu ihm gerichtete Ordinaten halbirt, Axe nennt. In dem Kreise steht jede Tangente auf ihrem Durchmesser normal, daher ist jeder Durchmesser des Kreises zugleich Axe; bei der Ellipse sind es nur 2 Durchmesser, der längste *NP* und der normal auf ihm befindliche kürzeste Durchmesser *FJ*.

In Folge der Eigenschaft des D., dafs er ein bestimmtes System paralleler Ordinaten halbirt ist auch der Begriff des D. dahin erweitert worden wie in dem Art.: conjugirte Durchmesser die Definition von D. lautet, und wohin ich für das Uebrige, was noch in diesem Art. über D. gesagt werden sollte, verweise.

Hierbei mufs ich bemerken, dafs in Folge meiner längeren Abwesenheit vom Druckort mehrere Fehler im Text sich vorfinden: Statt Fig. 314, 315, 316 ist zu lesen: Fig. 315, 316, 317. In Fig. 317 fehlt im Durchschnittspunkt zwischen der Peripherie und der Linie *CO* der Buchstabe *H* und pag. 45 rechts, Zeile 22 von oben ist hinter dem Wort aufzuweisen eine sinnentstellende Auslassung geschehen. Der Satz lautet: Dagegen hat die Parabel keine anderen Durchmesser als die Axe aufzuweisen, auf welchem die gleichen entgegengesetzten Ordinaten normal sind; sämmtliche der Axe Parallelen sind Durchmesser, die von diesen halbirten Doppelordinaten sind ∦ der in dem Endpunkt des jedesmaligen Durchmessers an die Parabel gezogenen Tangente.

Die Parabel hat keinen Mittelpunkt aufzuweisen, wohl aber die Ellipse und die Hyperbel, bei welchen jede durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie ein Durchmesser ist. wie *FG* durch *C* Fig. 315, *CJ* durch *C* Fig. 316.

Durchschnitt ist die beliebig gewählte Grenze, durch welche eine geometrische Gröfse getheilt wird. D. zweier Linien ist der Punkt (Durchschnittspunkt), in welchem beide sich gegenseitig theilen. D. zweier Ebenen die gerade Linie (Durchnittslinie) in welcher beide sich gegenseitig theilen. Im Gegensatz von Berührung, bei welcher beliebig gewählte Grenzen der geometrischen Gröfsen gemeinschaftlich werden ohne zu theilen. D. eines Körpers ist die Fläche (Durchschnittsfläche) mit welcher derselbe getheilt wird.

D. als Zeichnung eines Baugegenstandes ist die Zeichnung desselben, nachdem der Gegenstand durch eine oder mehrere Ebenen, die Durchschnittsebenen, getheilt gedacht ist.

Durchnittsebene, -fläche, -linie, -punkt s. Durchschnitt.

Durchschnittszahl s. v. w. arithmetisches Mittel.

Dyadisches Zahlensystem, Dyadik, bei welchem die Werthe der Stellen von der Rechten zur Linken statt nach den Potenzen von 10, wie bei unsrem dekadischen System, nach den Potenzen von 2 steigen. Es existirt also nur die Ziffer 1 und das Nullzeichen.

dec. Syst.		dyad. S	dec. Syst.		dyad. S.
1	=	1	9	=	1001
2	=	10	10	=	1010
3	=	11	11	=	1011
4	=	100	12	=	1100
5	=	101	13	=	1101
6	=	110	14	=	1110
7	=	111	15	=	1111
8	=	1000	16	=	10000

u. s. w.

Dynamik, dynamische Wissenschaften s. u. angewandte Mathematik.

Inhaltsverzeichnifs und Sachregister.

Die Gegenstände als Ueberschriften der Artikel sind gesperrt gedruckt.

E.

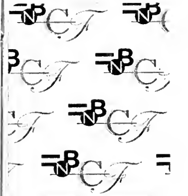
F.

G.

22*

Berlin, Druck der Gebr. Unger'schen Hofbuchdruckerei.






005269596
20. 9. 274.

